Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Michel Waldschmidt

Indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 12 (1970-1971), exp. nº 6, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1970-1971__12__A4_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
12e année, 1970/71, n° 6, 8 p.
21 décembre 1970

INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE DES VALEURS DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

par Michel WALDSCHMIDT

Nous énonçons d'abord un résultat simple de transcendance (LANG [4], [5] ; RAMACHANDRA [6]) :

THÉORÈME 1. - Soient x_1, x_2 (resp. y_1, y_2, y_3) des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Alors l'un des six nombres

$$\exp(x_i\, y_j) \qquad (i = 1 , 2 ; \; j = 1 , 2 , 3)$$

est transcendant.

On en déduit que, si $x_1 , \ldots , x_n$ (resp. y_1, y_2, y_3) sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, parmi les $3n$ nombres

$$\exp(x_i\, y_j) \qquad (i = 1 , \ldots , n ; \; j = 1 , 2 , 3) \quad ,$$

$n - 1$ sont transcendants. RAMACHANDRA [6] conjecture que $n - 1$ de ces nombres sont algébriquement indépendants. Un cas particulier est une conjecture de GEL'FOND (SCHNEIDER [7], problème 7) :

"Si a est un nombre algébrique différent de 0 et de 1, et si b est algébrique de degré $d > 2$, les $d - 1$ nombres

$$a^b , \ldots , a^{b^{d-1}}$$

sont algébriquement indépendants".

GEL'FOND a démontré que, pour $d \geqslant 3$, deux de ces nombres sont algébriquement indépendants.

D'autre part, LANG [5] a conjecturé (SCHNEIDER [7], problème 1) que, si x_1, x_2 (resp. y_1, y_2) sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, l'un des quatre nombres

$$\exp(x_i\, y_j) \qquad (i = 1 , 2 ; \; j = 1 , 2)$$

est transcendant. D'après ALAOGLU et ERDÖS [1], on en déduirait que le quotient de deux nombres colossalement abondants consécutifs est premier ; le théorème 1 montre qu'un tel quotient est, soit premier, soit produit de deux nombres premiers distincts.

Nous allons voir que ces conjectures sont des cas particuliers d'une conjecture de SCHANUEL [5] :

Conjecture de Schanuel. - *Si* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *sont des nombres complexes* $\mathbb{Q}$-*linéairement indépendants, le degré de transcendance sur* $\mathbb{Q}$ *du corps*

$$\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \exp \alpha_1, \dots, \exp \alpha_n)$$

est supérieur ou égal à n .

CONJECTURE 1. - *Soient* $x_1, \dots, x_n$ (*resp.* y_1, y_2) *des nombres complexes* $\mathbb{Q}$-*linéairement indépendants. Alors* $n-1$ *des* $2n$ *nombres*

$$\exp(x_i y_j) \qquad (i = 1, \dots, n ; \quad j = 1, 2)$$

sont algébriquement indépendants.

La conjecture 1, qui généralise celles de LANG et de RAMACHANDRA, est une conséquence de la conjecture de SCHANUEL.

En effet, si $n + \ell$ est la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $x_i y_j$ $(1 \leq i \leq n, \quad j = 1, 2)$, avec $0 \leq \ell \leq n$, la conjecture de SCHANUEL a pour conséquence que le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ de

$$\mathbb{Q}(x_1 y_1, \dots, x_1 y_n, x_2 y_1, \dots, x_2 y_n, \\ \exp(x_1 y_1), \dots, \exp(x_1 y_n), \exp(x_2 y_1), \dots, \exp(x_2 y_n))$$

est supérieur ou égal à $n + \ell$. Or, le degré de transcendance de

$$\mathbb{Q}(x_1 y_1, \dots, x_2 y_n) = \mathbb{Q}\left(\frac{x_2}{x_1}, x_1 y_1, \dots, x_1 y_n\right)$$

est inférieur ou égal à $\ell + 1$. Donc $n-1$ des nombres

$$\exp(x_i y_j) \qquad (i = 1, \dots, n ; \quad j = 1, 2)$$

sont algébriquement indépendants.

THÉORÈME 2. - *Soient* $x_1, \dots, x_N$ (*resp.* $y_1, \dots, y_M$) *des nombres complexes* $\mathbb{Q}$-*linéairement indépendants. Si* $MN \geq 2(M+N)$, *c'est-à-dire* $(M \geq 4$ *et* $N \geq 4)$ *ou* $(M \geq 3$ *et* $N \geq 6)$, *alors deux des nombres*

$$\exp(x_i y_j) \qquad (i = 1, \dots, N ; \quad j = 1, \dots, M)$$

sont algébriquement indépendants.

On en déduit que, si K est une extension de $\mathbb{Q}$ de degré de transcendance inférieur ou égal à 1 , et si y_1, y_2 sont des nombres complexes tels que

$$x^{y_i} \in K \ , \qquad i = 1 \ , 2 \ , \quad x \in \mathbb{N} \ ,$$

alors $1 \ , y_1 \ , y_2$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement dépendants.

Avant de démontrer le théorème 2, rappelons le schéma de la démonstration du théorème 1. On suppose que la conclusion du théorème est fausse, et soit K le corps obtenu en adjoignant à $\mathbb{Q}$ les six nombres

$$\exp(x_i \, y_j) \qquad (i = 1 \ , 2 \ ; \quad j = 1 \ , 2 \ , 3) \ .$$

1° Soit n un entier assez grand, $r = (4n)^3$. Un lemme de Siegel prouve l'existence d'entiers algébriques de K, $a_{i,j}$ $(1 \leqslant i \leqslant r \ ; \quad 1 \leqslant j \leqslant r)$, non tous nuls, majorés ainsi que leurs conjugués par

$$\exp(K_1 \, n^5) \qquad (\text{où } K_1 \text{ ne dépend pas de } n) \ ,$$

et tels que la fonction $F(z) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} a_{i,j} \exp[(ix_1 + jx_2)z]$ vérifie

$$F(k_1 \, y_1 + k_2 \, y_2 + k_3 \, y_3) = 0 \ , \qquad \text{pour } 1 \leqslant k_j \leqslant n^2 \ , \quad j = 1 \ , 2 \ , 3 \ .$$

2° La fonction F n'étant pas identiquement nulle, il existe un entier s et trois nombres h_1, h_2, h_3 $(1 \leqslant h_j \leqslant s + 1 \ , \quad j = 1 \ , 2 \ , 3)$ tels que

$$F(k_1 \, y_1 + k_2 \, y_2 + k_3 \, y_3) = 0 \ , \qquad \text{pour tout } k_1 \ , k_2 \ , k_3 \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant k_j \leqslant s \ ,$$

et

$$F(w) = F(h_1 \, y_1 + h_2 \, y_2 + h_3 \, y_3) \neq 0 \ .$$

3° Le principe du maximum, sur le cercle centré à l'origine et de rayon $s^{3/2}$, permet de majorer $F(w)$:

$$|F(w)| \leqslant \exp\left(- \frac{1}{2} \, s^3 \operatorname{Log} s\right) \ .$$

4° $F(w)$ est un nombre algébrique non nul, dont on peut majorer les conjugués ; soient $\alpha_1 \ , \ldots \ , \alpha_d$ ces conjugués, δ un dénominateur de α_1 ; on a alors

$$|\delta^d \times \alpha_1 \ldots \alpha_d| \geqslant 1 \ ,$$

d'où

$$|F(w)| > \exp(- K_3 \, s^{5/2}) \ , \qquad \text{où } K_3 \text{ est indépendant de } n \ .$$

5° Pour n assez grand, donc s assez grand, les conclusions des 3° et 4° sont incompatibles, et le théorème est démontré.

Pour généraliser le théorème 1, et obtenir un théorème d'indépendance algébrique, la difficulté vient essentiellement de la partie 4° : le nombre $F(w)$, que l'on doit minorer, est un polynôme en un nombre transcendant. LANG [5] définit un type de transcendance qui lui permet de minorer chaque polynôme, mais il n'obtient ainsi qu'un résultat partiel. Une autre méthode, due à GEL'FOND [3], consiste à utiliser une suite de polynômes, et à montrer que l'on peut minorer l'un d'eux. Pour utiliser ce critère, il faut alors connaître une majoration du nombre de zéros de la fonction F . Voici donc les trois lemmes qui seront utilisés dans la démonstration :

LEMME 1 (SIEGEL [8]). - *Soient* n *et* r *deux nombres entiers positifs,* $n > r$, *et*

$$a_{i,j} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n \; ; \; 1 \leqslant j \leqslant r)$$

des nombres entiers relatifs. On pose

$$A = \max_{i,j} |a_{i,j}| \; .$$

Alors il existe n *entiers relatifs* $x_1 , \ldots , x_n$, *non tous nuls, tels que*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \, x_i = 0 \; , \qquad \text{pour tout } j = 1 , \ldots , r \; ,$$

et

$$|x_i| \leqslant 1 + (nA)^{r/(n-r)} \; , \qquad \text{pour tout } i = 1 , \ldots , n \; .$$

LEMME 2. - *Soient* $b_1 , \ldots , b_n$ *des nombres complexes non tous nuls,* $w_1 , \ldots , w_n$ *des nombres complexes deux à deux distincts. Le nombre de zéros de la fonction*

$$z \longmapsto \sum_{k=1}^{n} b_k \exp(w_k \, z) \; ,$$

comptés avec leur ordre de multiplicité, dans le disque $|z| \leqslant \rho$, *est inférieur à*

$$\frac{n}{\lambda} + \frac{1 + n^{\lambda}}{\lambda \operatorname{Log} n} (1 + \rho)\Omega \; , \qquad \text{pour tout réel } \lambda > 0 \; , \quad \text{où } \Omega = 2(1 + \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |w_k|) \; .$$

LEMME 3. - *Soient* $\alpha \in \underset{\sim}{C}$, σ_1 *et* σ_2 *deux fonctions réelles de variable réelle* x , *strictement croissantes, qui tendent vers l'infini avec* x ; *soient* a_1 *et* a_2 *deux nombres réels supérieurs à* 1 . *On suppose que, pour tout* x *réel positif, on a*

$$\sigma_2(x) \leqslant \sigma_1(x) \; ; \qquad \sigma_i(x + 1) \leqslant a_i \, \sigma_i(x) \; , \quad \text{pour } i = 1 , 2 \; .$$

On suppose qu'il existe un entier N_0 *positif et, pour tout entier* $N > N_0$, *un*

<u>polynôme</u> $P_N \in \mathbb{Z}[X]$, <u>non nul, de hauteur</u> H_N <u>et de degré</u> d_N , <u>tel que</u>

$$|P_N(\alpha)| < \exp[-\ 12a_1\ a_2\ \sigma_1(N)\ \sigma_2(N)]\ ;$$

$$\operatorname{Log} H_N \leqslant \sigma_1(N)\ ; \qquad d_N \leqslant \sigma_2(N)\ .$$

<u>Alors</u> α <u>est algébrique, et il existe un entier</u> N_1 <u>tel que, pour</u> $N > N_1$, <u>on ait</u> $P_N(\alpha) = 0$.

<u>Démonstration du théorème</u> 2. - Supposons la conclusion du théorème 2 fausse. D'après le théorème 1, l'un des nombres

$$\exp(x_i\ y_j) \qquad (1 \leqslant i \leqslant N\ ;\ \ 1 \leqslant j \leqslant M)$$

est transcendant ; soit K un corps contenant ces nombres, et de degré de transcendance 1 sur $\mathbb{Q}$. Nous considérerons le cas simple où $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, α étant un nombre complexe transcendant sur $\mathbb{Q}$, et où les nombres $\exp(x_i\ y_j)$ $(1 \leqslant i \leqslant N\ ;$ $1 \leqslant j \leqslant M)$ appartiennent à $\mathbb{Z}[\alpha]$. Soient r le maximum des degrés de ces polynômes, et X un nombre entier arbitrairement grand. Nous désignerons par k_n $(n \in \mathbb{N})$ des constantes indépendantes de X .

1° <u>Il existe une famille d'entiers rationnels non tous nuls,</u>

$$p(\lambda_1\ , \ldots\ , \lambda_{N+1}) = p(\lambda)\ , \qquad \underline{\text{avec}} \begin{cases} 1 \leqslant \lambda_i \leqslant 2X^M\ , & 1 \leqslant i \leqslant N\ , \\ 1 \leqslant \lambda_{N+1} \leqslant 2NMr^2\ X^{M+N}\ , & \end{cases}$$

<u>majorés par</u> $\exp(k_0\ X^{M+N})$, <u>et tels que la fonction</u>

$$F(z) = \sum_{(\lambda)} p(\lambda)\ \exp(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i\ x_i\ z)\ \alpha^{\lambda_{N+1}}$$

<u>vérifie</u>

$$F(a_1\ y_1 + \ldots + a_M\ y_M) = 0\ , \qquad \underline{\text{pour}}\ \ 1 \leqslant a_j \leqslant X^N\ , \quad 1 \leqslant j \leqslant M\ .$$

En effet, $F(a_1\ y_1 + \ldots + a_M\ y_M)$ est un polynôme en α ; il s'écrit

$$F(a.y) = \sum_{h=1}^{\tau} (\sum_{(\lambda)} p(\lambda)\ A_{\lambda,a,h})\ \alpha^{h-1}\ , \qquad \text{où}\ \ A_{\lambda,a,h} \in \mathbb{Z}\ , \quad \text{et} \quad \tau \leqslant 4NMr^2\ sX^{M+N}\ .$$

On considère le système linéaire homogène en $p(\lambda)$:

$$\sum_{(\lambda)} p(\lambda)\ A_{\lambda,a,h} = 0\ , \qquad \text{avec} \begin{cases} 1 \leqslant a_i \leqslant X^N\ , & 1 \leqslant i \leqslant M\ , \\ 1 \leqslant h \leqslant \tau\ . & \end{cases}$$

Le lemme 1 prouve l'existence d'une solution non triviale.

2° <u>Il existe une constante</u> k_1 <u>indépendante de</u> X , <u>et des entiers</u> $b_1 , \ldots , b_M$ <u>tels que, pour</u> X <u>assez grand, on ait</u>

$$1 \leq b_j \leq k_2 X^N , \quad 1 \leq j \leq M , \qquad \underline{\text{et}} \qquad F(b_1 y_1 + \ldots + b_M y_M) \neq 0 \ .$$

On utilise le lemme 2, avec $\rho = k_2 X^N$, et $\Omega \leq 2(1 + 2NX^M \times k_3)$, où $k_3 = \max\limits_{1 \leq i \leq N} |x_i|$.

3° <u>On a</u> $|F(b_1 y_1 + \ldots + b_M y_M)| < \exp - \frac{1}{8k_2} X^{MN} \operatorname{Log} X$.

La fonction F admettant les zéros $z = a.y = a_1 y_1 + \ldots + a_M y_M$ $(1 \leq a_j \leq X^N ; 1 \leq j \leq M)$, la fonction $F(z) \times \prod\limits_a (z - ay)^{-1}$ est entière. D'où

$$F(b.y) = \frac{1}{2i\pi} \prod_a (by - ay) \times \int_{|z|=X^{M+N}} F(z)/((z - b.y) \prod_a (z - ay)) \, dz \ .$$

Le second membre est majoré par

$$\exp[- \frac{1}{8k_2} X^{MN} \operatorname{Log} X] \ .$$

4° <u>Le nombre</u> α <u>vérifie les hypothèses du lemme</u> 3.

En effet, $F(b.y)$ est un polynôme non nul en α , à coefficients entiers rationnels. On pose

$$\sigma_1(X) = \sigma_2(X) = k_5 X^{M+N} , \qquad a_1 = a_2 = 2 \ .$$

On a

$$|F(b.y)| < \exp(- 12 a_1 a_2 \sigma_1(X) \sigma_2(X)) \ ,$$

pour tout X assez grand. Donc α est algébrique, ce qui contredit le théorème de Lang.

Pour terminer, citons d'autres résultats du même type ; si, dans la démonstration, on utilise les dérivées de la fonction F , on obtient les deux théorèmes suivants, qui améliorent un théorème de Gel'fond [3] et un théorème de Šmelev [9] :

THÉORÈME 3. - <u>Soient</u> x_1 , x_2 , x_3 (<u>resp.</u> y_1 , y_2 , y_3) <u>des nombres complexes linéairement indépendants sur</u> $\mathbb{Q}$. <u>Alors deux au moins des nombres</u>

$$y_j \ , \exp(x_i y_j) \qquad (i = 1 , 2 , 3 ; \ j = 1 , 2 , 3)$$

<u>sont algébriquement indépendants.</u>

THÉORÈME 4. - Soient x_1 , x_2 (resp. y_1 , y_2 , y_3 , y_4) des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Alors deux au moins des nombres

$$y_j \ , \ \exp(x_i\, y_j) \qquad (i = 1 \ , \ 2 \ ; \quad j = 1 \ , \ 2 \ , \ 3 \ , \ 4)$$

sont algébriquement indépendants.

Enfin, si on utilise une fonction du type $z \to \sum_{(\lambda)} p(\lambda)\, z^{\lambda_0} \exp(\sum \lambda_i\, x_i\, z)$ et ses dérivées, on obtient les deux théorèmes :

THÉORÈME 5 (GEL'FOND [3]). - Soient x_1 , x_2 (resp. y_1 , y_2 , y_3) des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. On suppose qu'il existe un entier n_0 et un nombre réel positif τ tels que, pour tout n , n_1 , n_2 entiers relatifs avec $n > n_0$, $|n_i| < n$, $i = 1 , 2$, on ait

$$|n_1\, x_1 + n_2\, x_2| > \exp(-\, \tau n^2 \operatorname{Log} n) \quad .$$

Alors deux des nombres

$$x_i \ , \ y_j \ , \ \exp(x_i\, y_j) \qquad (i = 1 \ , \ 2 \ ; \quad j = 1 \ , \ 2 \ , \ 3)$$

sont algébriquement indépendants.

THÉORÈME 6 ([10]). - Soient x_1 , x_2 (resp. y_1 , y_2) des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Si les deux nombres $\exp(x_1\, y_2)$, $\exp(x_2\, y_2)$ sont algébriques, alors deux au moins des nombres

$$x_i \ , \ y_j \ , \ \exp(x_i\, y_j) \qquad (i = 1 \ , \ 2 \ ; \quad j = 1 \ , \ 2)$$

sont algébriquement indépendants.

Le théorème 6 résoud la conjecture de Lang dans le cas particulier où

$$\mathbb{Q}(x_1 \ , \ x_2 \ , \ y_1 \ , \ y_2)$$

est une extension de $\mathbb{Q}$ de degré de transcendance inférieur ou égal à 1 .

Un autre corollaire intéressant du théorème 6 est la solution du problème 8 de SCHNEIDER ([7], [10]) : Si r est un nombre rationnel non nul, l'un des deux nombres $\exp e^r$, $\exp e^{2r}$ est transcendant. D'autre part, si α est un nombre algébrique différent de 0 et de 1 , l'un des deux nombres $\alpha^{(\operatorname{Log} \alpha)^r}$, $\alpha^{(\operatorname{Log} \alpha)^{2r}}$ est transcendant. De même, l'un des deux nombres $\exp \pi^r$, $\exp \pi^{2-r}$ est transcendant.

Citons une dernière conséquence du théorème 6 :

Soient a_1 , a_2 , b des nombres algébriques, tels que $\operatorname{Log} a_1$, $\operatorname{Log} a_2$ soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, et $b \notin \mathbb{Q}$. Alors deux au moins des quatre nombres

$$\operatorname{Log} a_1 , \operatorname{Log} a_2 , a_1^b , a_2^b$$

sont algébriquement indépendants.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALAOGLU (L.) and ERDÖS (P.). - On highly composite and similar numbers, Trans. Amer. math. Soc., t. 56, 1944, p. 448-469.

[2] FEL'DMAN (N. I.) and Šidlovskij (A. B.). - The development and present state of the theory of transcendental numbers, Russian math. Surv., t. 22, 1967, n° 3, p. 1-79.

[3] GEL'FOND (A. O.). - Transcendental and algebraic numbers. - New York, Dover Publications, 1960.

[4] LANG (Serge). - Nombres transcendants, Séminaire Bourbaki, 18e année, 1965/66, n° 305, 8 p.

[5] LANG (Serge). - Introduction to transcendental numbers. - Reading (Mass.), Addison-Wesley publishing Company, 1966 (Addison-Wesley Series in Mathematics).

[6] RAMACHANDRA (K.). - Contributions to the theory of transcendental numbers, I, II, Acta Arithm., Warszawa, t. 14, 1968, p. 65-88.

[7] SCHNEIDER (Theodor). - Einführung in die transzendenten Zahlen. - Berlin, Springer-Verlag, 1957 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften ..., 81).

[8] SIEGEL (Carl Ludwig). - Transcendental numbers. - Princeton, Princeton University Press, 1949 (Annals of Mathematics Studies, 16).

[9] ŠMELEV (A. A.). - On algebraic independence of some numbers [en russe], Mat. Zametki, t. 4, 1968, p. 525-532 (Math. Notes, t. 4, 1969, p. 805-809).

[10] WALDSCHMIDT (Michel). - Solutions d'un problème de Schneider sur les nombres transcendants, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, 1970, Série A, p. 697-700.

(Texte reçu le 18 janvier 1971)

Michel WALDSCHMIDT
UER de Mathématiques et Informatique
Université de Bordeaux 1
351 cours de la Libération
33 - TALENCE