Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

Michel Olivier

Répartition des valeurs de la fonction « somme des chiffres »

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 12 (1970-1971), exp. n° 15, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1970-1971__12__A10_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
12e année, 1970/71, n° 15, 5 p.

RÉPARTITION DES VALEURS DE LA FONCTION "SOMME DES CHIFFRES"

par Michel OLIVIER

1. Introduction.

1.1. - Soit $g \geqslant 2$ un nombre entier. Ecrivons chaque entier n dans la base g :

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n).g^k ,$$

où $e_k(n)$ est à valeurs dans $\{0 , 1 , \ldots , g-1\}$.

On définit la fonction "somme des chiffres" de $\underset{\sim}{N}$ dans $\underset{\sim}{N}$, par

$$s(n) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n) .$$

Il est facile de voir que si j et m sont des entiers, on a

$$\mathrm{Card}\{n \leqslant x ; \ s(n) \equiv j \pmod m\} \sim x/m .$$

En 1966, A. O. GEL'FOND [2] a montré le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - *Si* λ , m , λ' , m' *sont des entiers tels que* $m \geqslant 2$, $m' \geqslant 2$ *et* $(m , g-1) = 1$, *on a*

$$\mathrm{Card}\{n \leqslant x ; \ s(n) \equiv \lambda \pmod m \text{ et } n \equiv \lambda' \pmod{m'}\} \sim x/m.m' .$$

En 1967, M. MENDÈS FRANCE [3] a retrouvé ce résultat en utilisant les fonctions pseudo-aléatoires.

Enfin, en 1970, J. BESINEAU [1], par cette même méthode, a montré le théorème suivant.

THÉORÈME 2. - *Si* g *et* g' *sont des entiers* $\geqslant 2$, ℓ *et* ℓ' *des entiers,* m *et* m' *des entiers* $\geqslant 2$ *tels que* $(m , g-1) = (m' , g'-1) = 1$, *on a*

$$\mathrm{Card}\{x \leqslant n ; \ s(n) \equiv \lambda \pmod m \text{ et } s'(n) \equiv \lambda' \pmod{m'}\} \sim x/mm' ,$$

en appelant s *et* s' *les fonctions "somme des chiffres" dans la base* g *et* g' .

1.2. - Ce dernier théorème donne la solution d'un problème proposé par GEL'FOND [2]. Nous nous proposons ici de résoudre un autre problème proposé aussi par GEL'FOND.

THÉORÈME 3. - *Soient* m , g , j *des entiers tels que* $m \geqslant 2$, $g \geqslant 2$, $(m , g-1)=1$. *Soit*

$$T_1(x) = \mathrm{Card}\{p \leqslant x , \ s(p) \equiv j \pmod m\} ,$$

où la lettre p désigne un nombre premier. On a

$$T_1(x) = \frac{\pi(x)}{m} + o\left(\frac{x}{\log x}\right) ,$$

$\pi(x)$ étant le nombre de premiers inférieurs ou égaux à x .

Notation. - Dans toute la suite, p désignera un nombre premier.

Dans le paragraphe 2, nous donnerons quelques lemmes préliminaires à la preuve de ce théorème ; et au paragraphe 3, nous esquisserons sa démonstration.

Signalons que, de la même manière, on peut montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 4. - La suite $(xs(p))_{p\geqslant 2}$ est équirépartie modulo 1 si, et seulement si, x est irrationnel.

1.3. - Remarquons qu'une condition du type $(m , g - 1) = 1$, dans les hypothèses du théorème 3, ne peut être évitée.

En effet, on a $s(n) \equiv n \pmod{g - 1}$, et l'égalité $s(p) \equiv 0 \pmod{g - 1}$ est équivalente à $p \equiv 0 \pmod{g - 1}$.

Par conséquent, $T_1(x) = 0$ dès que $g \geqslant 3$, et le théorème 3 tombe.

2. Quelques lemmes préliminaires.

Dans toute la suite, λ désignera la quantité

$$\frac{1}{2 \log g}\left(\log g \sin\frac{\pi}{2m} - \log \sin\frac{\pi}{2mg}\right) .$$

Il est aisé de voir que $1/2 < \lambda < 1$.

2.1 LEMME 1. - Soient v , m , g , q des entiers tels que $m \geqslant 2$, $g \geqslant 2$, $(m , g - 1) = 1$, $1 \leqslant q \leqslant m - 1$, $v \geqslant 0$. Soit α un nombre réel. On a

$$\prod_{v=0}^{k-1} \left|[\sin \pi g(\alpha g^v + q/m)] / [\sin \pi(\alpha g^v + q/m]\right| < g^{\lambda k+1} .$$

Une démonstration de ce lemme se trouve dans [2] de façon implicite. Nous ne la donnerons pas ici.

2.2 LEMME 2. - Soient m , g , d , q des entiers tels que $m \geqslant 2$, $g \geqslant 2$, $d \geqslant 1$, $1 \leqslant q \leqslant m - 1$. Posons

$$S(n) = \sum_{0\leqslant j\leqslant n/d} \exp\left(2i\pi\frac{q}{m} s(n - dj)\right)$$

$$f(x) = \left(\prod_v \left(\sum_\ell \exp\left(2i\pi\frac{q}{m}\ell\right) x^{\ell g^v}\right)\right) / \left((1 - x^d) x^{g^k - p + 1}\right) ,$$

$$0 \leqslant \ell \leqslant g - 1 , \quad 0 \leqslant v \leqslant k - 1,$$

où f est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, et ρ est un entier, $1 \leqslant \rho \leqslant d$. On a, pour tout $k \geqslant 0$, pour tout ρ :

$$S(g^k - \rho) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=\frac{1}{2}} f(x)\, dx .$$

Preuve. - Elle s'appuie essentiellement sur l'égalité suivante, que l'on démontre terme à terme facilement.

$$\prod_v \Big(\sum_\ell \exp\Big(2i\pi \frac{q}{m} \ell\Big)\, x^{\ell g^v}\Big) = \sum_n \exp\Big(2i\pi \frac{q}{m} s(n)\Big)\, x^n ,$$

$$0 \leqslant n \leqslant g^k - 1 , \quad 0 \leqslant \ell \leqslant g - 1 , \quad 0 \leqslant v \leqslant k - 1 .$$

On termine la démonstration en calculant le résidu de f au point 0, qui est le seul pôle de f dans le cercle $(|x| = \frac{1}{2})$.

2.3 LEMME 3. - Avec les mêmes hypothèses qu'au lemme 2, et $(m , g - 1) = 1$, on a $|S(n)| \leqslant c_1 n^\lambda$, c_1 étant une constante ne dépendant que de m et g.

Preuve. - On utilise principalement la g-additivité (au sens de GEL'FOND) de la fonction s, c'est-à-dire $s(n_1 + n_2) = s(n_1) + s(n_2)$ si $n_1 = g^v n_3$ et $n_2 < g^v$. Donnons le principe de la démonstration.

On établit facilement la relation de "récurrence" :

$$s(n + \varepsilon g^k) = \exp\Big(2i\pi \frac{q}{m} \varepsilon\Big) \times S(n) + S(\varepsilon g^k - \rho) ,$$

avec $1 \leqslant \rho \leqslant d$, si $n < g^k$ et $\varepsilon \in \{0 , 1 , \ldots g - 1\}$.

Par conséquent, si on écrit l'entier n dans la base g,

$$n = \varepsilon_1 g^{k_1} + \ldots + \varepsilon_j g^{k_j} \quad \text{avec} \quad k_1 > k_2 > \ldots > k_j \geqslant 0 ,$$

la majoration de $|S(n)|$ est ramenée à la majoration de $|S(g^k - \rho)|$ avec $1 \leqslant \rho \leqslant d$.

Puis, à l'aide du lemme 2, on se ramène au calcul de l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=\frac{1}{2}} f(x)\, dx .$$

En remarquant que

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=R} f(x)\, dx = 0 ,$$

on obtient $S(g^k - \rho) = - \Sigma'\, \mathrm{Res}(f , \exp(2i\pi \frac{t}{d}))$, où $\mathrm{Res}(f , \exp(2i\pi \frac{t}{d}))$ désigne le résidu de la fonction f au point $\exp(2i\pi \frac{t}{d})$, et Σ' la somme étendue aux indices t tels que $(\exp(2i\pi \frac{t}{d}))$ soit pôle de f.

Il est facile de voir que

$$|\mathrm{Res}(f , \exp(2i\pi \tfrac{t}{d}))| = \frac{1}{d} \prod_v \Big|\Big(\sin \pi g\Big(\frac{t}{d} g^v + \frac{q}{m}\Big)\Big) \Big/ \Big(\sin \pi\Big(\frac{t}{d} g^v + \frac{q}{m}\Big)\Big)\Big| , \quad 0 \leqslant v \leqslant k - 1 .$$

Il ne reste plus qu'à utiliser le lemme 1, et la relation de récurrence pour majorer $|S(n)|$.

2.4 LEMME 4. - Avec les mêmes hypothèses qu'au lemme 3, on a

$$|\sum_{1\leqslant j\leqslant n} \exp(2i\pi\frac{q}{m}s(dj)| \leqslant c_2(nd)^{\lambda} .$$

Preuve. - C'est immédiat en vertu du lemme 3.

Remarque. - Pour la suite, il est important de constater que les constantes c_2 et λ ne dépendent pas de d .

3. Principe de la démonstration du théorème 3.

Elle découle immédiatement du théorème suivant.

THÉORÈME 5. - Soit $f : \underset{\sim}{N} \to \underset{\sim}{C}$ une fonction arithmétique, vérifiant :

(i) $f(n) = O(1)$ pour tout n ;

(ii) il existe deux constantes λ et c telles que $0 < \lambda < 1$, $c > 0$ et pour tout $d \geqslant 1$ entier,

$$|\sum_{1\leqslant j\leqslant N} f(dj)| \leqslant c(Nd)^{\lambda} .$$

Alors on a

$$\sum_{p\leqslant N} f(p) = o(\frac{N}{\log N}) .$$

Preuve. - On raffine une méthode de I. M. VINOGRADOV [7]. Nous ne donnerons pas la démonstration. Elle se trouve dans [6].

Nous sommes désormais en mesure de prouver le théorème 3. On écrit

$$T_1(x) = \frac{1}{m}\sum_q \sum_{p\leqslant x} \exp(2i\pi\frac{q}{m}(s(p) - j)) , \quad 0 \leqslant q \leqslant m - 1 ,$$

ou encore

$$T_1(x) = \frac{\pi(x)}{m} + \frac{1}{m}\sum_q \exp(-2i\pi\frac{q}{m}j)\sum_{p\leqslant x}\exp(2i\pi\frac{q}{m}s(p)) , \quad 1 \leqslant q \leqslant m - 1 .$$

La fonction $n \to \exp(2i\pi\frac{q}{m}s(n))$ vérifie les hypothèses (i) et (ii) du théorème 5 grâce au lemme 4.

Nous avons donc

$$\sum_{p\leqslant x} \exp(2i\pi\frac{q}{m}s(p)) = o(\frac{x}{\log x}) ,$$

ce qui termine la démonstration.

4. Remarque.

4.1. - Signalons pour terminer que le théorème 3 est lié au problème suivant : Existe-t-il une infinité de nombres premiers, dans la suite de Fermat $2^{2^n}+1$?

Soit s la somme des chiffres en base 2. Dire qu'il y a une infinité de nombres de Fermat premiers, c'est dire qu'il y a une infinité de premiers p tels que $s(p)=2$.

Le théorème 3 dit que, pour tout entier $m \geqslant 2$, il y a une infinité de nombres premiers p tels que $s(p) \equiv 2 \pmod m$.

4.2. - Enfin, répétons le dernier problème posé par GEL'FOND dans [2] : Evaluer

$$\mathrm{Card}\{n \leqslant x \ ; \ s(n^2) \equiv j \pmod m\} .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BESINEAU (J.). - Sur un problème de Gel'fond relatif à la fonction somme des chiffres, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, 1971, Série A, p. 453-456.

[2] GEL'FOND (A. O.). - Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données, Acta Arithm., Warszawa, t. 13, 1968, p. 259-265.

[3] MENDÈS FRANCE (M.). - La fonction "somme des chiffres" et autres fonctions analogues. Une caractérisation des nombres de Pisot, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 8e année, 1966/67, n° 8, 10 p.

[4] NEWMAN (D. J.). - On the numbers of binary digits in a multiple of three, Proc. Amer. math. Soc., t. 21, 1969, p. 719-721.

[5] OLIVIER (M.). - Sur la représentation en base g des nombres premiers, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, 1971, Série A, p. 937-939.

[6] OLIVIER (M.). - Un théorème sur les fonctions arithmétiques (à paraître).

[7] VINOGRADOV (I. M.). - The method of trigonometrical sums in the theory of numbers. - London and New York, Interscience Publishers, 1954.

(Texte reçu le 23 juin 1971)

Michel OLIVIER
Université de Bordeaux-I
Mathématiques et Informatique
351 cours de la Libération
33 - TALENCE