

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

YVETTE AMICE

Frontières analytiques dans le disque unité d'un corps valué non archimédien complet et algébriquement clos

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 10, n° 1 (1968-1969), exp. n° 6, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_1_A5_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FRONTIÈRES ANALYTIQUES DANS LE DISQUE UNITÉ
D'UN CORPS VALUÉ NON ARCHIMÉDIEN COMPLET ET ALGÈBRIQUEMENT CLOS

par Yvette AMICE

Le problème suivant m'a été posé par B. de MATHAN : Soit K le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$,

$$\Gamma = \{x \in K \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^{p^n} = 1\} \quad \text{et} \quad \Gamma^* = \Gamma - \{1\}.$$

La fonction $\frac{1}{1-x}$ est-elle limite uniforme de polynômes sur Γ^* ? La réponse est non, comme nous le verrons à la fin du § 1, car aucune fonction strictement analytique sur la boule unité de K ne coïncide avec $\frac{1}{1-x}$ sur Γ^* . En tentant de caractériser les fonctions définies sur Γ^* , et qui y sont limite uniforme de polynômes, la notion de frontière analytique s'introduit naturellement.

1. Notations. Cas du disque unité.

Soient K un corps valué complet non archimédien et algébriquement clos, et A son anneau de valuation (disque unité fermé). Nous noterons $|K|$ l'ensemble des $|x|$ où $x \in K$.

Soient B une partie de K , et f une fonction continue sur B et à valeurs dans K , nous noterons

$$\|f\|_B = \sup_{x \in B} |f(x)|,$$

la norme de f pour la convergence uniforme sur B (éventuellement $\|f\|_B = +\infty$).

DÉFINITION. - Soit B une partie de A ; nous dirons que B est une frontière analytique dans A , où y est analytiquement dense, si toute fonction à valeurs dans K , définie sur B et qui y est limite uniforme d'une suite de polynômes, est prolongeable de façon unique en une fonction strictement analytique sur A .

A propos du problème initialement posé, nous allons montrer que Γ^* , ou plus généralement toute partie infinie de Γ , est une frontière analytique dans A , d'où il résulte évidemment que $\frac{1}{1-x}$ n'est limite uniforme de polynômes sur aucune partie infinie de Γ .

PROPOSITION 1. -- Pour que B soit une frontière analytique dans A, il faut et il suffit que l'une des propriétés équivalentes suivantes soit satisfaite :

- (i) Le diamètre transfini $\tau(B)$ est égal à 1 ;
- (ii) Pour tout $r < 1$, tout recouvrement de B par des disques fermés de rayon r est infini ;
- (iii) Pour tout polynôme $P \in K[X]$, $\|P\|_A = \|P\|_B$.

Soit E l'espace de Banach des fonctions strictement analytiques sur A, muni de la norme de la convergence uniforme sur A. On sait que E s'identifie à $K\{X\}$, espace des séries restreintes à coefficients dans K, muni de la norme "sup des coefficients", et que l'espace E_0 des fonctions polynômes y est dense. Soient $E_{0,A}$ et $E_{0,B}$ l'espace des fonctions polynômes muni de la norme de la convergence uniforme sur A et sur B respectivement, et soient $E_A = E$ et E_B leurs complétés.

La restriction à B définit une bijection φ de E_A dans E_B si, et seulement si, B est infinie. Dire que B est frontière analytique équivaut à dire que φ est bijective et bicontinue. Donc, d'après le théorème de Banach, il existe M tel que,

$$\forall f \in E_A, \quad \|f\|_B \leq \|f\|_A \leq M \|f\|_B.$$

LEMME. -- Soient E et F deux algèbres de Banach sur K, et soit φ un homomorphisme d'algèbres injectif et continu de E dans F tel que $\|\varphi(x)\|_F \geq \|x\|_E$. Si la norme de F est multiplicative, φ est une isométrie.

En effet, φ étant continu, il existe M tel que,

$$\forall x \in E, \quad \|\varphi(x)\|_F \leq M \|x\|_E.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|\varphi(x^n)\|_F = \|\varphi(x)\|_F^n \leq M \|x^n\|_E \leq M \|x\|_E^n,$$

d'où

$$\|\varphi(x)\|_F \leq \|x\|_E.$$

La norme de E_A est multiplicative : la condition (iii) équivaut donc à la "densité analytique".

Rappelons que le diamètre transfini d'une partie B de K est défini de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\tau_n(B) = \sup_{x_1, \dots, x_n \in B} \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \right)^{2/n(n-1)},$$

on montre que la suite τ_n est non décroissante, le diamètre transfini de B est $\tau(B) = \lim \tau_n(B)$ (cf. par exemple [1] ou [3]).

Soient B satisfaisant à (iii), et $r < 1$: choisissons $b_1 \in B$, il existe $b_2 \in B$ tel que, si $Q_1(X) = X - b_1$, on ait

$$|Q_1(b_2)| > r.$$

On peut ainsi construire par récurrence une suite $b_1, \dots, b_n, \dots, b_n \in B$, telle que, si $Q_n(X) = (X - b_1) \dots (X - b_n)$, on ait

$$|Q_n(b_{n+1})| > r.$$

Alors

$$(\tau_n(B))^{n(n-1)/2} \geq \prod_{1 \leq i < j \leq n} |b_i - b_j| = \prod_{1 \leq i \leq n-1} |Q_i(b_{i+1})| > r^{n-1},$$

donc $\tau_n(B) > r^{2/n}$, d'où $\tau(B) = 1$.

Soit B une partie de A contenue dans une réunion de q disques fermés situés à des distances mutuelles majorées par d et de rayon r ; un calcul classique montre qu'alors

$$\tau(B) \leq d^{1-1/q} r^{1/q},$$

donc si $\tau(B) = 1$, la condition (ii) est satisfaite.

Supposons enfin que B satisfasse à (ii); pour montrer que (iii) est vraie, il suffit de montrer que si P est un polynôme unitaire à coefficients entiers, $P \in A[X]$; $\|P\|_B = 1$. En effet s'il en est ainsi, soit $P \in K[X]$, on peut représenter P sous la forme

$$P = p_0 P_0 + p_1 P_1 + \dots + p_k P_k,$$

où $P_i \in A[X]$, P_i unitaire et $p_i \in K$ avec $|p_0| = \|P\|_A > |p_1| > \dots > |p_n|$. Alors

$$\|P\|_B = |p_0| \|P_0\|_B = |p_0| = \|P\|_A.$$

Soit donc $Q \in A[X]$, Q unitaire : $Q(X) = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)$ où $\alpha_i \in A$. Quel que soit $r < 1$, d'après la condition (ii), il existe $b \in B$ et tel que $|b - \alpha_i| > r$, $i = 1, \dots, n$, donc $|Q(b)| > r^n$, d'où $\sup_{b \in B} |Q(b)| = 1$, ce qui achève la démonstration.

Exemple : Toute famille infinie de racines de l'unité a un diamètre transfini égal à 1 : c'est donc une frontière analytique.

2. Généralisation à d'autres quasi-connexes fermés.

Soient D un quasi-connexe de K , et B une partie de D ; nous dirons encore que B est analytiquement dense dans D , si toute fonction définie sur B et à valeurs dans K , qui y est fractions rationnelles sans pôles dans D , est prolongeable, de façon unique en une fonction analytique sur D . On déduit immédiatement de la proposition ci-dessus les corollaires suivants.

COROLLAIRE 1. - Soit D un disque fermé de rayon r ; une partie B de D y est analytiquement dense si, et seulement si, $\tau(B) = r$.

COROLLAIRE 2. - Soit $D = \{x \in K \mid |x - a| \geq r\}$; une partie B de D y est analytiquement dense si, et seulement si, $\tau(\frac{1}{B-a}) = \frac{1}{r}$ (où $\frac{1}{B-a}$ désigne l'image de B dans l'inversion $x \rightarrow \frac{1}{x-a}$).

Plus généralement, si l'espace $H(D)$ des fonctions strictement analytiques sur D se décompose en somme directe d'espaces $H(D_i)$, où D_i est un disque fermé ou le complémentaire d'un disque ouvert, nous pouvons encore caractériser les ensembles analytiquement denses.

Condition de Gruson. - Nous dirons qu'un fermé D de K est un ensemble de Gruson, s'il satisfait aux conditions suivantes :

- (i) D est borné, soit D_0 le plus petit disque fermé contenant D ;
- (ii) D contient au moins deux points ;
- (iii) Pour toute boule fermée b de rayon $r \in |K|$, contenue dans D_0 , l'ensemble des boules ouvertes de rayon r contenues dans b et rencontrant D est infini.

D étant fermé, son complémentaire dans D_0 est réunion disjointe d'une famille de boules ouvertes $(b_i)_{i \in I}$. Soit $D_i = D_0 \setminus b_i$, on a $D = D_0 \cap (\bigcap_{i \in I} D_i)$.

Soit D un fermé de Gruson, et soit $H(D)$ l'espace des fonctions analytiques sur D , c'est-à-dire le complété de l'algèbre des fractions rationnelles sans pôles dans D pour la filtration de la convergence uniforme sur D . L. GRUSON a montré ([2]) la proposition ci-après.

PROPOSITION (GRUSON). - Si D est un fermé de Gruson, l'espace de Banach $H(D)$ s'identifie par les restrictions à la somme directe de $H(D_0)$ et des $H_0(D_i)$

($i \in I$), où $H(D_0)$ est l'espace des fonctions strictement analytiques sur D_0 , et $H_0(D_i)$ l'espace des fonctions strictement analytiques sur D_i et nulles à l'infini.

De ce résultat, et de la proposition 1, on déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3. - Soit D un fermé de Gruson, $D = D_0 \cap (\bigcap_{i \in I} D_i)$ où D_0 est un disque fermé de rayon r et $D_i = \{x \in K \mid |x - \alpha_i| \geq r_i\}$. Pour qu'une partie B de D y soit analytiquement dense, il faut et il suffit que $\tau(B) = r$ et $\tau(\frac{1}{B - \alpha_i}) = \frac{1}{r_i}$, $i \in I$.

Exemples :

1° Soit D la couronne fermée $r_1 \leq |x| \leq r$; la condition de densité analytique s'écrit alors $\tau(B) = r$ et $\tau(\frac{1}{B}) = \frac{1}{r_1}$.

2° Soit D le complémentaire dans A d'une famille de disques ouverts D_i , dont les rayons r_i tendent vers zéro : c'est un fermé de Gruson, et on peut appliquer le corollaire 3.

3. Problèmes.

1° Quel sens raisonnable faut-il donner à la notion de frontière analytique dans un disque ouvert ?

2° Comment généraliser la proposition 1 au cas de plusieurs variables ? Plus précisément, si $K\{X_1, \dots, X_n\}$ est l'espace des séries restreintes en n variables, qui définit les fonctions analytiques sur le polydisque unité

$$A^n = \{X \mid |X_i| \leq 1, i = 1, \dots, n\},$$

$K[X_1, \dots, X_n]$ y est dense.

Il est alors naturel de dire qu'une partie B de A^n est une frontière analytique si toute limite uniforme sur B de polynômes est prolongeable de façon unique en une fonction analytique sur A^n . On voit que, grâce au lemme 1, ceci équivaut encore à la condition (iii) de la proposition 1 :

$$\|P\|_{A^n} = \|P\|_B, \quad \forall P \in K[X_1, \dots, X_n].$$

Pour cela il est nécessaire que, pour toute forme linéaire $\varphi \in (K^n)'$, de norme 1, on ait $\tau(\varphi(B)) = 1$ (sinon on peut construire des polynômes de la forme

$Q_k = \prod_{i=1}^k \varphi(X - a_i)$ tels que $\|Q_k\|_{A^n} = 1$ et $\|Q_k\|_B \rightarrow 0$), mais cette condition

n'est pas suffisante. Soit, par exemple, pour $n = 2$,

$$B = \{(X_1, X_2), X_1 = 0 \text{ ou } X_2 = 0\}.$$

Soit φ une forme linéaire $\varphi(X) = a_1 X_1 + a_2 X_2$, de norme $1 = \sup(|a_1|, |a_2|)$; alors $\varphi(B) = a_1 A \cup a_2 A = A$, or il est clair que

$$\|X_1 X_2\|_B = 0 < \|X_1 X_2\|_{A^2} = 1 \dots$$

On peut aussi montrer qu'une condition suffisante pour que B soit analytiquement dense est qu'il existe une famille dense d'hyperplans H_i tels que, pour tout i , $\tau(B \cap H_i) = 1$, mais il ne me semble pas, a priori, que cette condition soit nécessaire.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERTRANDIAS (Françoise). - Diamètre transfini dans un corps valué. Application au prolongement analytique, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, 5e année, 1963/64, n° 3, 13 p.
- [2] GRUSON (L.). - Algèbres de Banach ultramétriques, Journées Poitou-Aquitaine [1966. Poitiers] (à paraître).
- [3] HILLE (Einar). - Analytic function theory. Volume II. - Boston, Ginn and Company, 1962 (Introductions to higher Mathematics).

(Texte remis le 1^{er} février 1969)

Mme Yvette AMICE
 Prof. Fac. Sc. Poitiers
 Route de Chauvigny
 86 - POITIERS
