Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Martine Pathiaux

# Sur le quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 10, nº 1 (1968-1969), exp. nº 7, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_1_A6_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
10e année, 1968/69, n° 7



20 janvier 1969

# SUR LE QUOTIENT DE HADAMARD DE DEUX FRACTIONS RATIONNELLES

par Martine PATHIAUX

## 1. Introduction.

Soit $K$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ . On considère $\mathcal{R}(K)$ (voir [1] et [2]), l'algèbre des fractions rationnelles $A(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , où $d^\circ P < d^\circ Q$ et $Q(0) \neq 0$ , et dont le développement en série de Taylor à l'origine est à coefficients dans $K$ , c'est-à-dire

$$A(z) \in \mathcal{R}(K) \iff A(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n , \quad a_n \in K \quad \text{et} \quad a_n = \sum_{i=1}^{k} R_i(n)\, \theta_i^n ,$$

où $\theta_i^{-1}$ pour $i \in \{1 , \ldots , k\}$ désignent les zéros de $Q(z)$ , et où

$$d^\circ R_i = \text{multiplicité de } \theta_i^{-1} - 1 .$$

<u>Conjecture</u> : Soit $K$ une extension algébrique finie de $\mathbb{C}$ . Soient

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{R}(K) , \qquad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in \mathcal{R}(K) \qquad \text{et} \qquad C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n ,$$

où $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ en convenant que $c_n = 1$ si $b_n = a_n = 0$ ; si, quel que soit $n$ , $c_n$ est entier algébrique, alors $C(z) \in \mathcal{R}(K)$ .

La conjecture est vraie dans certains cas. C. PISOT [7] a démontré le théorème suivant.

THÉORÈME 1.1. - <u>Soient</u>

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{R}(\mathbb{C}) \qquad \underline{\text{et}} \qquad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in \mathcal{R}(\mathbb{C}) ,$$

<u>où</u> $b_n = \sum_{i=1}^{\ell} Q_i(n)\, \mu_i^n$ , <u>avec</u> $|\mu_1| > |\mu_i|$ <u>pour</u> $i \in \{2 , \ldots , \ell\}$ <u>et</u> $d^\circ Q_1 = 0$ ; <u>si</u> $c_n = \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{Z}$ <u>pour tout</u> $n$ , <u>alors</u> $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ <u>est une **fraction** rationnelle</u>.

D. CANTOR [5] a démontré le théorème ci-après.

THÉORÈME 1.2. - <u>Soient</u>

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{C}) \quad \underline{\text{et}} \quad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{C}) ,$$

<u>où</u> $b_n = Q(n)$ ; <u>si</u> $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ <u>est entier algébrique pour tout</u> $n$ , <u>alors</u> $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ <u>est une fraction rationnelle.</u>

Cet exposé a pour but de démontrer que la conjecture est encore vraie dans le cas suivant.

THÉORÈME 1.3. - <u>Soient</u>

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{R}(K) \quad \underline{\text{et}} \quad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in \mathcal{R}(K) ;$$

<u>si le nombre de pôles distincts de</u> $B(z)$ <u>est inférieur ou égal à</u> $2$ , <u>et si</u> $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ <u>est entier algébrique pour tout</u> $n$ , <u>alors</u> $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ <u>est une fraction rationnelle.</u>

<u>Notations</u>. - On note $\Omega_p$ la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$ , et $\hat{\Omega}_p$ le complété de $\Omega_p$ (si $p = 0$ , $\hat{\Omega}_p$ désigne $\underset{\sim}{C}$ ).

Soit $K$ une extension finie de d° $s$ de $\underset{\sim}{Q}$ .

Si $\alpha \in K$ , $\alpha = \alpha^{(1)} , \dots , \alpha^{(i)} , \dots , \alpha^{(s)}$ désignent les conjugués de $\alpha$ sur $\underset{\sim}{Q}$ , et si $u_n \in K$ , $F^{(i)}(z) = \sum u_n^{(i)} z^n$ pour $i = 1 , \dots , s$ désignent les conjugués de $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = F_1(z)$ .

La démonstration du théorème 1.1 est basée sur le théorème de BOREL [4]. La démonstration du théorème 1.3 est analogue à celle du théorème 1.1, mais utilise une généralisation du théorème de Borel, due à DWORK [6] (généralisé par la suite par F. BERTRANDIAS [3]), utilisant l'analyse p-adique. Nous l'énonçons sous cette forme restreinte :

THÉORÈME 1.4. - <u>Soient</u> $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ , <u>où</u> $u_n$ <u>est un entier algébrique d'une même extension</u> $K$ <u>de</u> d° $s$ , <u>et</u> $p$ <u>un nombre premier rationnel</u>.

<u>Si les</u> $F^{(i)}(z)$ , <u>pour</u> $i \in \{1 , \dots , s\}$ , <u>sont méromorphes dans</u> $\underset{\sim}{C}$ <u>avec un nombre fini de pôles, zéro non compris, dans</u> $|z| < \rho_{i,0}$ ,

<u>Si les</u> $F^i(z)$ , <u>pour</u> $i \in \{1 , \dots , s\}$ , <u>sont méromorphes dans</u> $\hat{\Omega}_p$ <u>avec un nombre fini de pôles dans</u> $|z|_p < \rho_{i,p}$ ,

<u>Si</u> $\prod_{\substack{i=1,\dots,s \\ j=0,p}} \rho_{i,j} > 1$ ,

<u>alors les</u> $F^{(i)}(z)$ , <u>pour</u> $i = 1 , \dots , s$ , <u>sont des fractions rationnelles.</u>

La démonstration utilise les déterminants de Hankel

$$H_{n,s}^{(i)} = \begin{vmatrix} u_n^{(i)} & \dots & u_{n+s}^{(i)} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n+s}^{(i)} & & u_{n+2s}^{(i)} \end{vmatrix} ,$$

et les inégalités suivantes

$$\overline{\lim} |H_{n,s}^{(i)}|^{1/n} \leqslant R_{i,0}^{-h_i} \, \rho_{i,0}^{-(s+1-h_i)} , \qquad \forall \, s > h_i ,$$

où $R_{i,0}$ désigne le rayon de convergence de $F^{(i)}(z)$ , et $h_i$ le nombre de pôles de $F^{(i)}(z)$ dans $|z| < \rho_{i,0}$ , et

$$\overline{\lim} |H_{n,s}^{(i)}|_p^{1/n} \leqslant \rho_{i,p}^{-(s+1-e_i)} , \qquad \forall \, s > e_i ,$$

où $e_i$ désigne le nombre de pôles de $F^{(i)}(z)$ dans $|z|_p < \rho_{i,p}$ , et

$$N(H_{n,s}) \times |N(H_{n,s})|_p > 1 .$$

## 2. Lemmes.

<u>Notations.</u> - Notons

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} P_i(n) \, \theta_i^n \qquad \text{et} \qquad b_n = Q_1(n) \, \mu_1^n + Q_2(n) \, \mu_2^n ,$$

et K une extension algébrique de d° s contenant tous les $\theta_i$ , $\mu_j$ , et les coefficients des polynômes $P_i$ et $Q_j$ . On peut supposer tous ces nombres entiers algébriques. Dans le cas contraire, on multipliera $a_n$ et $b_n$ par le dénominateur de ces nombres, ce qui ne changera pas la forme générale de $a_n$ et $b_n$ .

LEMME 2.1. - $C^{(i)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(i)} z^n$ <u>ont des rayons de convergence</u> $R_{i,0}$ <u>dans</u> $\mathbb{C}$ <u>non nuls.</u>

Si $b_n = 0$ , $c_n = 1$ , et si $b_n \neq 0$ , alors $N(b_n) \geqslant 1$ puisque $b_n$ est entier algébrique. Donc

$$|b_n^{(i)} \prod_{\substack{j \in \{1,\cdots,s\} \\ j \neq i}} b_n^{(j)}| \geqslant 1 \quad .$$

Soit $R_{i,0}$ le rayon de convergence de $C^{(i)}(z)$ . On a donc

$$\frac{1}{R_{i,0}} = \overline{\lim} \frac{|a_n^{(i)}|^{1/n}}{|b_n^{(i)}|^{1/n}} \leqslant \overline{\lim} |a_n^{(i)}|^{1/n} \times \prod_{\substack{j=1,\cdots,s \\ j \neq i}} \overline{\lim} |b_n^{(j)}|^{1/n} \quad .$$

En posant

$$\theta = \max_{i=1,\cdots,k} \overline{|\theta_i|} \qquad \text{et} \qquad \mu = \max(\overline{|\mu_1|} \ , \ \overline{|\mu_2|}) \quad ,$$

soit

$$\frac{1}{R_{i,0}} \leqslant \theta \mu^{s-1} \quad .$$

LEMME 2.2. - <u>Si</u> $|\frac{\mu_1^{(i)}}{\mu_2^{(i)}}| = 1$ , $\forall \ i \in \{1 , \ldots , s\}$ , <u>et si</u> $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ <u>est différent d'une racine de l'unité, il existe</u> $p$ <u>premier rationnel, et</u> $i \in \{1 , \ldots , s\}$ <u>tel que</u>

$$|\mu_1^{(i)}|_p \neq |\mu_2^{(i)}|_p \quad .$$

En effet, si $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ est entier algébrique, alors d'après un théorème de Kronecker, si $|\frac{\mu_1^{(i)}}{\mu_2^{(i)}}| = 1$ , $\forall \ i \in \{1 , \ldots , s\}$ , $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ est racine de l'unité, ce qui est exclu. $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ n'est donc pas entier. Soit $P(x) = \sum_{i=0}^{s} \beta_i x^i \in \underset{\sim}{Z}[x]$ un polynôme primitif de degré $s$ ayant pour racines $\frac{\mu_2^{(i)}}{\mu_1^{(i)}}$ pour $i \in \{1 , \ldots , s\}$ . Alors $\beta_0 = \pm \beta_s \neq \pm 1$ . Soit $p$ un diviseur de $\beta_0$ ; il existe $i \in \{1 , \ldots , s - 1\}$ tel que $p \nmid \beta_i$ , puisque le polynôme est primitif. Le polygone de Newton de $P(x)$ a donc un côté de pente négative. Il existe donc $i \in \{1 , \ldots , s\}$ tel que $|\frac{\mu_2^{(i)}}{\mu_1^{(i)}}|_p < 1$ .

## 3. Démonstration du théorème.

Nous excluons le cas où $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ est racine de l'unité. Dans ce cas, on se ramène au cas de CANTOR.

Posons

$$c_{n,r} = c_n \times Q_1^r(n) \qquad \text{et} \qquad C_r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,r} \, z^n \ .$$

Si pour un $r$ convenable, $C_r(z)$ est une fraction rationnelle, le théorème 1.2 permettra d'affirmer que $C(z)$ l'est aussi.

Remarquons que $c_{n,r}$ est entier algébrique. D'autre part, le rayon de convergence dans $\underset{\sim}{C}$ de $C_r^{(i)}(z)$ est supérieur ou égal au rayon de convergence dans $\underset{\sim}{C}$ de $C^{(i)}(z)$. En notant $\rho_{i,j,r}$ (resp. $R_{i,j,r}$) le rayon de méromorphie (resp. convergence) de $C_r^{(i)}(z)$ dans $\hat{\Omega}_j$, où $j \in J$, $J$ désignant l'ensemble des nombres premiers rationnels, zéro inclus, on a

$$\rho_{i,0,r} \geqslant R_{i,0,r} \geqslant \min_{i=1,\dots,s} (R_{i,0}) \neq 0 \ , \qquad \text{d'après le lemme 2.1} \ .$$

D'autre part, pour $j \in J$, $j \neq 0$, $\rho_{i,j,r} \geqslant 1$. Il existe donc $A \neq 0$, indépendant de $i$, $j$, $r$ tels que $\rho_{i,j,r} \geqslant A$. D'après le théorème 1.4, il suffit donc de démontrer qu'il existe $i \in \{1, \dots, s\}$ et $j \in J$ tels que $\lim_{r \to \infty} \rho_{i,j,r} = +\infty$. Or d'après le lemme 2.2, il existe $p \in J$ et $i \in \{1, \dots, s\}$ tels que $|\mu_1^{(i)}|_p \neq |\mu_2^{(i)}|_p$. Supposons par exemple $i = 1$ et $|\frac{\mu_2}{\mu_1}|_p = \omega < 1$, et montrons que, pour ce $p$ considéré, $\lim_{r \to \infty} \rho_{1,p,r} = +\infty$. En utilisant l'identité

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \dots + x^{r-1} + \frac{x^r}{1-x} \ ,$$

transformons

$$c_{n,r} = a_n \frac{Q_1^r(n)}{Q_1(n)\, \mu_1^n \left(1 + \frac{Q_2(n)}{Q_1(n)} \frac{\mu_2^n}{\mu_1^n}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} t_n \, z^n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n \, z^n \ ,$$

avec

$$t_n = a_n \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \, Q_2^{(i)}(n) \, Q_1(n)^{r-1-i} \, \mu_2^{ni} \, \mu_1^{-n(i+1)}$$

et

$$v_n = (-1)^r \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{rn} \frac{Q_2^r(n) \, a_n}{Q_1(n) \, \mu_1^n + Q_2(n) \, \mu_2^n} \ ;$$

$\sum_{n=0}^{\infty} t_n \, z^n$ est une fraction rationnelle. On a donc

$$\frac{1}{\rho_{1,p,r}} \leqslant \overline{\lim} |v_n|_p^{1/n} \leqslant \omega^r \ \overline{\lim} |Q_2(n)^{r/n}|_p \ \overline{\lim} |c_n|_p^{1/n} \leqslant \frac{\omega^r}{A} \quad ,$$

soit

$$\rho_{1,p,r} \geqslant A\omega^{-r} \qquad \text{et} \qquad \lim_{r\to\infty} \rho_{1,p,r} = +\infty \quad .$$

## BIBLIOGRAPHIE


[1] BENZAGHOU (B.). - Sur l'algèbre de Hadamard des fractions rationnelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 9e année, 1967/68, n° 15, 16 p.

[2] BENZAGHOU (B.). - Sur le quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 10e année, 1968/69, n° 1, 14 p.

[3] BERTRANDIAS (F.). - Diamètre transfini dans un corps valué. Application au prolongement analytique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 257, 1963, p. 583-585.

[4] BOREL (E.). - Sur une application d'un théorème de Hadamard, Bull. Sc. math., Série 2, t. 18, 1894, 1re partie, p. 22-25.

[5] CANTOR (D. G.). - On arithmetic properties of coefficients of rational functions, Pacific J. of Math., t. 15, 1965, p. 55-58.

[6] DWORK (B. M.). - On the rationality of the zeta function of an algebraic variety, Amer. J. of Math., t. 82, 1960, p. 631-648.

[7] PISOT (C.). - Sur les fonctions arithmétiques analytiques à croissance exponentielle, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 222, 1948, p. 988-990.


(Texte reçu le 27 janvier 1969)

Mme Martine PATHIAUX
19 rue de Chartres
92 - NEUILLY