

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

DANIEL BARSKY

Forme linéaire sur L

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 10, n° 2 (1968-1969), exp. n° G2, p. G1-G4

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_2_A9_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FORME LINÉAIRE SUR $\mathcal{L}$

par Daniel BARSKY

Soit $\mathcal{L}^+$ l'espace des fonctions de U dans $\mathbb{Q}_p$, développables en série de Laurent à coefficients d'indice positif seulement :

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

On sait ([1]) que l'on peut écrire

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} b_n Q_n(x),$$

où $Q_n(x) = (1-x)\left(1-\frac{x}{\alpha}\right) \dots \left(1-\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right)$ (la suite $n \rightarrow \alpha^n$ est une suite très bien répartie dans U) et $(f(x) \in \mathcal{L}^+) \iff \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0\right)$.

Soient I_n des formes linéaires continues sur $\mathcal{L}^+$ (muni de la norme

$$\sup_n a_n = \sup_n b_n),$$

telles que $\langle I_n | Q_m(x) \rangle = \delta_{n,m}$ (symbole de Kronecker). On trouve que :

$$I_0 = \delta_1,$$

$$I_1 = \frac{\delta_\alpha}{Q_1(\alpha)} - \frac{I_0}{Q_1(\alpha)},$$

...

$$I_n = \frac{\delta_{\alpha^n}}{Q_n(\alpha^n)} - \frac{I_{n-1} Q_{n-1}(\alpha^n)}{Q_n(\alpha^n)} - \dots - \frac{I_1 Q_1(\alpha^n)}{Q_n(\alpha^n)} - \frac{I_0}{Q_n(\alpha^n)},$$

où δ_{α^n} est la mesure de Dirac en α^n .

Toute forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^+$ peut s'écrire $\mu = \sum_{n \geq 0} B_n I_n$, la suite des B_n est bornée ($B_n \in \mathbb{Q}_p$) (cf. [3]), et $\|\mu\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |B_n|$.

PROPOSITION 1. - Il existe une forme μ , unique à la multiplication par une constante près, qui est invariante par les translations de U .

$$\langle \mu | f(sx) \rangle = \langle \mu | f(x) \rangle, \quad \forall s \in U,$$

$$\mu = B \sum_{n \geq 0} I_n.$$

LEMME. - On a

$$Q_n(sx) = \sum_{h=0}^n a_h^{n,s} Q_h(x) ,$$

avec $\sum_{h=0}^n a_h^{n,s} = 1$ et $a_n^{n,s} = s^n$; pour que l'on ait $\langle \mu | f(sx) \rangle = \langle \mu | f(x) \rangle$, il faut et il suffit que, $\forall n$, $\langle \mu | Q_n(sx) \rangle = \langle \mu | Q_n(x) \rangle$; donc, si $\mu = \sum_{n \geq 0} B_n I_n$, il faut et il suffit que

$$\sum_{h=0}^n a_h^{n,s} B_h = B_n .$$

De là on tire, par récurrence, que $B_0 = B_1 = \dots = B_n$.

Prolongement de μ à $\mathbb{C}^-$. - On dira que μ agit sur f , si la suite

$$v_k = \langle \mu_{n_k-1} | f(x) \rangle$$

est convergente pour $k \rightarrow \infty$, où

$$\mu_{n_k-1} = \sum_{n=0}^{n_k-1} b_n$$

et $n_k = p^k(p-1)$.

PROPOSITION 2. - μ agit sur $\frac{1}{x}$,

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n(x)}{\alpha^n} ,$$

done $v_k = \frac{\alpha^{n_k} - 1}{\alpha - 1} \frac{1}{\alpha^{n_k-1}} .$

Comme $n \rightarrow \alpha^n$ est très bien répartie dans U , on montre facilement que $|v_k| \leq \frac{1}{p^{k+1}}$, donc $\langle \mu | \frac{1}{x} \rangle = 0$.

PROPOSITION 3. - μ agit sur $\frac{1}{x^h}$ pour $h \geq 1$.

Ceci se démontre en écrivant

$$\frac{1}{x^h} = \sum_{n \geq 0} d_{n,h} Q_n(x) ,$$

et en montrant que

$$d_{n,h} = \frac{1}{\alpha^h} d_{n-1,h} + d_{n,h-1} ,$$

et que

$$d_{n,h} = \frac{1}{\alpha^{nh}} \frac{(1 - \alpha^{n+1}) \dots (1 - \alpha^{n+h-1})}{(1 - \alpha) \dots (1 - \alpha^{h-1})} .$$

PROPOSITION 4. - μ agit sur $\mathcal{F}^-$.

Ceci se démontre par le théorème de Banach-Steinhaus-Monna ([2]).

PROPOSITION 5. - $\langle \mu | x^n \rangle = 0$ et $\langle \mu | 1 \rangle = 1$.

Application. - Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$. A quelles conditions, sur les a_n , f peut-elle s'écrire

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda_k}{(1-x)^k}, \quad \text{avec } \lambda_k \rightarrow 0 ?$$

On montre que $\langle \mu_0^r | \frac{f(x)}{x^n} \rangle = a_n$ (où μ_0^r est l'analogue de μ sur le cercle de centre 0 et de rayon r).

$$\begin{aligned} \langle \mu_0^r | \frac{1}{x^n (1-x)^k} \rangle &= \frac{1}{(k-1)!} (n+k-1) \dots (n+1) \\ &= \binom{n+k-1}{k-1} \\ &= \langle \mu_0^r | \frac{1}{x^n} [\sum_{h=k}^{\infty} \frac{h(h-1) \dots (h-k+2)}{(k-1)!} x^{h-k+1}] \rangle , \end{aligned}$$

donc

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \binom{n+k-1}{k-1} ,$$

ce qui montre que $n \rightarrow a_n$ est la restriction à $\mathbb{N}$ de la fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Q}_p$,

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \binom{x+k-1}{k-1}$$

(cf. [1] et [2]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Yvette). - Interpolation p -adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1964).
- [2] HILY (Jacques). - Sur les espaces de Banach ultramétriques. Algèbres de fonctions localement analytiques (Thèse Sc. math. Nancy, 1969).
- [3] SERRE (Jean-Pierre). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p -adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 12, p. 69-85).

(Texte reçu le 19 septembre 1969)

Daniel BARSKY
Stag. Rech. CNRS
10 avenue Stéphane Mallarmé
75 - PARIS 17
