

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

FRANÇOISE BERTRANDIAS

Γ -extensions et invariants cyclotomiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 12 (1970-1971), exp. n° 21, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1970-1971__12__A15_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Γ -EXTENSIONS ET INVARIANTS CYCLOTOMIQUES

par Françoise BERTRANDIAS

Les résultats exposés ici ont été obtenus en collaboration avec Jean-Jacques PAYAN.

1. Groupes θ_K et ψ_K .

Suivant IWASAWA [3], on appelle Γ -extension d'un corps K une extension de K définie comme réunion croissante d'une famille d'extensions cycliques de degré p^n de K ($n = 1, 2, \dots$) ; p est un nombre premier fixé, qu'on supposera par la suite différent de 2.

Soient $(L_i)_{1 \leq i \leq N}$ N Γ -extensions d'un corps K ; on dit qu'elles sont indépendantes sur K si, pour tout i , $2 \leq i \leq N$, $L_1 \circ L_2 \circ \dots \circ L_{i-1} \cap L_i = K$. Il est clair que N Γ -extensions sont indépendantes sur K si, et seulement si, les N extensions intermédiaires de degré p sur K le sont.

Supposons alors que K est de caractéristique différente de p , et contient le groupe μ_p des racines p -ièmes de 1. On sait (théorie de Kummer) que toute extension cyclique de degré p de K est de la forme $K(\alpha^{1/p})$, avec $\alpha \in K^* \setminus K^{*p}$. Il est alors naturel, pour l'étude des Γ -extensions de K , d'introduire la définition suivante :

DÉFINITION 1. - $\theta_K = \{\alpha \in K^* \mid K(\alpha^{1/p})$ se plonge dans une Γ -extension de K } .

On montre facilement que θ_K (s'il n'est pas vide) est un sous-groupe de K^* , et que K n'a qu'un nombre fini de Γ -extensions indépendantes si, et seulement si, θ_K/K^{*p} est un groupe fini ; de plus, $\dim_{\mathbb{F}_p}(\theta_K/K^{*p})$ est alors le nombre maximum N de Γ -extensions indépendantes de K . (Exemple : K corps local ou corps de nombres.)

Une condition nécessaire pour qu'une extension cyclique de degré p de K se plonge dans une Γ -extension est qu'elle se plonge, pour tout entier n , dans une extension cyclique de degré p^n de K . Ceci amène à la définition suivante.

DÉFINITION 2. - $\psi_K = \{\alpha \in K^* \mid$ pour tout entier $n \geq 2$, $K(\alpha^{1/p})$ se plonge dans une extension cyclique de degré p^n de K } .

ψ_K est évidemment un sous-groupe de K^* contenant θ_K . On peut se demander si $\theta_K = \psi_K$; c'est vrai, par exemple, si K est une extension finie du corps \mathbb{Q}_ℓ des nombres ℓ -adiques (on le montre en remarquant que, n étant fixé, K n'a qu'un nombre fini d'extensions cycliques de degré p^n). Cependant, on verra (§ 4) des exemples avec $\theta_K \neq \psi_K$.

Dans toute la suite, on donnera, sans démonstration, l'énoncé des principaux résultats obtenus.

2. Normes cyclotomiques.

Dans ce § 2, on fait les hypothèses suivantes sur K : K est de caractéristique différente de p ; il existe un entier $m \geq 1$, tel que K contienne le groupe μ_p^m des racines p^m -ièmes de 1, et ne contienne pas le groupe μ_p^{m+1} des racines p^{m+1} -ièmes de 1.

Notation. - n étant un entier, K_n désigne le corps des racines p^n -ièmes de 1 au-dessus de K .

On démontre, en utilisant des techniques de la théorie de Kummer (cf. [2]) la proposition suivante.

PROPOSITION 2.1. - Soit $\alpha \in K^*$; $K(\alpha^{1/p})$ se plonge dans une extension cyclique de degré p^n de K si, et seulement si, $\alpha \in K^{*p} N_{K_n|K}(K_n^*)$.

D'où immédiatement le corollaire ci-dessous.

COROLLAIRE. - $\psi_K = \bigcap_{n \geq m} K^{*p} N_{K_n|K}(K_n^*)$.

On en déduit une autre expression de ψ_K comme intersection de groupes de normes.

PROPOSITION 2.2. - $\psi_K = \bigcap_{n \geq m} N_{K_{n+1}|K_n}(K_{n+1}^*)$.

C'est cette dernière expression qui permettra d'étudier ψ_K lorsque K est un corps de nombres (cf. § 3.2).

3. Cas où K est un corps de nombres.

Dans les § 3 et 4, on suppose que K est un corps de nombres contenant le groupe μ_p des racines p -ièmes de 1. L'entier m a la même signification que dans le § 2.

3.1. Le groupe ψ_K a alors les propriétés suivantes.

PROPOSITION 3.1. - Si $\alpha \in \psi_K$, l'extension $K(\alpha^{1/p})|K$ est non ramifiée en dehors de p .

COROLLAIRE. - ψ_K/K^{*p} est un groupe fini.

Ceci permettra de majorer $\dim_{\mathbb{F}_p} \theta_K/K^{*p}$ par $\dim_{\mathbb{F}_p} \psi_K/K^{*p}$.

3.2. Lorsque $K|\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne, on peut caractériser ψ_K par des conditions portant sur les complétés K_p de K pour les idéaux \mathfrak{p} de K divisant p . En utilisant la proposition 2.2, le théorème des normes de Hasse, et la théorie du corps de classes local, on montre le résultat ci-après.

PROPOSITION 3.2. - On suppose que $K|\mathbb{Q}$ est galoisienne, et que, pour tout idéal \mathfrak{p} de K divisant p , K_p ne contient pas $\mu_{\mathfrak{p}^{m+1}}$. On a :

$$\psi_K = \{ \alpha \in K^* \mid \text{pour tout } \mathfrak{p} \mid p, N_{K_p|\mathbb{Q}_p}(\alpha) \in p^{\mathbb{Z}} U^{(m+1)},$$

et, pour tout $\mathfrak{q} \nmid p$, p divise $v_{\mathfrak{q}}(\alpha)$ \}.

Notations. - $U^{(m+1)} = \{ x \in \mathbb{Q}_p \mid v_p(x-1) \geq m+1 \}$; $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ idéaux de K .

Lorsque le nombre de classes h_K de K est premier à p , on voit facilement que $\psi_K \subset K^{*p} P_K$, où P_K est le groupe des p -unités de K .

La proposition 3.2 a alors le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - On suppose $K|\mathbb{Q}$ galoisienne, et le nombre de classes h_K de K premier à p . $\psi_K \cap P_K$ est le groupe p -unités de K qui sont des normes dans l'extension $K_{m+1}|K$, et on a :

$$\dim_{\mathbb{F}_p} (\psi_K/K^{*p}) = \dim_{\mathbb{F}_p} (\psi_K \cap P_K/P_K^p).$$

3.3. Les résultats ci-dessus fournissent une majoration de $\dim_{\mathbb{F}_p} (\theta_K/K^{*p})$, c'est-à-dire du nombre maximum N de Γ -extensions indépendantes de K .

On sait par ailleurs (théorie du corps de classes, cf. [3]) que $N = n - r_p$, où $n = [K:\mathbb{Q}]$, et r_p est le rang p -adique des unités de K (cf. [3]). On a $1 \leq r_p \leq r$, où r est le nombre de Dirichlet de K , d'où $n - r \leq N \leq n - 1$. On conjecture que $r = r_p$ (conjecture de Léopoldt), conjecture démontrée lorsque K est abélien sur \mathbb{Q} ou sur un corps quadratique imaginaire (cf. [1]). En termes de Γ -extensions, une conjecture équivalente est $N = n - r$, ou, lorsque K est totalement imaginaire (comme c'est le cas pour un corps contenant μ_p), $N = r_2 + 1$ où $[K:\mathbb{Q}] = 2r_2$.

La recherche d'exemples de corps K tels que $\theta_K = \psi_K$ permet, comme on le verra au § 4, de donner de nouveaux cas où la conjecture de Léopoldt est vraie.

4. Exemples.

4.1. K corps de nombres contenant μ_p , avec un seul idéal \mathfrak{p} divisant p .

PROPOSITION 4.1. - Soit un corps de nombres K vérifiant les conditions suivantes : K est galoisien sur \mathbb{Q} , K contient μ_p , le nombre de classes h_K de K est premier à p , et K possède un seul idéal au-dessus de p . On a :

$$\theta_K = \psi_K = K^{*p} P_K .$$

COROLLAIRE. - Si K vérifie les hypothèses de la proposition 4.1, la conjecture de Léopoldt est vraie pour K .

Remarque (due à J.-P. SERRE). - Soit K un corps de nombres contenant μ_p , dont le nombre de classes est premier à p , et possédant un seul idéal \mathfrak{p} au-dessus de p ; soit $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq r}$ un système fondamental d'unités de K . Alors, si les entiers $(n_i)_{1 \leq i \leq r}$ ne sont pas tous nuls mod p , l'unité $\varepsilon_1^{n_1} \circ \dots \circ \varepsilon_r^{n_r}$ n'est pas une puissance p -ième dans le complété $K_{\mathfrak{p}}$ de K .

De cette remarque (qui résulte du fait que l'extension $K((\varepsilon_1^{n_1} \circ \dots \circ \varepsilon_r^{n_r})^{1/p}) \mid K$ est nécessairement ramifiée), on déduit facilement la conjecture de Léopoldt pour K , ce qui donne donc une démonstration directe d'un résultat plus précis.

Exemple d'un corps K (possédant un seul idéal $\mathfrak{p} \mid p$) avec $\theta_K \neq \psi_K$ (cet exemple est dû à J.-P. SERRE). - Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{83}, \sqrt{-3})$, et soit $p = 3$; l'unité fondamentale ε de $\mathbb{Q}(\sqrt{83})$ est donnée par : $\varepsilon = 82 + 9\sqrt{83}$, elle vérifie $\varepsilon \equiv 1 \pmod{9}$ et ceci entraîne : 3 divise le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{-3 \times 83})$ (cf. [4]), d'où : 3 divise h_K (on a $h_K = 12$). On montre facilement que θ_K est engendré modulo K^{*p} par j , $1 - j$ et ε (où j est racine cubique de 1); ψ_K est engendré modulo K^{*p} par θ_K et par un élément α de K engendrant un idéal \mathfrak{a}^3 , où \mathfrak{a} est non principal (par exemple $\alpha = 2(1 + \sqrt{-3 \times 83})$). On vérifie que $\alpha \notin \theta_K$.

4.2. K corps contenant μ_p , avec deux idéaux \mathfrak{p} et \mathfrak{p}' divisant p . - On suppose de plus : K galoisien sur \mathbb{Q} , et p ne divise pas le nombre de classes de K .

On note :

$$2r_2 = [K:\mathbb{Q}] ,$$

k le corps quadratique, corps de décomposition de \mathfrak{p} et \mathfrak{p}' ,

\mathfrak{p}_k et \mathfrak{p}'_k les idéaux de k divisant \mathfrak{p} et \mathfrak{p}' .

PROPOSITION 4.2. - Soit K un corps de nombres vérifiant les hypothèses ci-dessus,
et l'hypothèse suivante : k est imaginaire. On note η un générateur de $\mathfrak{p}_k^{h_k}$
 (h_k nombre de classes de k). On a :

$$\dim_{\mathbb{F}_{\tilde{p}}}(\psi_K/K^{*p}) = \begin{cases} r_2 + 1 & \text{si } \eta^{p-1} \neq 1 \quad (\mathfrak{p}_k^2) \\ r_2 + 2 & \text{si } \eta^{p-1} \equiv 1 \quad (\mathfrak{p}_k^2) . \end{cases}$$

COROLLAIRE. - Soit K un corps de nombres vérifiant les hypothèses de la propo-
sition 4.2, et tel que $\eta^{p-1} \neq 1 \quad (\mathfrak{p}_k^2)$. Alors la conjecture de Léopoldt est vraie
pour K , et $\theta_K = \psi_K$.

Exemple : corps K vérifiant les hypothèses de la proposition 4.2, et pour lequel
 $\theta_K \neq \psi_K$.

Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-11}, \zeta)$, où ζ est racine primitive 5e de 1 , et soit $p = 5$;
 on montre : 5 ne divise pas h_K , $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ est le corps de décomposition de
 5 , et $\eta^4 \equiv 1 \quad (\mathfrak{p}_k^2)$. D'où le résultat annoncé.

Lorsque le corps quadratique k est réel, on obtient le résultat suivant.

PROPOSITION 4.3. - Soit K un corps vérifiant les hypothèses du § 4.2, et l'hypo-
thèse suivante : k est réel. Soit ε une unité fondamentale de k ; on a

$$\varepsilon^{p-1} \neq 1 \quad (\mathfrak{p}_k^2) .$$

Si ε est norme d'une unité de K , on a $\dim_{\mathbb{F}_{\tilde{p}}}(\psi_K/K^{*p}) = r_2 + 1$; la conjecture
de Léopoldt est alors vraie pour K , et $\theta_K = \psi_K$. Cette condition est réalisée en
particulier si p^m ne divise pas l'indice de ramification de p dans K .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BRUMER (A.). - On the units of algebraic number fields, *Mathematika*, London, t. 14, 1967, p. 121-124.
- [2] HASSE (H.). - Invariante Kennzeichnung relativ Abelscher Zahlkörper, *Abh. Deutscher Akad. Wiss. Berlin*, 1947, p. 1-56.
- [3] IWASAWA (K.). - Notes d'un Séminaire, tenu à Princeton, en 1966.
- [4] SCHOLZ (A.). - Über die Beziehung der Klassenzahlen quadratischer Körper zueinander, *J. für reine und ang. Math.*, t. 166, 1932, p. 201-203.

Françoise BERTRANDIAS
 Université scient. et méd. de Grenoble
 Institut de Mathématiques pures
 Boîte postale 116
 38 - SAINT-MARTIN-d'Hères

(Texte reçu le 15 juillet 1971)