

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

GILLES CHRISTOL

Équirépartition dans les séries formelles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 11, n° 1 (1969-1970),
exp. n° 4, p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1969-1970__11_1_A2_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉQUIRÉPARTITION DANS LES SÉRIES FORMELLES

par Gilles CHRISTOL

1. μ -répartition.

Soit K un compact muni d'une mesure μ normale (positive et de masse totale 1). On dira que la suite u_n de K est μ -répartie, si elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes ([7]) :

(a) Pour toute partie E de K , mesurable et de frontière négligeable,

$$\lim \frac{1}{N} \text{Card}\{n \in (0, N-1) ; u_n \in E\} = \mu(E) ;$$

(b) Pour toute fonction f de $C(K)$ (fonctions continues de K dans $\mathbb{C}$),

$$\lim \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(u_n) = \int_K f(x) d\mu(x) .$$

Pour que (b) ait lieu, il suffit qu'elle soit vérifiée pour une partie engendrant un sous-espace dense de $C(K)$ (pour la topologie de la convergence uniforme).

Nous nous plaçons donc dans la catégorie suivante : les objets sont les couples (K, μ) , où K est un compact, et μ une mesure normale de K ; un morphisme de (K, μ) dans (H, ν) est une surjection continue p de K sur H qui satisfait, pour toute fonction f de $C(H)$, à

$$\int_K f(p(x)) d\mu(x) = \int_H f(x) d\nu(x) .$$

Nous appellerons les objets de cette catégorie "compact", sans préciser qu'ils sont munis d'une mesure normale.

Soit une famille de compacts (K_α, μ_α) indexée par un ensemble d'indice I préordonné filtrant, et soit, pour tout $\alpha \leq \beta$, un morphisme $p_{\alpha\beta}$ de (K_β, μ_β) dans (K_α, μ_α) . Alors il existe une solution universelle pour le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{p_\beta} & K_\beta \\ & \searrow p_\alpha & \downarrow p_{\alpha\beta} \\ & & K_\alpha \end{array} ;$$

cette solution est le compact $(\varprojlim K_\alpha, p_{\alpha\beta}), \varprojlim \mu_\alpha$ ([4], chap. 3). Si nous notons (K, μ) cette limite projective, et p_α ses morphismes sur K_α , nous pouvons énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - Une suite u_n de K est μ -répartie si, et seulement si, pour tout α , la suite $p_\alpha(u_n)$ est μ_α -répartie.

Si la suite u_n est μ -répartie, pour toute fonction f_α de $C(K_\alpha)$, comme $f_\alpha \circ p_\alpha$ appartient à $C(K)$, nous avons

$$\lim \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_\alpha(p_\alpha(u_n)) = \int_K f_\alpha(p_\alpha(x)) d\mu(x) = \int_{K_\alpha} f_\alpha(x) d\mu_\alpha(x),$$

puisque p est un morphisme ; la condition (b) nous indique donc que la suite $p_\alpha(u_n)$ est μ_α -répartie.

Si, pour tout α , la suite $p_\alpha(u_n)$ est μ_α -répartie, pour toute fonction f de $C(K)$ qui, pour un certain α , est de la forme $f_\alpha \circ p_\alpha$, avec f_α appartenant à $C(K_\alpha)$, nous avons

$$\begin{aligned} \lim \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(u_n) &= \lim \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_\alpha(p_\alpha(u_n)) = \int_{K_\alpha} f_\alpha(x) d\mu_\alpha(x) \\ &= \int_K f_\alpha(p_\alpha(x)) d\mu(x) = \int_K f(x) d\mu(x), \end{aligned}$$

et comme l'ensemble des f de $C(K)$ qui sont de cette forme est dense dans $C(K)$ pour la topologie de la convergence uniforme, d'après la remarque sur la condition (b), la suite u_n est μ -répartie.

Ceci peut, en particulier, s'appliquer aux produits de compacts qui s'obtiennent comme limite projective de leurs sous-produits finis. Nous nous intéresserons surtout au compact $K^{\mathbb{N}}$, que nous appellerons ensemble des séries formelles sur K , et dont nous noterons les éléments $a = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x^n$; pour simplifier, si μ est une mesure normale de K , nous parlerons de μ -répartition dans $K^{\mathbb{N}}$, au lieu de $(\otimes_{\mathbb{N}} \mu)$ -répartition.

COROLLAIRE. - Une suite u_n de $K^{\mathbb{N}}$ est μ -répartie si, et seulement si, ses projections sur K^m sont μ -réparties pour tout m . En particulier, pour tout m , la suite $u_n(m)$ est μ -répartie.

Nous allons maintenant nous intéresser à des compacts valués réguliers. Remarquons tout d'abord que tout ensemble fini K est muni d'une structure canonique de compact :

la topologie étant la topologie discrète, et la mesure celle qui associe à chaque point la masse $1/\text{Card}(K)$. On appellera compact valué régulier, un compact qui est limite projective d'une suite de compacts finis ([1]) (la condition que donne Yvette AMICE étant équivalente à dire que les projections sont des morphismes de notre catégorie des compacts).

LEMME 1. - Si I et J sont deux ensembles d'indices préordonnés filtrants, et si $K_{\alpha\gamma}$ ($\alpha \in I$, $\gamma \in J$) est un système projectif de compacts indexé par $I \times J$, alors on a

$$\varprojlim_{I \times J} K_{\alpha\beta} = \varprojlim_I \varprojlim_J K_{\alpha\beta}.$$

Si $\alpha, \beta \in I$, alors la propriété universelle de la limite projective permet (si $\alpha \leq \beta$) de construire un morphisme de $\varprojlim_J K_{\beta\gamma}$ dans $\varprojlim_J K_{\alpha\gamma}$, et nous pouvons donc considérer la limite projective de ce nouveau système indicé par I : soit H cette limite. Si K est la limite du système $K_{\alpha\beta}$, un nouvel emploi de la propriété universelle permet d'assurer l'existence d'un morphisme de K dans chaque $\varprojlim_J K_{\alpha\gamma}$, et donc de K dans H ; nous résumons ceci sur le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\quad} & K_{\alpha\gamma} \\ \downarrow & \searrow & \uparrow \\ H & \xrightarrow{\quad} & \varprojlim_J K_{\alpha\gamma} \end{array}.$$

Inversement, pour chaque (α, γ) , la composée des projections de H dans $\varprojlim_J K_{\alpha,\gamma}$, et de $\varprojlim_J K_{\alpha,\gamma}$ dans $K_{\alpha,\gamma}$, nous donne une projection de H dans $K_{\alpha\gamma}$, et donc il existe un morphisme de H dans K suivant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\quad} & K_{\alpha\gamma} \\ \uparrow & \nearrow & \uparrow \\ H & \xrightarrow{\quad} & \varprojlim_J K_{\alpha\gamma} \end{array}.$$

Nous avons donc démontré l'égalité des limites à un isomorphisme près.

En particulier, ce lemme nous montre que

$$\varprojlim_I \prod_J K_{\alpha\gamma} = \prod_J \varprojlim_I K_{\alpha\gamma}.$$

Soit K un compact valué régulier, limite projective des compacts finis K_n ; nous supposons que K_0 n'a qu'un seul élément.

PROPOSITION 2. - $\tilde{K}^N$ est un compact valué régulier comme limite projective du système $P_n = K_{n-1} \times K_{n-2} \times \dots \times K_0$ muni des projections composante par composante. $\tilde{K}^N$ est aussi la limite projective du système $\tilde{K}_n^N$.

Si nous posons $K_n = K_0$ pour n négatif, nous avons

$$P_n = \prod_m K_{n-m},$$

et par suite, d'après le lemme,

$$\varprojlim_n P_n = \prod_m \varprojlim_n K_{n-m} = \prod_m K = \tilde{K}^N.$$

Comme, d'autre part, il est évident que P_n est un compact fini, $\tilde{K}^N$ est bien un compact valué régulier. Si v est la valuation de K , remarquons que ce que nous avons fait, revient à munir $\tilde{K}^N$ de la valuation

$$v\left(\sum_{n=1}^{\infty} a(n)x^n, \sum_{n=1}^{\infty} b(n)x^n\right) = \inf_n (v(a(n), b(n)) + n).$$

La deuxième partie se démontre de la même façon :

$$\tilde{K}^N = \prod_m \left(\varprojlim_n K_n \right) = \varprojlim_n \prod_m K_n = \varprojlim_n \tilde{K}_n^N.$$

COROLLAIRE. - Une suite u_n de $\tilde{K}^N$ est répartie (c'est-à-dire répartie pour la mesure de compact régulier de $\tilde{K}^N$) si, et seulement si, ses projections sur $\tilde{K}_n^N$ sont réparties dans $\tilde{K}_n^N$ pour tout n .

Ceci n'est qu'une conséquence des propositions 1 et 2.

Ce corollaire permet de ramener l'étude des répartitions dans les séries formelles sur un compact valué régulier, à celles des séries formelles sur un ensemble fini.

Si G est un groupe abélien compact, et si nous le munissons de sa mesure de Haar normalisée, ce groupe appartient à notre catégorie.

LEMME. - Si G et H sont deux groupes abéliens compacts munis de leurs mesures de Haar, alors tout homomorphisme p continu et surjectif de G sur H , est un morphisme de $\text{Hom}(G, H)$ dans notre catégorie.

Soient en effet dx la mesure de Haar de G , et μ sa transformée par p ; alors

$$\int_H f(x) d\mu(x) = \int_G f(p(x)) dx,$$

pour toute fonction continue sur H . Nous avons donc

$$\begin{aligned}\int_H f(y - x) \, d\mu(y) &= \int_G f(p(y - x)) \, dy = \int_G f(p(y) - p(x)) \, dy \\ &= \int_G f(p(y)) \, dy = \int_H f(y) \, d\mu(y) \quad ,\end{aligned}$$

ce qui montre que μ est invariante par translation ; comme p est surjectif, nous savons de plus que

$$\int_H d\mu(x) = \int_G dx = 1 \quad ,$$

et par suite μ est la mesure de Haar normalisée de H , ce qui démontre le lemme.

Une suite u_n de G répartie pour la mesure de Haar est dite équirépartie ; elle vérifie alors la condition équivalente à (a) et (b) :

(c) (Critère de Weyl) Pour tout $\chi \in \hat{G}$ (dual de G), $\chi \neq 0$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \chi(-u_n) = 0 \quad .$$

$G^{\mathbb{N}}$ est un groupe abélien, si on le munit de sa structure de somme directe complète ([8]) d'une infinité dénombrable de copies de G ; il résulte du lemme que la mesure de Haar de $G^{\mathbb{N}}$ est justement la mesure-produit des mesures de Haar de G ; on sait, d'autre part, que le dual de $G^{\mathbb{N}}$ est la somme directe d'une infinité dénombrable de copies de $\hat{G}$, que nous noterons $\hat{G}[x]$, la dualité étant définie par la relation

$$\left\langle \sum_{n=0}^N \chi(n)x^n, \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x^n \right\rangle = \prod_{n=0}^N \langle \chi(n), a(n+1) \rangle \quad .$$

2. Eléments U -normaux.

Si E est un ensemble quelconque, nous pouvons définir sur $E(x)$, pour tout entier m , la transformation

$$U_m(\sum a(n)x^n) = \sum a(nm)x^n \quad .$$

En particulier, si E est un compact K , U_m est défini sur $K^{\mathbb{N}}$. Un élément a de $K^{\mathbb{N}}$ sera dit U_m -normal, si la suite $u_n = U_m^n(a)$ est répartie dans K .

THÉOREME 1. - Si G est un groupe profini, pour tout m , presque tous les éléments de $G^{\mathbb{N}}$ sont U_m -normaux.

Un groupe profini est un groupe qui est un compact valué régulier.

LEMME 3. - U_m appartient à $\text{Hom}(G^{\mathbb{N}}, G^{\mathbb{N}})$.

U_m est d'une manière évidente un homomorphisme surjectif de $G^{\mathbb{N}}$ dans $G^{\mathbb{N}}$. Pour tout k , si $a \in B_{km}$ (boule de centre 0 dont les éléments ont une valuation supérieure à km), on a

$$v(a(n)) + n \geq km , \quad \text{pour } n < km ,$$

donc

$$v(a(nm)) + nm \geq km , \quad \text{pour } n < k ,$$

$$v(a(nm)) + n \geq km - n(m-1) > k(m-m+1) = k ,$$

donc $U_m(a)$ est dans B_k , ce qui prouve la continuité. Le lemme 2 nous donne donc ce que nous cherchions. On peut remarquer que l'hypothèse "profini" ne sert ici qu'à assurer la continuité ; le lemme 2 ne faisant pas usage de cette continuité pour montrer que p conserve les mesures de Haar, notre démonstration marcherait donc pour un groupe abélien compact quelconque, puisque dans la suite nous ne nous servirons que du fait que U_m conserve la mesure.

LEMME 4. - Si G est un groupe abélien compact, et si T est un opérateur continu sur $L^2(G)$ tel qu'il existe $A \subset \hat{G}$ vérifiant

$$A \cap T\hat{G} = \emptyset , \quad \hat{G} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (T^n A) \cup 0 ,$$

alors, pour tout f et $g \in L^2(G)$, on a

$$\lim_n \langle T^n f , g \rangle = \hat{f}(0) \hat{g}(0) .$$

Soit une fonction f de $L^2(G)$, comme $\hat{G}$ est discret, nous avons

$$f = \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi) \chi = \sum_{\chi \in A} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(T^n \chi) + \hat{f}(0)$$

(les sommations se font dans $L^2(G)$), T étant continu, on en déduit

$$T^m f = \sum_{\chi \in A} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(T^n \chi) T^{m+n} \chi + \hat{f}(0) ,$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} T^m f(\chi) &= 0 , & \text{si } \chi \notin T^m \hat{G} , \\ &= \hat{f}(T^{-m} \chi) , & \text{si } \chi \in T^m \hat{G} . \end{aligned}$$

Soit alors $g \in L^2(G)$, on a

$$\langle T^m f, g \rangle = \sum_{\chi \in \hat{G}} T^m f(\chi) \overline{\hat{g}(\chi)} = \hat{f}(0) \overline{\hat{g}(0)} + \sum_{\chi \in A} \sum_{n=m}^{\infty} \overline{\hat{g}(T^n \chi)} \hat{f}(T^{n-m} \chi) .$$

Or nous savons, par l'inégalité de Schwarz, que

$$\left(\sum_{\chi \in A} \sum_{n=m}^{\infty} \overline{\hat{g}(T^n \chi)} \hat{f}(T^{n-m} \chi) \right)^2 \leq \sum_{\chi \in A} \sum_{n=m}^{\infty} |\hat{g}(T^n \chi)|^2 \sum_{\chi \in A} \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(T^n \chi)|^2 ;$$

le deuxième terme est $\|f\|^2$, et le premier tend vers 0 ; nous avons donc démontré le lemme.

LEMME 5. - U_m est fortement mélangeant.

Si $f \in L^2(\hat{G}^{\mathbb{N}})$, nous posons

$$Tf(a) = f(U_m a) .$$

U_m conservant la mesure, T est bien continu dans $L^2(\hat{G}^{\mathbb{N}})$ (et même isométrique) ; si χ est un caractère de $\hat{G}^{\mathbb{N}}$, nous avons

$$\begin{aligned} T\chi(a) &= \langle \chi, U_m a \rangle = \prod_{n=0}^N \langle \chi(n), a((n+1)m) \rangle \\ &= \left\langle \sum_{n=0}^N \chi(n) x^{(n+1)m-1}, \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x^n \right\rangle , \end{aligned}$$

ce qui montre que, si nous notons $P(x)$ un caractère de $\hat{G}[x]$, nous avons

$$T(P(x)) = x^{m-1} P(x^m) ,$$

et donc, si nous posons

$$A = \{P(x) \in \hat{G}[x] ; xP(x) \neq Q(x^m)\} ,$$

nous nous retrouvons dans les conditions du lemme 4 (tout polynôme non nul pouvant s'écrire d'une manière unique sous la forme $T^m(Q)$ avec $Q \in A$), le lemme 4 nous dit donc que

$$\lim_n \int_G f(U_m^n x) \overline{g(x)} dx = \hat{f}(0) \overline{\hat{g}(0)} ,$$

c'est-à-dire que U_m est fortement mélangeant.

Or toute transformation fortement mélangeante est ergodique ([6]), et donc de moyenne presque-partout nulle, ce qui revient à dire que la suite $U_m(a)$ est équi-répartie pour presque tout a . Ce qui démontre le théorème.

Remarquons que cette démonstration ne donne aucun renseignement sur l'ensemble exceptionnel de mesure nulle, et que celui-ci peut être "très gros".

Le fait que U_m est ergodique et continu entraîne d'autre part que l'ensemble $\{U_m(a)\}$ est, soit partout dense, soit a une adhérence de mesure nulle (si $F = \overline{\{U_m(a)\}}$, on a $U_m(F) \subset F$ puisque U_m est continu, et donc $U_m^{-1}(F) \supset F$; la suite $U_m^{-n}(F)$ est donc une suite de fermés emboîtés, tous de même mesure, donc leur réunion E est telle que $U_m^{-1}(E) = E$, et a la même mesure que F ; comme U_m est ergodique, il s'ensuit que E est de mesure, soit 0, soit 1, et qu'il en est de même de F ; enfin comme F est un fermé, il ne peut être de mesure 1 sans être égal à $G^{\mathbb{N}}$).

3. Eléments qui ne sont pas U -normaux.

THÉOREME 2. - Si A est l'anneau des entiers d'un p -corps K , alors les éléments de $A^{\mathbb{N}} \cap K(x)$ ne sont pas U_p -normaux.

Rappelons tout d'abord que si K est de module p^r , alors la suite $a^{p^{rh}}$, où a appartient à A , tend vers la racine $(p^r - 1)$ -ième de l'unité t qui vérifie $|a - t| < 1$. D'autre part, on sait que A est de Fatou ([3]), donc les fractions de $K(x)$ qui sont dans $A^{\mathbb{N}}$ ont des pôles qui sont des inverses d'entiers algébriques sur A (et donc inverses d'entiers dans une extension finie de K).

Si K est de caractéristique nulle, alors nous savons que si $a \in K(x)$,

$$a(n) = \sum_{i=1}^N p_i(n) \alpha_i^n + b(n),$$

où les P_i sont des polynômes à coefficients dans K , les $b(n)$ les coefficients d'un polynôme, et les α_i les inverses des pôles de a . Si a appartient en outre à $A^{\mathbb{N}}$, les α_i sont donc des entiers d'une extension finie de K , et les suites $\alpha_i^{p^h}$ n'ont qu'un nombre fini de valeurs limites; il en résulte que

$$a(np^h) = \sum_{i=1}^N P_i(np^h) (\alpha_i^n)^{p^h} + b(np^h)$$

n'a qu'un nombre fini de valeurs limites (les $b(np^h)$ sont en effet nuls à partir d'un certain h , et $P_i(np^h)$ tend vers $P_i(0)$ puisque nous sommes dans un p -corps). Ceci signifie que la suite $U_p^h(a)$ n'a qu'un nombre fini de valeurs limites, et n'est donc pas équirépartie.

Nous allons maintenant regarder ce qui se passe en caractéristique p ; nous avons le résultat suivant.

LEMME 6. - Si A est un anneau de caractéristique p, alors

$$U_p^h \frac{1}{(x-a)^m} = \frac{(-a)^{p^h-s}}{(x-a^{p^h})^{k+1}}, \quad \text{si } m = kp^h + s, \quad 1 \leq s \leq p^h.$$

Si f et g sont des éléments de $A^{\mathbb{N}}$, alors

$$U_p^h(f(x^{p^h})g(x)) = f(x) U_p^h g(x),$$

et comme

$$\frac{1}{(x-a)^m} = \frac{(x-a)^{p^h-s}}{(x-a)^{p^h(k+1)}},$$

on a démontré le lemme en remarquant que $(x-a)^{p^h-s}$ est un polynôme de degré inférieur à p^h , donc que

$$U_p^h((x-a)^{p^h-s}) = (-a)^{p^h-s}.$$

Or pour h assez grand, on aura $k=0$; donc, si on considère un élément de $K(x)$, et qu'on le décompose en éléments simples pour h assez grand, on aura, pour chacun de ces éléments simples,

$$U_p^h \frac{1}{(x-\alpha_i)^m} = \frac{(-\alpha_i)^{p^h-s}}{x-\alpha_i^{p^h}} = \left(\frac{-1}{\alpha_i}\right)^s \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\alpha_i^{p^h}}\right)^n,$$

car comme p est premier, $(-1)^{p^h} = -1$.

Les extensions d'un p-corps étant encore des p-corps, il en résulte que si $a \in K(x) \cap A^{\mathbb{N}}$, les α_i sont des inverses d'entiers d'un p-corps, et donc la suite $U_p^h(a)$ n'a qu'un nombre fini de valeurs limites. Ce qui termine la démonstration du théorème 2.

Remarquons que cette démonstration marche aussi si on prend pour K un corps fini à p^r éléments, les pôles de la fraction sont alors dans une extension finie de K, c'est-à-dire dans un corps fini à p^{rs} éléments; il est donc clair que les $\alpha_i^{p^h}$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs (rs au maximum), il en est de même de la suite $U_p^h(a)$. Nous allons, dans ce cas, améliorer ce résultat: dans la suite, K sera le corps à p^r éléments.

THÉOREME 3. - Si a , élément de K^N , est algébrique sur $K(x)$, alors la suite $U_p^h(a)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Si nous nous plaçons dans l'anneau des séries formelles sur K , $K((x, y))$, il est clair que l'on peut définir deux transformations U_p portant sur x ou sur y , nous les noterons U_x et U_y . On voit immédiatement que U_x et U_y commutent.

LEMME 7. - Si P est un polynôme à deux variables, inversible dans $K((x, y))$, alors la suite

$$(U_x U_y)^h (y^k x^s \frac{\partial}{\partial y} P/P) = u_h$$

ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Posons

$$P(x, y) = A_0(x)y^n + \dots + A_n(x) .$$

Il existe alors une extension de $K(x)$ dans laquelle

$$P(x, y) = A_0(x) \prod_{i=1}^n (y - \theta_i) ,$$

les θ_i n'étant pas forcément tous différents, on peut donc écrire

$$y^k x^s \frac{\partial P}{\partial y} / P = \sum_{i=1}^n \frac{y^k x^s}{y - \theta_i} ,$$

et donc, dès que $p^h \geq k$,

$$U_y^h(y^k x^s \frac{P}{y}) = U_y^h(x^s \sum_{i=1}^n \frac{y^k - \theta_i^k}{y - \theta_i} + \frac{\theta_i^k}{y - \theta_i}) = \sum_{i=1}^n \frac{\theta_i^{k+p^h-1}}{y - \theta_i^{p^h}} x^s ,$$

puisque $(y^k - \theta_i^k)/(y - \theta_i)$ est un polynôme de degré $k - 1$.

Si nous posons

$$Q_h(x^{p^h}, y^{p^h}) = P(x, y)^{p^h} \quad \text{et} \quad B_h(x^{p^h}) = A_0(x)^{p^h} ,$$

nous savons qu'il n'y a que r polynômes Q_h différents au plus, et r polynômes B_h différents au plus ; de plus,

$$Q_h(x^{p^h}, y) = B_h(x^{p^h}) \prod_{i=1}^n (y - \theta_i^{p^h}) ;$$

soit, d'autre part,

$$P_h(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n \theta_i^{k+p^h-1} \prod_{j \neq i} (y - \theta_j^{p^h}) \right] x^h A_0^{(n+1)p^h} ;$$

les coefficients du crochet, considérés comme polynôme en y , sont de degré au plus $(k + np^h - 1)$ en θ , comme ce sont des fonctions symétriques des θ_i , ils s'expriment en fonction des A_i/A_0 , ils sont même de degré au plus $k + np^h - 1$ en A_1/A_0 , la multiplication par $A_0^{(n+1)p^h}$ nous montre que P_h , en tant que polynôme en y , a des coefficients de degré au plus

$$(k + np^h - 1) \sup_i (\deg A_i) + (n + 1)p^h \deg A_0 + s ;$$

il en résulte que

$$\deg_x U_x^h P_h(x, y) \leq 2(n + 1) \sup_i (\deg A_i) + s/p^h ,$$

donc est borné quel que soit h , comme nous sommes sur un corps fini P_h ne prend qu'un nombre fini de valeurs dans $K(x, y)$ (on sait que $\deg_y(P_h) = n$).

Or nous avons

$$\begin{aligned} (U_x U_y)^h (x^s y^k \frac{\partial P}{\partial y} / P) &= \left(U_x^h \left(\frac{B_h(x^{p^h})}{Q_h(x^{p^h}, y)} \times \frac{P_h(x, y)}{A_0^{(n+1)p^h}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{B_h^n(x, y) Q_h(x, y)} U_x^h P_h(x, y) . \end{aligned}$$

Comme B_h , Q_h et $U_n^h P_h$ ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs, nous avons bien démontré le lemme.

Nous poserons dans la suite

$$D(\sum a(m, n) x^n y^m) = \sum a(n, n) x^n .$$

Nous avons donc d'une manière évidente

$$D(U_x U_y(a)) = U_p(D(a)) .$$

LEMME 8. - Tout élément de $K^{\frac{N}{p}}$, qui est algébrique sur $K(x)$, est de la forme

$$R(x) + x^s \omega(x) , \quad \text{avec } \omega(x) = D[y^2 (\frac{\partial P}{\partial y} / P)(xy, y)] \quad \text{et} \quad R(x) \in K(x) .$$

Ce lemme a été démontré par FURSTENBERG [5].

Or, si nous posons $Q(x, y) = P(xy, y)$, nous avons

$$\frac{\partial P}{\partial y}(xy, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) - \frac{x}{y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) ;$$

il en résulte que tout élément φ de $K^{\mathbb{N}}$, algébrique sur $K(x)$, vérifie

$$\varphi(x) = R(x) + D(y^{s+2} x^s \frac{\partial Q}{\partial y} / Q) - D(y^{s+1} x^{s+1} \frac{\partial Q}{\partial x} / Q) .$$

Le théorème 3 se trouve donc démontré par le lemme 7, appliqué une fois en x , et une fois en y .

Nous pouvons maintenant remonter à des p -corps par le corollaire de la proposition 2.

COROLLAIRE. - Si A est l'anneau des entiers d'un p -corps, alors tout élément de $A^{\mathbb{N}}$, qui est la diagonale d'une fraction rationnelle à k indéterminées, n'est pas U_p -normal.

En effet, les diagonales de fractions rationnelles sont, modulo p , des fonctions algébriques sur $K(x)$ ([5]).

Comme, sur $\mathbb{C}$, il semble que, tout au moins dans certains cas, les diagonales de fractions rationnelles à trois variables aient un rapport avec les fonctions automorphes, ce corollaire pourrait peut-être fournir une approche de la conjecture d'ATKIN [2].

CONJECTURE. - Toute fonction f automorphe sur $\Gamma_0(p)$, qui a des coefficients entiers, et est entière (sans pôle dans le demi-plan de Poincaré), est telle que, si $p \leq 23$,

$$\lim_n U_p^n(f) = f(0) + k \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x^n \right) \quad (\text{limite prise dans } \mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}) ,$$

où les $a(n)$ sont éléments de $\mathbb{Z}_p$ indépendants de f , et vérifient

$$a(nq) - a(n) a(q) + q^{-1} a(n/q) = 0 , \quad \text{pour tout } q \text{ premier } q \neq p ,$$

$$a(np) - a(n) a(p) = 0 .$$

Si $p > 23$, alors on peut supposer que tout se passe de la même manière, mais avec plusieurs valeurs limites dont les coefficients ont les mêmes propriétés.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Yvette). - Interpolation p -adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1964).
- [2] ATKIN (A. O. L.). - Congruence Hecke operators (non publié).
- [3] BENZAGHOU (Benali). - Anneaux de Fatou, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 10e année, 1968/69, n° 9, 8 p.
- [4] BOURBAKI (Nicolas). - Intégration, Chap. 1-4. 2e édition. - Paris, Hermann, 1965 (Act. scient. et ind., 1175 ; Bourbaki, 13).
- [5] FURSTENBERG (Harry). - Algebraic functions over finite fields, J. of algebra, t. 7, 1967, p. 271-277.
- [6] HALMOS (Paul R.). - Lectures on ergodic theory. - Tokyo, The Mathematical Society of Japan, 1956 (Publications of the Mathematical Society of Japan, 3).
- [7] MATHAN (Bernard de). - Approximation diophantienne dans un corps local (Thèse Sc. math. Caen, 1968).
- [8] RUDIN (Walter). - Fourier analysis on groups. - New York, London, Interscience Publishers, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 12).

(Texte reçu le 8 décembre 1969)

Gilles CHRISTOL
Ass. Fac. Sc. Paris
27 rue Charles Fourier
75 - PARIS 13
