

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MAURICE MIGNOTTE

Approximations diophantiennes et nombres transcendants

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 12 (1970-1971), exp. n° 22, p. 1-18

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1970-1971__12__A16_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES ET NOMBRES TRANSCENDANTS

par Maurice MIGNOTTE

I. Généralités

1. Le théorème de Dirichlet, approximation des nombres irrationnels.

Soit ζ un nombre irrationnel ; il existe une infinité de nombres rationnels $\frac{p}{q}$ tels que

$$|\zeta - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2} .$$

Démonstration. - Soit Q un entier ≥ 1 , considérons les $Q + 1$ nombres $n\zeta - [n\zeta] = \{n\zeta\}$ (avec $n = 0, 1, \dots, Q$) de l'intervalle $[0, 1]$. D'après le principe des tiroirs et le fait que ζ est irrationnel, il existe deux entiers m et n distincts tels que $|\{m\zeta\} - \{n\zeta\}| \leq \frac{1}{Q}$. D'où l'existence de p et q tels que $0 < q \leq Q$ et $|\zeta - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{qQ} \leq \frac{1}{q^2}$. Le fait que Q soit arbitraire montre qu'il y a une infinité de solutions $\frac{p}{q}$.

2. Le théorème de Liouville, approximation des nombres algébriques (1851).

Soit ξ un nombre algébrique de degré $n \geq 2$; il existe une constante $c = c(\xi) > 0$ telle que, pour tout rationnel $\frac{p}{q}$, on ait l'inégalité

$$|\xi - \frac{p}{q}| > \frac{c}{q^n} .$$

Démonstration. - Il suffit de faire la démonstration si ξ est entier. Soit f le polynôme unitaire irréductible de ξ ; on a alors

$$\frac{1}{q^n} \leq |f(\frac{p}{q})| = |\xi - \frac{p}{q}| |f'(\eta)| , \quad \eta \in]\xi, \frac{p}{q}[,$$

le théorème en découle immédiatement.

3. Nombres transcendants de Liouville.

Il est clair que le théorème de Liouville implique le résultat suivant :

Etant donné un nombre irrationnel ξ tel qu'il n'existe aucun couple (c, n) , avec $c > 0$, $n > 1$, tels que l'inégalité

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{c}{q^n}$$

soit satisfaite pour tout rationnel $\frac{p}{q}$, ξ est transcendant.

De tels nombres ξ sont appelés nombres de Liouville.

Exemple. - Le nombre

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$$

est un nombre de Liouville.

4. Le théorème de Thue-Siegel-Roth.

Si ξ est algébrique de degré $n > 1$, et $\frac{p}{q}$ un rationnel, l'inégalité

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < q^{-\mu}$$

n'a qu'un nombre fini de solutions $\frac{p}{q}$:

1° Si $\mu > \frac{s}{2} + 1$ (THUE, 1908),

2° Si $\mu > 2\sqrt{s}$ (SIEGEL, 1921),

3° Si $\mu > \sqrt{2s}$ (DYSON, 1947),

4° Si $\mu > 2$ (ROTH, 1955).

Conséquence. - Si ξ est un nombre irrationnel tel qu'il existe $\mu > 2$ pour lequel l'inégalité

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < q^{-\mu}$$

ait une infinité de solutions rationnelles $\frac{p}{q}$, ξ est transcendant.

Exemple. - Le nombre

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{3^k}}$$

est transcendant.

II. Le lemme de Roth

1. Notations.

Si $(x_1, \dots, x_m)$ est un certain m -uplet, on le notera x .

Soit $i = (i_1, \dots, i_m)$ un multi-indice, on posera

$$x^i = x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m}, \quad xi = x_1 i_1 + \dots + x_m i_m, \quad i! = i_1! \dots i_m!,$$

$$\binom{i}{j} = \binom{i_1}{j_1} \dots \binom{i_m}{j_m}, \quad \frac{x}{i} = \frac{x_1}{i_1} + \dots + \frac{x_m}{i_m}, \quad |i| = i_1 + \dots + i_m,$$

$$\frac{\partial |i|}{\partial x^i} = \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_m}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}}.$$

Si $\Delta = \frac{\partial |i|}{\partial x^i}$, $|i|$ sera appelé l'ordre de Δ .

La notation $i \leq r$ signifiera $i_k \leq r_k$, pour $k = 1, \dots, m$.

2. Wronskiens.

Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_h$ des opérateurs différentiels d'ordres respectivement majorés par $0, 1, \dots, h-1$. Soient $f_1, \dots, f_h$ des fonctions de $x = (x_1, \dots, x_m)$. On appelle wronskien généralisé, le déterminant

$$\det(\Delta_k f_\ell) = \begin{vmatrix} \Delta_1 & \dots & \Delta_h \\ f_1 & \dots & f_h \end{vmatrix} \quad (1 \leq k, \ell \leq h).$$

LEMME 1. - Soient $f_1, \dots, f_h$ des polynômes en m variables à coefficients rationnels linéairement indépendants. Alors il existe au moins un wronskien non nul.

Démonstration.

(a) Cas $m = 1$: Démonstration par récurrence sur h . Si $h = 1$, c'est évident. Si $h > 1$, on applique l'hypothèse de récurrence aux fonctions

$$F_\ell = \frac{d}{dx} \left(\frac{f_\ell}{f_h} \right), \quad \ell = 1, \dots, h-1.$$

L'indépendance des F_ℓ résulte de celle des f_i , il existe donc un wronskien non nul

$$\begin{vmatrix} D_1 & \dots & D_h \\ f_1 & \dots & f_h \end{vmatrix} = f_h^h \begin{vmatrix} D_1 & \dots & D_h \\ f_1^{-1} & \dots & 1 \end{vmatrix} = f_h^h \begin{vmatrix} D_1 & \dots & D_{h-1} \\ F_1 & \dots & F_{h-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

(b) Cas $m > 1$: Soient les fonctions de $x = (x_1, \dots, x_m)$ suivantes :

$$f_\ell(x) = \sum_{0 \leq i \leq r} f_i^{(\ell)} x^i, \quad \ell = 1, \dots, h.$$

Soient t une variable, et g un entier $> \max(r_k)$, posons

$$\varphi_\ell(t) = f_\ell(t, t^g, \dots, t^{g^{h-1}}) = \sum_{0 \leq i \leq r} f_i^{(\ell)} x_1^{i_1 + i_2 g + \dots + i_h g^{h-1}}.$$

Si les polynômes f_ℓ sont linéairement indépendants sur $\underline{\mathbb{Q}}$, il résulte de l'unicité de l'écriture d'un entier en base g que les φ_ℓ le sont aussi. Le résultat dans le cas $m = 1$ montre que

$$W(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{dt} & \dots & \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_h \end{pmatrix} \neq 0.$$

On voit facilement que $W(t)$ est une somme à coefficients polynômes en t de wronskiens relatifs aux f_i . $W(t)$ étant non nul, l'un des wronskiens relatifs aux f_i n'est pas nul.

3. Une identité.

Soit A un polynôme à coefficients entiers en $(x_1, \dots, x_m) = x$, on peut l'écrire sous la forme

$$A(x_1, \dots, x_m) = \sum_{v=1}^n P_v(x_1, \dots, x_{m-1}) Q_v(x_m), \quad n \leq r_m + 1.$$

Si n a été choisi minimum, les P_v (respectivement les Q_v) sont linéairement indépendants sur $\underline{\mathbb{Q}}$.

D'après le lemme 1, il existe deux wronskiens non nuls

$$U^*(x_1, \dots, x_{m-1}) = \begin{pmatrix} D_1^* & \dots & D_n^* \\ P_1 & \dots & P_n \end{pmatrix}, \quad V^{**}(x_m) = \begin{pmatrix} D_1^{**} & \dots & D_n^{**} \\ Q_1 & \dots & Q_n \end{pmatrix}.$$

Si on pose

$$D_{\mu\nu} = D_\mu^* D_\nu^{**}, \quad \Delta_{\mu\nu} = \frac{1}{j!} D_{\mu\nu} = \frac{1}{j!} \frac{\partial^{|j|}}{\partial x^j},$$

$$W^*(x) = \det(D_{\mu\nu} A), \quad W(x) = \det(\Delta_{\mu\nu} A), \quad A_j(x) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^{|j|}}{\partial x^j} A,$$

on a les résultats suivants :

Il existe $C \in \underline{\mathbb{Q}}^*$ tel que $CW^*(x) = W(x)$;

$W^*(x) = U^* V^{**}$;

A_j est à coefficients entiers, donc W aussi.

Le lemme de Gauss montre qu'il existe deux polynômes U et V à coefficients entiers, tels que $W = UV$.

4. Majorations pour U, V, W.

Si $A(x) = \sum_{0 \leq i \leq r} a_i x^i$, on pose $|\overline{A}| = \max_i |a_i|$. Soit $B(x) = \sum_{0 \leq i \leq r} b_i x^i$, la notation $A \ll B$ signifie $a_i \leq b_i$ pour tout i .

Il est facile de montrer que

$$A_j(x) \ll |\overline{A}| \binom{r}{j} (1+x_1)^{r_1-j_1} \dots (1+x_m)^{r_m-j_m} \ll 2^{|r|} |\overline{A}| \prod_{k=1}^m (1+x_k)^{r_k}.$$

On en déduit l'inégalité

$$\max(|\overline{U}|, |\overline{V}|, |\overline{W}|) \leq 2^{2n|r|} n! |\overline{A}|^n.$$

5. L'indice d'un polynôme.

Soit m un entier ≥ 1 , et soient

$$K_k = \frac{P_k}{Q_k}, \quad (P_k, Q_k) = 1, \quad i = 1, \dots, m$$

m nombres rationnels. Posons $H_k = \max(|P_k|, |Q_k|)$. Soit $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)$ un m -uplet de réels positifs arbitraires. On définit l'indice d'un polynôme

$$J(A) = J(A; \rho; K) = \text{plus petite valeur de } \frac{j}{\rho} \text{ telle que } A_j(K) \neq 0.$$

La formule de Taylor

$$A(K_1 + t^{1/\rho_1} x_1, \dots, K_m + t^{1/\rho_m} x_m) = \sum_{0 \leq j \leq r} A_j(K) t^{j/\rho} x^j$$

montre que $J(A)$ est la plus petite valeur de l'exposant de t qui a un facteur non nul dans ce développement. On en déduit les propriétés suivantes de l'indice :

- (1) $J(A) \geq 0$ et $(J(A) = \infty) \iff (A = 0)$;
- (2) $J(A \pm B) \geq \min(J(A), J(B))$;
- (3) $J(AB) = J(A) + J(B)$;
- (4) $J(A_j) \geq \max(0, J(A) - \frac{j}{\rho})$.

6. La borne supérieure $\Theta_m(\alpha; H; r)$.

Soient $a, r_1, \dots, r_m, H_1, \dots, H_m$ des entiers > 0 . On désigne par $\Theta_m = \Theta_m(a; r; H)$ la borne supérieure des $J(a; r; K)$, où les A vérifient $0 < |\overline{A}| \leq a$, et les $K_k = \frac{P_k}{Q_k}$ vérifient $\max(|P_k|, |Q_k|) \leq H_k$. Il n'y a qu'un nombre fini de tels A et K , donc cette borne est atteinte. De plus, $0 \leq \Theta_m \leq m$.

7. Une borne supérieure de $\Theta_1(\alpha; r; H)$.

$$(J(A; r; K) = \frac{j}{r}) \iff ((x - K)^j \text{ divise } A)$$

$$\iff (A(x) = (Qx - P)^j B(x), \text{ } B \text{ à coefficients entiers (lemme de Gauss)})$$

$$\implies (H^j \leq |\overline{A}| \leq a) \implies \left(\frac{j}{r} \leq \frac{\log a}{r \log H} \text{ (on suppose } H \geq 2)\right).$$

D'où l'inégalité

$$\Theta_1(a; r; H) \leq \frac{\log a}{r \log H}, \quad \text{si } H \geq 2.$$

8. La propriété Γ_M .

Soit t une constante telle que $0 < t \leq 1$. Soit $b \geq 1$ un réel. Soient $s_1, \dots, s_M, K_1, \dots, K_M$ des entiers positifs. On dit que le système ordonné $(b, s_1, \dots, s_M, K_1, \dots, K_M)$ possède la propriété Γ_M , si :

Ou bien $M = 1, K_1 \geq 2, b \leq K_1^{s_1 t}$;

$$\text{Ou bien } \begin{cases} M \geq 2, \max\left(\frac{s_2}{s_1}, \dots, \frac{s_M}{s_{M-1}}\right) \leq t \text{ (donc } s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_M), \\ s_h \log K_h \geq s_1 \log K_1 \text{ (} h = 1, \dots, M), \\ K_1 \geq 2^{\frac{(1/t)(M-1)M(2M+1)}{(1/M)(s_1 t)}}, \\ b \leq K_1. \end{cases}$$

Soit $(a, r_1, \dots, r_m, H_1, \dots, H_m)$ ayant la propriété Γ_m .

Soit n un entier tel que $1 \leq n \leq r_m + 1$, posons

$$b = 2^{\frac{2n(r_1 + \dots + r_m)}{n! a^n}}, \quad \rho_1 = nr_1, \dots, \rho_{m-1} = nr_{m-1}.$$

On vérifie sans peine que $(b, \rho_1, \dots, \rho_{m-1}, H_1, \dots, H_{m-1})$ a la propriété Γ_{m-1} .

9. Une inégalité de récurrence pour Θ_m .

D'après ce qu'on a vu, si $A = \sum_{0 \leq i \leq r} a_i x^i$ vérifie $0 < |\overline{A}| \leq a$, et si K vérifie $\max(|P_K|, |Q_K|) \leq H_K$, on a $\Theta_m = J(A; r; K)$ pour A convenable. De plus, on peut associer à A un polynôme non nul W , tel que $W = UV$, U et V à coefficients entiers, $\max(|U|, |V|, |W|) \leq b$, et degré en x_K de $W \leq nr_K$ pour un certain n vérifiant $1 \leq n \leq r_m + 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
J(U ; \rho ; K) &\leq \Theta_{m-1}(b ; \rho ; H) , \\
J(V ; \rho_m ; K_m) &\leq \Theta_1(b ; \rho_m ; H_m) , \\
J(W ; \rho ; K) = J(U) + J(V) &\leq \Theta_{m-1}(b ; \rho ; H) + \Theta_1(b ; \rho_m ; H_m) .
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$J(W ; \rho ; K) = \frac{1}{n} J(W ; r ; K) .$$

En définitive,

$$J(W ; r ; K) \leq n \Phi_m , \quad \text{avec} \quad \Phi_m = \Theta_{m-1}(b ; \rho ; H) + \Theta_m(b ; \rho_m ; H_m) .$$

En développant W , il vient

$$W(x) = \sum \pm \Delta_{\mu_1, 1} A \dots \Delta_{\mu_n, n} A .$$

D'après (4), on a l'inégalité

$$\begin{aligned}
J(\Delta_{\mu\nu} A) &\geq \max\left(0, J(A) - \sum_{h=1}^{m-1} \frac{j_{\mu h}}{r_h} - \frac{j_{\nu m}}{r_m}\right) \geq \max\left(0, J(A) - \frac{1}{r_{m-1}} \sum_{h=1}^{m-1} j_{\mu h} - \frac{j_{\nu m}}{r_m}\right) \\
&\geq \max\left(0, J(A) - \frac{\mu-1}{r_{m-1}} - \frac{\nu-1}{r_n}\right) \geq \max\left(0, J(A) - t - \frac{\nu-1}{r_m}\right) .
\end{aligned}$$

En appliquant les propriétés (2) et (3) de l'indice, on obtient

$$J(W) \geq \sum_{\nu=1}^n \max\left(0, J(A) - t - \frac{\nu-1}{r_m}\right) .$$

Soit $N = [(J(A) - t)r_m] + 1$, on distingue les cas :

$n \leq N$, qui conduit à $J(A) \leq t + \frac{2}{n} J(W)$;

$n > N$, qui conduit à $J(A) \leq t + \sqrt{\frac{2}{r_m} J(W)} \leq t + 2\sqrt{\frac{J(W)}{n}}$ (car $n \leq r_m + 1$).

D'où, finalement,

$$\Theta_m = J(A) \leq t + 2 \max(\Phi_m, \sqrt{\Phi_m}) \leq t + 2 \max(\Theta_{m-1} + \Theta_1, \sqrt{\Theta_{m-1} + \Theta_1}) .$$

D'après la propriété Γ_m , on a $\Theta_1 \leq t$, d'où

$$\Theta_m(a ; r ; H) \leq t + 2 \max(\Psi_m, \sqrt{\Psi_m}) , \quad \text{où} \quad \Psi_m = t + \Theta_{m-1}(b ; \rho ; H) .$$

10. Le lemme de Roth.

L'inégalité précédente permet facilement de démontrer le résultat suivant :

LEMME 2. - Soit $0 < t \leq 1$. Soit a un réel ≥ 1 . Soient $r_1, \dots, r_m, H_1, \dots, H_m$, des entiers positifs, $m \geq 2$, tels que

$$r_{h+1} \leq r_h t, \quad r_h \log H_h \geq r_1 \log H_1, \\ H_1 \geq 2^{(1/t)(m-1)m(2m+1)}, \quad a \leq H_1^{(1/m)(r_1 t)}.$$

Soient $K_h = \frac{P_h}{Q_h}$ des rationnels tels que $\max(|P_h|, |Q_h|) = H_h$. Soit un polynôme $A(x) = \sum_{0 \leq i \leq r} a_i x^i$, $|\overline{A}| \leq a$; alors

$$J(A; r; K) \leq 2^{m+1} t^{2^{-(m-1)}}.$$

Remarque. - Si on suppose r_m grand, et si on pose $t = \alpha^{m2^{m-1}}$, on peut montrer que $J(A; r; K) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, pourvu que $\alpha < 2^{-2/3}$.

III. Le polynôme d'approximation $A(x)$

1. Les puissances d'un nombre algébrique.

LEMME 3. - Soit $F = F_0 x^f + F_1 x^{f-1} + \dots + F_f$ un polynôme à coefficients entiers, de racines $\xi_1, \dots, \xi_f$ distinctes. Pour tout entier $\ell \geq 0$, il existe des entiers $g_0^{(\ell)}, \dots, g_{f-1}^{(\ell)}$, de valeur absolue $\leq (2|\overline{F}|)^\ell$, tels que

$$F_0^\ell \xi_\psi^\ell = g_0^{(\ell)} + g_1^{(\ell)} \xi_\psi + \dots + g_{f-1}^{(\ell)} \xi_\psi^{f-1} \quad (\psi = 1, 2, \dots, f).$$

Démonstration. - Très facile, par récurrence sur ℓ .

2. Un résultat combinatoire.

LEMME 4. - Soient $r_1, \dots, r_m$ des entiers > 0 . Soient $\alpha, s, \rho_1, \dots, \rho_m$ des réels positifs, avec $\alpha < 6$. Il existe $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$, tel que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, et que les conditions

$$r_i > \varepsilon^{-1}, \quad \left| \frac{r_i}{\rho_i} - 1 \right| < \varepsilon \quad (i = 1, \dots, m) \quad \text{et} \quad s < \varepsilon$$

impliquent le résultat qui suit :

Le nombre N de solutions entières $i = (i_1, \dots, i_m)$ des inégalités

$$0 \leq i \leq r = (r_1, \dots, r_m), \quad \frac{i}{\rho} \leq \left(\frac{1}{2} - s \right) \frac{r}{\rho} \quad (\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m))$$

est majoré par

$$(r_1 + 1) \dots (r_m + 1) \exp(-\alpha m s^2).$$

Démonstration. - Soit u une variable ≥ 0 . On pose

$$F_h(u) = \sum_{i_h=0}^{r_h} \exp\left[u\left(\frac{i_h}{\rho_h} - \frac{r_h}{2\rho_h}\right)\right], \quad h = 1, \dots, m,$$

$$F(u) = \prod_{h=1}^m F_h(u) = \sum_{0 \leq i \leq r} \exp\left[u\left(\frac{i}{\rho} - \frac{r}{2\rho}\right)\right].$$

On remarque que

$$F_h(u) = \frac{\text{sh}(r_h + 1)(u/2\rho_h)}{\text{sh}(u/2\rho_h)} \leq (r_h + 1) \frac{\text{sh } t}{t}, \quad \text{avec } t = (r_h + 1) \frac{u}{2\rho_h}.$$

En calculant les dérivées successives de la fonction $\log \frac{\text{sh } t}{t}$, et en lui appliquant la formule de Taylor, on montre l'existence d'une constante c telle que

$$\frac{\text{sh } t}{t} \leq \exp\left[\frac{t^2}{6} + ct^4\right], \quad \text{pour tout } t.$$

Il en résulte que

$$F(u) \leq (r_1 + 1) \dots (r_m + 1) \exp\left[\frac{u^2}{24} \sum_{h=1}^m \left(\frac{r_h + 1}{\rho_h}\right)^2 + c \sum_{h=1}^m \left(\frac{r_h + 1}{2\rho_h}\right) u^4\right].$$

En transformant i en $r - i$, on constate que N est égal au nombre de solutions des inégalités

$$0 \leq i \leq r, \quad \frac{i}{\rho} \geq \left(\frac{1}{2} + s\right) \frac{r}{\rho}.$$

Si cette dernière égalité est vérifiée, alors

$$\exp\left[u\left(\frac{i}{\rho} - \frac{r}{2\rho}\right)\right] \geq \exp\left(su \frac{r}{\rho}\right).$$

Ainsi,

$$F(u) \geq N \exp\left(su \frac{r}{\rho}\right).$$

Finalement, on obtient

$$N \leq (r_1 + 1) \dots (r_m + 1) \exp\left(-m \text{ suc}_1 + \frac{u^2}{24} c_2 m + cmu^4 c_4\right),$$

avec

$$c_1 = \frac{1}{m} \sum_{h=1}^m \frac{r_h}{\rho_h}, \quad c_2 = \frac{1}{m} \sum_{h=1}^m \frac{(r_h + 1)^2}{\rho_h^2}, \quad c_4 = \frac{1}{m} \sum_{h=1}^m \left(\frac{r_h + 1}{\rho_h}\right)^4.$$

On choisit $u = 12 \frac{c_1}{c_2} s$, ainsi

$$N \leq (r_1 + 1) \dots (r_m + 1) \exp\left[-m\left(\frac{6c_1^2}{c_2} s^2 - 144c \frac{c_1^4}{c_2^4} c_4 s^4\right)\right] .$$

Si ε est assez petit, alors

$$N \leq (r_1 + 1) \dots (r_m + 1) \exp(-\alpha m s^2) .$$

3. La construction de A .

LEMME 5. - On suppose vérifiées les conditions du lemme 4. Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_m, \tau_1, \dots, \tau_m$, des réels positifs, tels que

$$|r_h \sigma_h^{-1} - 1| < \varepsilon, \quad |r_h \tau_h^{-1} - 1| < \varepsilon, \quad h = 1, \dots, m .$$

On suppose, de plus, $\alpha m s^2 > \log(f + 2)$. Il existe alors une constante c ne dépendant que de F et de α , telle qu'il existe un polynôme $A(x) = \sum_{0 \leq i \leq r} a_i x^i$ non nul et qui possède les propriétés suivantes :

- 1° $|\bar{A}| \leq c^{|r|}$;
- 2° $\frac{i}{\rho} \leq \left(\frac{1}{2} - s\right) \frac{r}{\rho}$ ou $\frac{i}{\sigma} \geq \left(\frac{1}{2} + s\right) \frac{r}{\sigma} \Rightarrow a_i = 0$;
- 3° $F(t)$ divise $A_j(t, \dots, t)$ pour les j tels que

$$0 \leq j \leq r \quad \text{et} \quad \frac{j}{\tau} \leq \left(\frac{1}{2} - s\right) \frac{r}{\tau} ;$$

$$4^\circ A_j(x) \ll c^{|r|} (1 + x_1)^{r_1} \dots (1 + x_m)^{r_m}, \quad A_j(t, \dots, t) \ll c^{|r|} (1 + t)^{|r|} .$$

Démonstration. - Soient $\alpha < \alpha' < 6$ tel que $\alpha' m s^2 > \log(f + 2)$, et a un entier > 0 qui sera fixé ultérieurement.

Considérons l'ensemble des polynômes du type

$$B(x) = \sum_{0 \leq i \leq r} b_i x^i, \quad |\bar{B}| \leq a, \quad b_i \text{ entiers } \geq 0 ,$$

et

$$b_i = 0, \quad \text{si} \quad \frac{i}{\rho} \leq \left(\frac{1}{2} - s\right) \frac{r}{\rho} \quad \text{ou} \quad \frac{i}{\sigma} \geq \left(\frac{1}{2} + s\right) \frac{r}{\sigma} .$$

D'après le lemme 4, ces conditions exigent l'annulation d'au plus

$$2(r_1 + 1) \dots (r_m + 1) \leq \frac{2}{f + 2} (r_1 + 1) \dots (r_m + 1)$$

coefficients. Il y a donc au moins

$$N = (a + 1)^{(f/(f+2))(r_1+1)\dots(r_m+1)}$$

polynômes B . On voit facilement que

$$B_j(t, \dots, t) \ll a 2^{2|r|} (1 + x + \dots + x^{|r|}) .$$

D'après le lemme 3, on a une égalité du type

$$F_0^{|r|} B_j(\xi_\psi, \dots, \xi_\psi) = \sum_{\alpha=0}^{f-1} B_\varphi^{(j)} \xi_\psi^\alpha \quad (\psi = 1, \dots, f) ,$$

avec

$$B_\varphi^{(j)} \text{ entier} \quad \text{et} \quad |B_\varphi^{(j)}| \leq 2a(8|\overline{F}|)^{|r|} .$$

Soit j vérifiant

$$0 \leq j \leq r \quad \text{et} \quad \frac{j}{r} \leq \left(\frac{1}{2} - s\right) \frac{r}{r} .$$

D'après le lemme 4, il y a au plus $\left(\frac{1}{f+2}\right)^{\alpha'/\alpha} (r_1 + 1) \dots (r_m + 1)$ j possibles (on applique le lemme avec α'). Il y a donc au plus

$$M^* = (4a(8|\overline{F}|)^{|r|})^{f(1/(f+2))^{\alpha'/\alpha}(r_1+1)\dots(r_m+1)}$$

valeurs de $B_j(\xi_\psi, \dots, \xi_\psi)$ possibles. Il suffit de choisir $a = (4(8F)^{|r|})^k$, $k = k(\alpha)$ étant un entier assez grand pour que $M > M^*$; autrement dit, il existe deux polynômes B_1 et B_2 distincts, tels que

$$B_1(\xi_\psi, \dots, \xi_\psi) = B_2(\xi_\psi, \dots, \xi_\psi) .$$

Il est alors clair que $A = B_1 - B_2$ convient.

IV. Un théorème d'approximation

Le résultat suivant généralise un théorème de MAHLER ([1], p. 170) :

THÉOREME 1. - Soit ξ un nombre algébrique réel non nul de degré f . Soient g' et g'' deux entiers ≥ 2 premiers entre eux; soient λ, μ des réels avec $0 \leq \lambda \leq 1$ et $0 \leq \mu \leq 1$, $\lambda + \mu > 0$. Soient c_1, c_2, c_3 trois constantes positives. On pose

$$\varepsilon(H) = \frac{4}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\log(f+2) \log 2} (\log \log \log H)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha \text{ réel}, \quad 0 < \alpha < 6 .$$

On suppose qu'il existe une suite Σ infinie de nombres rationnels distincts

$$K^{(h)} = \frac{P^{(h)}}{Q^{(h)}}, \quad \text{où } (P^{(h)}, Q^{(h)}) = 1, \quad H^{(h)} = \max(P^{(h)}, Q^{(h)}) > \exp e ,$$

qui vérifient

$$(*) \quad |K^{(h)} - \varepsilon| \leq c_1 (H^{(h)})^{-(\lambda + \mu + \varepsilon(H^{(h)}))} ,$$

et

$$|P^{(h)}|_{g'} \leq c_2 (H^{(h)})^{\lambda-1} , \quad |Q^{(h)}|_{g''} \leq c_3 (H^{(h)})^{\mu-1} .$$

Alors, si ρ est un réel, et $1 < \rho < 2^{(6-\alpha)/\alpha}$, on a

$$\limsup \frac{\log H^{(h+1)}}{(\log H^{(h)})^\rho} = \infty .$$

Démonstration. - On va supposer que cette assertion est fausse ; il est facile de voir que l'on peut se limiter à supposer que cette limite supérieure est < 1 . Posons, pour simplifier (!), $a = \sqrt{\frac{\log(f+2) \log 2}{\alpha}}$. Soit m un entier positif très grand. Soit $\eta > 0$ assez petit, on pose

$$s = \frac{1}{1-\eta} \sqrt{\frac{\log(f+2)}{6m}} , \quad t = \exp[-m2^{m-1}] , \quad X_1 = X = \exp\left[\frac{2}{t} m^3\right] .$$

Par hypothèse, Σ est infinie, donc $\lim_{h \rightarrow \infty} H^{(h)} = \infty$. Il est donc possible de choisir m éléments

$$K_h = K^{(i_h)} = \frac{p_h}{q_h} ,$$

de poids H_h , et qui vérifient

$$X_h \leq H_h \leq \exp[(\log X_h)^\rho] , \quad \text{avec } X_{h+1} = H_h^{2/t} , \quad h = 1, \dots, m-1 .$$

On a alors

$$\log X_2 \leq \frac{2}{t} (\log X_1)^\rho , \quad \log X_3 \leq \frac{2}{t} (\log X_2)^\rho , \quad \dots .$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \log X_m &\leq \left(\frac{2}{t}\right)^{1+\rho+\dots+\rho^{m-2}} (\log X_1)^{\rho^{m-1}} \leq \left(\frac{2}{t}\right)^{m\rho^{m-2}} (\log X_1)^{\rho^{m-1}} \\ &\leq \left(\frac{2}{t}\right)^{m\rho^{m-2}} \left(\frac{2}{t}\right)^{3\rho^{m-1}} \leq \left(\frac{2}{t}\right)^{2m^3\rho^{m-1}} \leq (2e)^{2m^4(2\rho)^{m-1}} . \end{aligned}$$

Soit $\rho < \rho' < 2^{(6-\alpha)/\alpha}$; alors, si m est assez grand,

$$\log X_m \leq \exp[\exp[m \log(2\rho')]] .$$

D'où l'on tire

$$\sigma = \sum_{h=1}^m \varepsilon(H_h) > m\varepsilon(H_m) \geq \sqrt{m} \frac{1}{\log(2\rho')} > 4(1+\eta')s ,$$

pour un certain $\eta' > 0$ assez petit. On choisit r_1 très grand. On choisit ensuite $m - 1$ entiers positifs $r_2, \dots, r_m$ tels que

$$(r_h - 1) \log H_h < r_1 \log H_1 \leq r_h \log H_h \quad (h = 2, 3, \dots, m),$$

de sorte que

$$\theta = \max_h \frac{1}{r_h - 1} \leq \frac{1}{m}.$$

Ces conditions entraînent

$$r_{h-1} > \frac{1}{t} r_h \quad (h = 2, \dots, m).$$

On peut appliquer le lemme 5, où $F(x)$ désigne le polynôme minimal de ξ , et où on pose

$$\rho_h = \sigma_h = r_h \quad \text{et} \quad \tau_h = \frac{(\lambda + \mu)r_h}{\lambda + \mu + \varepsilon(H_h)}.$$

Les conditions sont vérifiées, pourvu que m et r_1 soient assez grands. D'où l'existence d'un polynôme A vérifiant les conditions de ce lemme.

On peut aussi appliquer le lemme de Roth, pourvu que

$$H_1 \geq 2^{(1/t)n(m-1)(2m+1)} \quad \text{et} \quad c^{mr_1} \leq H_1^{(1/m)r_1 t}, \quad \text{soit} \quad H_1 \geq c^{(1/t)m^2}.$$

Tout ceci est vérifié si m est assez grand, car

$$H_1 \geq X = \exp\left[\frac{2}{t} m^3\right].$$

Il en résulte que l'indice Λ de A au point $K = (K_1, \dots, K_m)$ est ≤ 1 . Il existe donc ℓ tel que $A_\ell(K) \neq 0$ et $\Lambda = \frac{\ell}{r}$.

- Une borne supérieure de $A_{(\ell)}$. - Soit J^* l'ensemble des j tels que

$$\ell \leq j \leq r \quad \text{et} \quad \frac{j}{\tau} > \left(\frac{1}{2} - s\right) \frac{r}{\tau}.$$

Alors

$$A_{(\ell)} = \sum_{j \in J^*} A_j(\xi, \dots, \xi) \binom{j}{\ell} (K - \xi)^{j-\ell},$$

et

$$\sum_{0 \leq j \leq r} |A_j(\xi, \dots, \xi)| \binom{j}{\ell} \leq c_5^{|r|}.$$

On a défini τ_h par l'égalité

$$\frac{r_h}{\tau_h} = 1 + \frac{\varepsilon(H_h)}{\lambda + \mu}.$$

D'après le choix de H_h et de r_h , on a

$$\begin{aligned} \max_{j \in J^*} |K - \xi|^{j-\ell} &\leq c_1 |r| \max_{j \in J^*} \prod_{h=1}^m H_h^{-(j_h - \ell_h)[\lambda + \mu + \varepsilon(H_h)]} \\ &\leq c_1 |r| \max_{j \in J^*} H_1^{-(\lambda + \mu)r_1((j-\ell)/\tau)} \\ &\leq c_1^{mr_1} H_1^{-(\lambda + \mu)r_1[(\frac{1}{2}-s)r/\tau - \ell/\tau]} . \end{aligned}$$

Or $\frac{r}{\tau} = m + \frac{\sigma}{\lambda + \mu}$ et $\tau_h \geq (1 - \varepsilon)r_h \geq \frac{1}{2} r_h$. Donc $\frac{\ell}{\tau} \leq 2 \frac{\ell}{r} = 2\Lambda \leq 2$. Finalement, il vient

$$A_{(\ell)} \leq (c_1 c_5)^{mr_1} H_1^{-(\lambda + \mu)r_1[(\frac{1}{2}-s)(m + (\sigma/(\lambda + \mu))) - 2]} .$$

On écrit $A_{(\ell)} = \frac{N_{(\ell)}}{D_{(\ell)}}$, avec $(N_{(\ell)}, D_{(\ell)}) = 1$. On va majorer $D_{(\ell)}$, et minimiser $N_{(\ell)}$, afin de trouver une borne inférieure de $A_{(\ell)}$.

- Une majoration de $D_{(\ell)}$. - On a

$$\frac{N_{(\ell)}}{D_{(\ell)}} = \sum_{0 \leq i \leq r} a_i(i) \left(\frac{P}{Q}\right)^{i-\ell} = \sum_{i \in I} a_i(i) \left(\frac{P}{Q}\right)^{i-\ell} ,$$

où I désigne l'ensemble $\{i \mid 0 \leq i - \ell \leq r - \ell \text{ et } S_1 < \frac{i - \ell}{r} < S_2\}$, avec $S_1 = (\frac{1}{2} - s)m - \Lambda$ et $S_2 = (\frac{1}{2} - s)m + \Lambda$. Ainsi,

$$|D_{\ell}| \leq \text{p. p. c. m. } (Q^{i-\ell})_{i \in I} = D \quad (\text{disons}) .$$

Or,

$$|Q_h|_{g''} \leq c_4 H_h^{1-\mu} , \quad h = 1, \dots, m .$$

On peut donc écrire Q_h sous la forme $Q_h^* Q_h^{**}$, où Q_h est une puissance de g'' qui vérifie

$$\frac{1}{c_4 g''} H_h^{1-\mu} \leq |Q_h^*| < \frac{1}{c_4} H_h^{1-\mu} \leq c_{10} H_h^{1-\mu} , \quad \text{où } c_{10} \geq 1 ,$$

et

$$|Q_h^{**}| \leq c_4 g''^{\mu} H_h^{\mu} .$$

Il est clair que $D \leq D^* D^{**}$, avec

$$D^* = \text{p. p. c. m. } (Q^{*i-\ell})_{i \in I} , \quad D^{**} = \text{p. p. c. m. } (Q^{**i-\ell})_{i \in I} .$$

En particulier,

$$D^* = \max_{i \in I} Q^* \leq c_5^{|r|} \max_{i \in I} (H^{i-\ell})^{1-\mu}$$

$$\leq c_5^{|r|} \max_{H_1} \frac{(1-\mu)(1+\theta)r_1((i-\ell)/r)}{H_1} \leq c_5^{mr_1} \frac{(1-\mu)(1+\theta)S_2 r_1}{H_1},$$

et

$$D^{**} \leq c_6^{mr_1} H_1^{\mu(r-\ell)} \leq H_1^{\mu(1+\theta)S_3 r_1}, \quad \text{avec } S_3 = m - \Lambda,$$

d'où

$$|D_{(\ell)}| \leq c_7^{mr_1} \frac{(1-\mu)(1+\theta)r_1[(\frac{1}{2}+s)m-\Lambda]+\mu(1+\theta)r_1(m-\Lambda)}{H_1}.$$

- Une borne inférieure pour $N_{(\ell)}$. - Le même type de raisonnement que plus haut conduit à

$$|N_{(\ell)}| \geq c_8^{-mr_1} \frac{(1-\lambda)S_1 r_1}{H_1} \geq c_8^{-mr_1} \frac{(1-\lambda)r_1[(\frac{1}{2}-s)m-\Lambda]}{H_1}.$$

- Conclusion. - Il résulte de ces inégalités que

$$|A_{(\ell)}| \geq c_9^{-mr_1} \frac{E^* r_1}{H_1},$$

avec

$$E^* = (1-\lambda)[(\frac{1}{2}-s)m-\Lambda] - (1-\mu)(1+\theta)[(\frac{1}{2}+s)m-\Lambda] - \mu(1-\theta)(m-\Lambda).$$

En comparant ceci avec la majoration précédente de $|A_{(\ell)}|$, il vient

$$H_1^E \leq c_{10}^m,$$

avec

$$E = (\lambda + \mu)[(\frac{1}{2}-s)(m + \frac{\sigma}{\lambda + \mu}) - 2\Lambda] + E^*$$

$$= (\frac{1}{2}-s)\sigma - [2 + \theta(1-\mu)]ms - (\frac{1+\mu}{2})\theta m - (\lambda + 2\mu - \theta)\Lambda.$$

Les inégalités connues sur tous ces paramètres conduisent à

$$E > \frac{\eta'}{2} \sqrt{m} - c_{20}.$$

On en déduit

$$H_1 \leq c_{30}^{\sqrt{m}},$$

ce qui contredit $H_1 \geq \exp[\frac{2}{t} m^3]$, si m est assez grand. Ceci achève la démonstration.

V. Applications

THÉOREME 2. - Soient p un nombre premier, q un entier tel que

$$p > q \geq 2 .$$

Soit $\Sigma = (n^{(1)}, n^{(2)}, \dots)$ une suite strictement croissante d'entiers > 0 tels que

$$\left| \left(\frac{p}{q} \right)^n - g_n \right| \leq \exp \left(- \frac{\theta_n \log p}{\sqrt{\log \log n}} \right), \quad \text{si } n \in \Sigma, \quad g_n \text{ entier},$$

avec $\theta = \frac{4}{\sqrt{a}} \sqrt{\log 3 \log 2}$ et $0 < a < 6$. Alors

$$\limsup \frac{n^{(h+1)}}{(n^{(h)})^\rho} = \infty, \quad \text{si } 1 < \rho < 2^{6/a-1} .$$

Démonstration. - Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $P_n = \frac{p^n}{d_n}$, $Q_n = \frac{g_n}{d_n} q^n$, où

$$d_n = (p^n, g_n q^n) = (p^n, g_n) .$$

d_n et P_n sont des puissances de p , q^n divise Q_n , et donc

$$n \leq \frac{\log Q_n}{\log q},$$

et il est clair que

$$\lim \frac{P_n}{Q_n} = 1 .$$

Il existe trois constantes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ telles que

$$0 < Q_n \leq \gamma_1 P_n \leq \gamma_1 p^n, \quad \text{et donc} \quad n \geq \frac{\log Q_n - \log \gamma_1}{\log p},$$

$$|Q_n|_q \leq q^{-n} \leq \gamma_2 Q_n^{\mu-1},$$

$$0 < g_n^{-1} \leq \gamma_3 Q_n^{-\mu}, \quad \text{avec } \mu = \frac{\log(p/q)}{\log p} .$$

Pour tout $\eta > 0$,

$$\frac{n \log p}{\sqrt{\log \log n}} \geq (1 - \eta) \frac{\log Q_n}{\sqrt{\log \log \log Q_n}}$$

et l'inégalité

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} - 1 \right| = g_n^{-1} \left| \left(\frac{p}{q} \right)^n - g_n \right| \leq \gamma_3 Q_n^{-\mu-M},$$

$$\text{avec } M = \frac{4(1-\eta)}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\log 3 \log 2} (\log \log \log Q_n)^{-\frac{1}{2}}$$

ont lieu si n est assez grand. On peut appliquer le théorème 1 avec

$$\xi = 1, \quad f = 1, \quad \lambda = 0, \quad \mu = \frac{\log(p/q)}{\log q}, \quad g' = p, \quad g'' = q, \quad K^{(h)} = \frac{P_n^{(h)}}{Q_n^{(h)}},$$

d'où le fait que

$$\limsup \frac{\log Q_n^{(h+1)}}{(\log Q_n^{(h)})^\rho} = \infty.$$

Le théorème résulte alors des inégalités

$$\frac{\log Q_n - \log \gamma_1}{\log p} \leq n \leq \frac{\log Q_n}{\log q}.$$

THÉORÈME 3. - Soit $g \geq 2$ un entier fixé. Soit (θ_n) une suite de réels de l'intervalle $]0, 1[$. Soit ω_n une suite de réels > 0 qui tendent vers l'infini. Soit (v_n) une suite d'entiers qui vérifient

$$v_1 \geq 3, \dots, v_{n+1} \geq v_n \left(1 + \frac{\omega_n}{\sqrt{\log \log v_n}} \right), \dots$$

Soit a_n une suite infinie d'entiers > 0 premiers à g qui vérifient

$$a_{n+1} \leq g^{\theta_n(v_{n+1}-v_n)}.$$

Si on suppose que la suite $(1 - \theta_n)\omega_n$ tend vers l'infini, et qu'il existe $\rho > 1$ tel que $(1 - \theta_n)v_n^\rho$ tende vers l'infini, alors le nombre

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g^{-v_n}$$

est transcendant.

Démonstration. - Posons

$$P_N = g^{v_N} \sum_{n=1}^N a_n g^{-v_n}, \quad Q_N = g^{v_N}, \quad R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n g^{-v_n},$$

de sorte que

$$\xi - \frac{P_N}{Q_N} = R_N > 0.$$

On voit facilement que $(P_N, Q_N) = 1$.

De plus,

$$0 < R_N < a_{N+1} g^{-v_{N+1}} + \sum_{m=v_{N+1}}^{\infty} g^{-m} \leq 3a_{N+1} g^{-v_{N+1}},$$

donc

$$0 < R_N \leq 3Q_N^{-1 - [((1-\theta_N)\omega_N)/(\sqrt{\log \log \log Q_N / (\log g)})]} \\ \leq Q_N^{-1 - \frac{1}{2}(1-\theta_N)\omega_N(\log \log \log Q_N)^{-\frac{1}{2}}},$$

si N est assez grand.

Supposons ξ algébrique de degré f . Appliquons le théorème avec $\rho' = \rho + 1$, ce qui est légitime car $(1 - \theta_n)\omega_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, on obtient

$$\limsup \frac{\log Q_{N+1}}{(\log Q_N)^{\rho'}} = \infty, \quad \text{ce qui équivaut à} \quad \limsup \frac{v_{N+1}}{v_N^{\rho'}} = \infty.$$

Il en résulte que, pour tout a fixé,

$$(1 - \theta_N)v_{N+1} \geq (1 - \theta_N)v_N^{\rho+1} \geq av_N,$$

pour une infinité de valeurs de N . Ainsi,

$$0 < R_N < cQ_N^{-(f+1)},$$

pour une infinité de N . Ceci contredit le théorème de Liouville, donc ξ est transcendant.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] MAHLER (Kurt). - Lectures on diophantine approximations. Part 1. - Ann Arbor, University of Notre Dame, 1961.

(Texte reçu le 3 mai 1971)

Maurice MIGNOTTE
158 boulevard Galliéni
92 - VILLENEUVE-LA-GARENNE