Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Benali Benzaghou

Sur le quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 10, n° 1 (1968-1969), exp. n° 1, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_1_A1_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des Nombres)
10e année, 1968/69, n° 1

18 novembre 1968

SUR LE QUOTIENT DE HADAMARD DE DEUX FRACTIONS RATIONNELLES

par Benali BENZAGHOU

1. Définitions et rappels.

1.1. Rappels sur l'algèbre de Hadamard. - Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro. $\mathcal{R}(K)$ est l'algèbre des séries formelles $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ à coefficients dans K représentant des fractions rationnelles (voir [1]) ; le produit (de Hadamard) est défini par

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n X^n \quad .$$

Plus précisément :

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K) \iff \exists\, q_1, \dots, q_h \in K, \quad a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \dots + q_h a_n,$$

pour tout $n \geqslant 0$,

$$\iff A = \frac{P(X)}{Q(X)} \in K(X), \quad Q(0) \neq 0, \quad \deg P < \deg Q \quad .$$

Si E est une partie de K,

$$\mathcal{R}(E, K) = \{A = \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(K), \quad a_n \in E \text{ pour tout } n\} \quad .$$

1.2. Problème du quotient. - Soient $A = \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$ et $B = \sum b_n X^n \in \mathcal{R}(K)$. Nous supposerons que $a_n = 0$ lorsque $b_n = 0$, et nous posons $a_n = b_n c_n$ en convenant que $c_n = 1$ lorsque $b_n = 0$ (nous pouvons toujours nous ramener à ce cas grâce à un théorème de Mahler [5]).

Il s'agit d'étudier des conditions suffisantes pour que $C = \sum c_n X^n \in \mathcal{R}(K)$.

G. PÓLYA a étudié le cas $b_n = n$ et $c_n \in \underset{\sim}{Z}$ ([7]), généralisé par D. G. CANTOR [3] :

Soient $A = \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{C})$, $b_n = P(n)$ où $P(X) \in \underset{\sim}{C}[X]$. Si c_n est un entier algébrique pour tout n, alors $\sum c_n X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{C})$.

Ce résultat est encore vrai pour une extension commutative quelconque de $\underset{\sim}{Q}$:

Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro ; soient $A = \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$, $b_n = P(n)$ où $P(X) \in K[X]$. Si $c_n = \frac{a_n}{P(n)}$ est un entier algébrique pour tout n , alors $\sum c_n X^n \in \mathcal{R}(K)$.

En effet, il existe un corps L ayant un degré de transcendance fini sur $\underset{\sim}{Q}$ et contenant tous les a_n , tous les coefficients de $P(X)$ et tous les coefficients de la récurrence entre les a_n . L est isomorphe à un sous-corps L' de $\underset{\sim}{C}$, et nous sommes ramenés au théorème de Cantor.

C. PISOT a étudié le cas où B a un pôle simple dominant ([6]).

Soient $A = \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{C})$, $B = \sum b_n X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{C})$, $b_n = \sum_{i=1}^{s} Q_i(n)\, \beta_i^n$. Si $|\beta_i| < |\beta_1|$ pour $i = 2, \dots, s$ et $\deg Q_1 = 0$, et si $c_n \in \underset{\sim}{Z}$ pour tout n , alors $\sum c_n X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{C})$.

Signalons ce résultat de J. F. RITT [8] :

Soit $\sum_{j=1}^{s} \lambda_j e^{\alpha_j z} = c(z) \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j e^{\beta_j z}$, $\lambda_j, \alpha_j, \mu_j, \beta_j \in \underset{\sim}{C}$. Si $c(z)$ est une fonction analytique entière, alors elle est de la forme $c(z) = \sum_{j=1}^{r} \nu_j e^{\gamma_j z}$, $\nu_j, \gamma_j \in \underset{\sim}{C}$.

Dans [1], nous avons caractérisé tous les éléments $A = \sum a_n X^n$ de $\mathcal{R}(\underset{\sim}{C})$ tels que $\sum_n X^n / a_n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{C})$. Plus généralement, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 0. - *Soit K un corps commutatif, de caractéristique zéro ; soit $\mathcal{S}$ le groupe des unités de $\mathcal{R}(K)$. Alors :*

$A = \sum a_n X^n \in \mathcal{S}$ <==> *il existe un entier* $m \geqslant 1$, $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1} \in K^*$,

tel que, pour $\mu = 0, 1, \dots, m-1$, $a_{\mu+tm} = a_\mu \alpha_\mu^t$, $\forall\, t$, $a_\mu \neq 0$.

Soit $A \in \mathcal{S}$,

$$a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \dots + q_h a_n , \qquad q_i \in K ,$$

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n)\, \alpha_i^n , \qquad \forall\, n .$$

Il existe un corps L ayant un degré de transcendance fini sur le sous-corps premier de K , que nous identifions à $\underset{\sim}{Q}$, et contenant tous les a_n et les q_i . L est isomorphe à un sous-corps de $\underset{\sim}{C}$, et nous sommes ramenés à [1].

1.3. Fonctions de Pólya. - La série formelle $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, à coefficients dans K , est une fonction de Pólya, s'il existe un entier $m \geqslant 1$ et des éléments $\alpha_0 , \alpha_1 , \ldots , \alpha_{m-1}$ de K tels que, pour $\mu = 0 , 1 , \ldots , m-1$, $a_{\mu+rm} = a_\mu \alpha_\mu^r$ pour tout r .

Les fonctions de Pólya forment une partie multiplicativement stable de $\mathcal{R}(K)$; le théorème 0 dit que les fonctions de Pólya à coefficients non nuls forment le groupe des unités de $\mathcal{R}(K)$.

1.4. Suites de Pólya. - Soient k un corps de nombres algébriques, $\mathfrak{A}$ son anneau d'entiers. Un idéal premier $\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{A}$ est un diviseur premier de la suite (c_n) de k , s'il existe un terme non nul de la suite de valuation $\mathfrak{P}$-adique non nulle.

$\mathcal{P}((c_n))$ désignera l'ensemble des diviseurs premiers de la suite (c_n) .

PÓLYA a caractérisé les suites (c_n) de $\underset{\sim}{Z}$ telles que $\mathcal{P}((c_n))$ soit fini et $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$ représente une fraction rationnelle. Il a montré que C est alors une fonction de Pólya [7].

Une suite (c_n) de k telle que $\mathcal{P}((c_n))$ soit fini sera dite une suite de Pólya de k .

Remarque. - Soit J le groupe des idèles de k ; pour $a \in k^*$, soit (a) l'idèle principal associé ; $(a) \in J_{S(a)}$, c'est-à-dire a_v est une unité pour tout $v \notin S(a)$. Soit (a_n) une suite de k^* :

$$(a_n) \text{ est une suite de Pólya de } k^* \iff \exists\, S \text{ fini} , \ S(a_n) \subset S , \ \forall\, n ,$$
$$\iff \exists\, S \text{ fini} , \ (a_n) \in J_S , \ \forall\, n ,$$

(les a_n sont des S-unités).

2. Enoncé du théorème principal.

THÉORÈME 1. - Soit K un corps commutatif, de caractéristique zéro.

Soient $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$, $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \in \mathcal{R}(K)$, $a_n = b_n c_n$ (en supposant que $a_n = 0$ si $b_n = 0$, et en convenant que $c_n = 1$ dans ce cas).

Si (c_n) est une suite de Pólya de $\underset{\sim}{Q}$, alors $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q})$, et C est une fonction de Pólya.

2.1. - Pour $b_n = 1$ et $a_n \in \underset{\sim}{Z}$ pour tout n, nous retrouvons le résultat de Pólya ([7]) :

PROPOSITION 1. - Soit $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Z}, \underset{\sim}{Q})$ tel que (a_n) soit une suite de Pólya de $\underset{\sim}{Q}$. Alors A est une fonction de Pólya, c'est-à-dire qu'il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que

$$A(X) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{a_\mu X^\mu}{1 - \alpha_\mu X^m} .$$

Remarques.

(a) Si $A \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q})$, il existe $q \in \underset{\sim}{Z}$ tel que $q^{n+1} a_n = u_n \in \underset{\sim}{Z}$ pour tout n. Si (a_n) est une suite de Pólya de $\underset{\sim}{Q}$, il en est de même de (u_n) ; ce qui prolonge immédiatement la proposition 1 à $\mathcal{R}(\underset{\sim}{Q})$.

(b) La proposition 1 redonne une autre démonstration (algébrique) du théorème 0 dans le cas $K = \underset{\sim}{Q}$. En effet, soit $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q})$, $a_n \neq 0$ pour tout n, tel que $\sum_{n=0}^{\infty} X^n / a_n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q})$. Il existe q_1 et q_2 de $\underset{\sim}{Z}$ tels que

$$u_n = q_1^{n+1} a_n \in \underset{\sim}{Z} , \qquad \forall\, n ,$$

$$v_n = q_2^{n+1} \frac{1}{a_n} \in \underset{\sim}{Z} , \qquad \forall\, n ,$$

d'où

$$u_n v_n = (q_1 q_2)^n ,$$

ce qui montre que (u_n), et par suite (a_n), sont des suites de Pólya de $\underset{\sim}{Q}$.

THÉORÈME 2 (de localisation). - Soit (a_n) une suite de Pólya de $\underset{\sim}{Q}$. Alors :

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q}) \iff \begin{cases} \text{pour tout nombre premier } p , \ A_p = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|_p X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q}), \\ A_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sgn}(a_n) X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q}) . \end{cases}$$

Remarques.

(a) Soit (a_n) une suite de $\underset{\sim}{Q}^*$.

(a_n) est une suite de Pólya $\iff$ pour presque tout p, $A_p = \delta$,

et nous avons une "formule du produit" dans $\mathcal{R}(\underset{\sim}{Q})$:

$$AA_0 \prod_p A_p = \delta \quad .$$

Notons que $AA_0 = \sum_n |a_n| X^n$ pour la valeur absolue archimédienne.

(b) Enonçons deux corollaires du théorème 2 :

Soit $A_p = \sum |a_n|_p X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q})$, où (a_n) est une suite de $\underset{\sim}{Q}_p$. Alors A_p est nécessairement une fonction de Pólya, et la suite $(v_p(a_n))$ est formée d'un nombre fini de progressions arithmétiques.

Soit $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{R})$. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{R}) \iff \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sgn}(a_n) X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{R}) \quad .$$

Pour démontrer le théorème 1, nous allons établir une série de lemmes.

3. Lemmes.

LEMME 3.1. - Soient $A = \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{C})$, $B = \sum b_n X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{C})$.

(a) Il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que, pour chaque $\mu = 0 , 1 , \dots , m - 1$,

$$A_{m,\mu} = \sum_{r=0}^{\infty} a_{\mu+rm} X^r , \qquad B_{m,\mu} = \sum_{r=0}^{\infty} b_{\mu+rm} X^r$$

satisfont à la propriété (r) :

(r) Soient $\{\alpha_i\}$ les pôles de $A_{m,\mu}$, $\{\beta_i\}$ ceux de $B_{m,\mu}$. Aucun des quotients $\frac{\alpha_i}{\alpha_j} , \frac{\beta_i}{\beta_j} , \frac{\alpha_i}{\beta_j} , \frac{\alpha_i \beta_j}{\alpha_j \beta_i}$ n'est une racine de l'unité autre que 1 .

(b) Si A et B satisfont à (r), et s'il existe une relation

$$a_{\mu+rm} = c_\mu \gamma_\mu^r b_{\mu+rm} \qquad \text{pour } r \geqslant r_0 ,$$

alors $a_n = c\gamma^n b_n$ pour tout n .

Si α est pôle de $A_{m,\mu}$, alors il existe α' pôle de A tel que $\alpha = \alpha'^m$. On considère tous les quotients $\frac{\alpha'_i}{\alpha'_j} , \frac{\beta'_i}{\beta'_j} , \frac{\alpha'_i}{\beta'_j} , \frac{\alpha'_i \beta'_j}{\alpha'_j \beta'_i}$ relatifs à A et B , et on choisit m tel qu'aucune puissance m-ième de ces quotients ne soit racine de l'unité autre que 1 .

Montrons (b). Soient $a_n = \sum_{i=1}^{\ell} P_i(n)\,\alpha_i^n$, $b_n = \sum_{i=1}^{\ell'} Q_i(n)\,\beta_i^n$. Par hypothèse,

$$a_{\mu+rm} = \sum_{i=1}^{\ell} P_i(\mu + rm)\,\alpha_i^{\mu}\,\alpha_i^{rm} = c_\mu\,\gamma_\mu^r \sum_{i=1}^{\ell'} Q_i(\mu + rm)\,\beta_i^{\mu}\,\beta_i^{rm} , \qquad r \geqslant r_0 .$$

Les α_i^m sont distincts, de même les β_i^m (par l'hypothèse (r)) ; d'où

$$\ell' = \ell ,$$

$$\alpha_i^m = \gamma_\mu\,\beta_i^m \Longrightarrow \alpha_i = \gamma\beta_i \quad (\text{par } r) ,$$

$$\text{d'où} \quad P_i(\mu + rm)\gamma^{\mu} = c_\mu\,Q_i(\mu + rm) \Longrightarrow P_i(X) = cQ_i(X) ,$$

$$\text{et} \qquad a_n = c\gamma^n\,b_n .$$

Remarque. - Il suffit de supposer $a_{\mu+rm} = c_\mu\,\gamma_\mu^r\,b_{\mu+rm}$ pour une infinité de r .

LEMME 3.2. - Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro. Soient $A = \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$, $B = \sum b_n X^n \in \mathcal{R}(K)$, et $a_n = b_n\,c_n$ (avec les conventions déjà utilisées).

Si la suite (c_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors elle est périodique (et $\sum c_n X^n \in \mathcal{R}(K)$).

Rappelons le résultat de MAHLER [5] :

Soient $A = \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$ et $I(A) = \{n \mid a_n = 0\}$. Si $I(A)$ est infini, alors $\sum_{n\in I(A)} X^n \in \mathcal{R}(K)$.

Soit c l'une d'une valeur prise une infinité de fois par la suite (c_n) ; $I_c = \{n \mid c_n = c\} = I(A - cB)$. Comme $A - cB \in \mathcal{R}(K)$, $\sum_{n\in I_c} X^n \in \mathcal{R}(K)$. Ce qui implique de plus que chaque valeur c est prise une infinité de fois.

LEMME 3.3. - Soit $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\underline{Q})$, et soit p un nombre premier. Alors il existe un entier $m \geqslant 1$ et un entier $\mu \leqslant m - 1$ tels que, pour $r \geqslant r_0$, $r \longmapsto v_p(a_{\mu+rm})$ soit une fonction affine.

Démonstration.

(a)

$$A \in \mathcal{R}(\underline{Q}) \Longrightarrow \exists\, q \in \underline{Z}^* , \quad q^{n+1}\,a_n = a'_n \in \underline{Z} , \quad \forall\, n ,$$

$$v_p(a_{\mu+rm}) = v_p(a'_{\mu+\varepsilon m}) - (\mu + rm + 1)\,v_p(q) ,$$

et il suffit d'établir le lemme pour $A \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{S})$.

(b) Soient E un anneau commutatif unitaire fini, et (a_n) une suite de E vérifiant une relation $a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \dots + q_h a_n$, pour tout $n \geqslant 0$, $q_i \in E$. Alors la suite (a_n) est périodique à partir d'un certain rang n_0 . Si q_h est inversible dans E , alors $n_0 = 0$ (suite strictement périodique).

Considérons :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ a_{n+h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & \dots & & 0 & 1 \\ q_h & q_{h-1} & & \dots & & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+h-1} \end{pmatrix} ,$$

$$U_{n+1} = M\, U_n \ ,$$

$$\exists\, T > 0 \ , \ n_0 \quad \text{tels que} \quad U_{n_0+T} = U_{n_0} \quad (\text{card } E \text{ fini}) \ ,$$

d'où

$$U_{n_0+T+n} = U_{n_0+n} \ , \qquad \forall\, n \geqslant 0 \ .$$

Si $\det M = (-1)^{h-1} q_h$ est inversible, $U_{n+T} = U_n$, $\forall\, n \geqslant 0$.

(c) Soit K un corps valué, de valuation discrète, à corps résiduel fini ; soient $\mathfrak{A}$ son anneau de valuation, $\mathfrak{U}$ son groupe d'unités. Soit (a_n) une suite de $\mathfrak{A}$ vérifiant $a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \dots + q_h a_n$, $\forall\, n \geqslant 0$, $q_i \in \mathfrak{A}$, $q_h \in \mathfrak{U}$. Alors il existe une sous-suite $(a_{\mu+rm})$ de valuation constante.

En effet, soit a_μ tel que $|a_\mu| = \inf\{|a_0| , \dots , |a_{h-1}|\}$. Posons

$$a_\mu = \pi^\nu a'_\mu \ , \quad a'_\mu \in \mathfrak{U} \ , \qquad \text{et} \qquad a_n = \pi^n a'_n \quad \text{pour tout } n \ ;$$

π étant une uniformisante de K . Les a'_n sont dans $\mathfrak{A}$, et vérifient la même récurrence que les a_n . Modulo l'idéal maximal de $\mathfrak{A}$, la suite $(\overline{a'_n})$ est strictement périodique ; il existe donc une sous-suite $(a'_{\mu+rm})$ d'unités.

(d) Soit K un corps valué, à valuation discrète et à corps résiduel fini. Soit (a_n) une suite de $\mathfrak{A}$ définie par

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n)\, \alpha_i^n \ , \qquad P_i(X) \in K[X] \ , \quad \alpha_i \in \mathfrak{A} \ ;$$

alors il existe une sous-suite $(a_{\mu+\varepsilon m})$ telle que $r \longmapsto v(a_{\mu+\varepsilon m})$ soit affine pour $r \geqslant r_0$.

Quitte à multiplier les a_n par une constante, on peut supposer les $P_i(X) \in \mathcal{A}[X]$. Considérons $\alpha_1 , \ldots , \alpha_\ell \in \mathcal{U}$, $\alpha_{\ell+1} , \ldots , \alpha_s \notin \mathcal{U}$, $0 \leqslant \ell \leqslant s$. Si $\ell = s$, c'est le cas (c). Si $\ell = 0$, posons $\alpha_j = \pi^{\nu_j} \alpha_j''$, $\alpha_j'' \in \mathcal{U}$, et soit $\nu = \inf_j (\nu_j)$. Posons $\alpha_j = \pi^{\nu} \alpha_j'$ pour chaque j , et $a_n' = \sum_{j=1}^{s} P_i(n) \, \alpha_j'^{n}$. Alors $a_n = \pi^{\nu n} a_n'$, et nous raisonnons sur la suite a_n' .

Supposons donc $0 < \ell < s$. Posons

$$u_n = \sum_{j=1}^{\ell} P_j(n) \, \alpha_j^n , \qquad v_n = \sum_{j=\ell+1}^{s} P_j(n) \, \alpha_j^n .$$

Soit $|\pi|^{\lambda} = \inf(|\alpha_{\ell+1}| , \ldots , |\alpha_s|)$, $\lambda > 0$, alors

$$|v_n| \leqslant |\pi|^{\lambda n} .$$

Les u_n vérifient une relation $u_{n+h} = q_1 \, u_{n+h-1} + \ldots + q_h \, u_n$, $\forall \, n$, où

$$1 - q_1 \, X - \ldots - q_h \, X^h = \prod_{j=1}^{\ell} (1 - \alpha_j)^{m_j+1} , \qquad m_j = \deg P_j ,$$

donc $q_j \in \mathcal{A}$ et $q_h \in \mathcal{U}$.

Par (c), il existe une sous-suite $(u_{\mu+rm})$ de valuation constante. D'où

$$v(a_{\mu+rm}) = \nu(\mu + rm) + v(u_{\mu+rm}) , \qquad r \geqslant r_0 ,$$

$r \longmapsto v(a_{\mu+rm})$ est affine.

Pour établir le lemme 3.3, soit $A = \sum a_n \, X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Z} , \underset{\sim}{Q})$,

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n) \, \alpha_i^n .$$

Soient k l'extension de $\underset{\sim}{Q}$ engendrée par les α_i et les coefficients des P_i , $\mathcal{A}$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $\mathcal{A}$ au-dessus de p . Soit K le complété de k pour la valuation $\mathfrak{P}$-adique. On applique (d) dans K dont la valuation prolonge celle de $\underset{\sim}{Q}_p$, en notant que les $\alpha_i \in \mathcal{A}$ (lemme de Fatou ([4])).

Remarque. - Le lemme peut s'énoncer pour un corps de nombres :

Soit (a_n) une suite d'un corps de nombres algébriques k telle que

$$\sum a_n \, X^n \in \mathcal{R}(k) .$$

Pour toute valuation non archimédienne v de k, il existe une sous-suite $(a_{\mu+rm})$ telle que $r \longmapsto v(a_{\mu+rm})$ soit affine pour $r \geqslant r_0$.

4. Démonstration du théorème 1.

Dans toute la suite, lorsque nous écrirons $a_n = b_n c_n$, nous supposerons que $a_n = 0$ lorsque $b_n = 0$, et dans ce cas nous prendrons $c_n = 1$.

Comme $I(C) = \{n \mid c_n = 0\} = I(A)$, par le théorème de Mahler nous pouvons supposer dans toute la suite $I(A) = \emptyset$. La démonstration se fera en quatre étapes, en prenant successivement $K = \underset{\sim}{Q}$, $\overline{\underset{\sim}{Q}}$ (clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}$), $\underset{\sim}{C}$, K quelconque.

4.1. $K = \underset{\sim}{Q}$. - La démonstration se fait par récurrence sur $\ell = \operatorname{card} \mathcal{P}((c_n))$.

$\ell = 0$, alors $c_n \in \{-1, +1\}$, et le lemme 3.3.

Nous pouvons toujours supposer que A et B vérifient la propriété (r) du lemme 3.1, sinon nous raisonnons sur chaque couple $A_{m,\mu}$, $B_{m,\mu}$.

Posons

$$c_n = \varepsilon_n p_1^{\varphi_1(n)} \cdots p_\ell^{\varphi_\ell(n)}, \qquad \varepsilon_n \in \{-1, +1\}, \quad \varphi_j(n) \in \underset{\sim}{Z}.$$

Il existe une sous-suite $(a_{\mu+rm_1})$ telle que

$$v_{p_1}(a_{\mu+rm_1}) = \lambda_1 r + s_1, \qquad \text{pour } r \geqslant r_1 \quad \text{(lemme 3.2)}.$$

De la suite $(b_{\mu+rm_1})$, nous pouvons extraire une sous-suite $(b_{\nu+rm_2})$ telle que

$$v_{p_1}(b_{\nu+rm_2}) = \lambda_2 r + s_2, \qquad \text{pour } r \geqslant r_2.$$

D'où il existe une sous-suite $(c_{\mu+rm})$ telle que

$$v_{p_1}(c_{\mu+rm}) = \lambda r + s, \qquad \text{pour } r \geqslant r_0.$$

Posons

$$a_{\mu+rm} = p_1^{s+\lambda r} a'_{\mu+rm}, \qquad r \geqslant r_0,$$

alors

$$a'_{\mu+rm} = c'_{\mu+rm} b_{\mu+rm}, \qquad r \geqslant r_0,$$

avec

$$c'_{\mu+rm} = \varepsilon_{\mu+rm} p_2^{\varphi_2(\mu+rm)} \cdots p_\ell^{\varphi_\ell(\mu+rm)}.$$

Par l'hypothèse de récurrence, $\sum_r c'_{\mu+rm} X^r$ est une fonction de Pólya. Il existe m' tel que

$$c'_{\nu+tm'} = c'_\nu \gamma'^t_\nu , \qquad t \in \mathbb{N} , \quad \nu = 0 , 1 , \dots , m' - 1 ,$$

d'où

$$a_{\nu+tm'} = c_\nu \gamma_\nu^t b_{\nu+tm'} , \qquad \text{pour } t \geqslant t_0 ,$$

et de nouveau, par le lemme 3.2,

$$a_n = c\gamma^n b_n , \qquad \text{pour tout } n .$$

4.2. $K = \overline{\mathbb{Q}}$. - Il existe une extension galoisienne k de degré fini sur $\mathbb{Q}$, contenant tous les a_n et tous les b_n ; soit G son groupe de Galois. Pour tout $\sigma \in G$,

$$\sigma A = \sum_n \sigma(a_n) X^n \in R(k)$$

et

$$N(A) = \sum_n N_{k/\mathbb{Q}}(a_n) X^n \in R(\mathbb{Q}) .$$

Soit $s = [k:\mathbb{Q}]$:

$$N_{k/\mathbb{Q}}(a_n) = c_n^s N_{k/\mathbb{Q}}(b_n) ,$$

et par **4.1**, $\sum_n c_n^s X^n$ est une fonction de Pólya. $D = C^s$ est donc inversible dans $R(k)$, et par suite C est inversible.

4.3. $K = \mathbb{C}$. - Il existe une $\mathbb{Q}$-algèbre L de type fini, contenant tous les a_n et tous les b_n ; il existe un $\mathbb{Q}$-homomorphisme φ de L dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Alors

$$\varphi(A) = \sum_n \varphi(a_n) X^n \in R(\overline{\mathbb{Q}}) ,$$

et

$$\varphi(a_n) = \varphi(b_n) c_n .$$

4.4. K corps commutatif de caractéristique zéro. - Il existe un corps K_1 ayant un degré de transcendance fini sur $\mathbb{Q}$, et contenant tous les a_n et tous les b_n . Il existe un isomorphisme de K_1 sur un sous-corps de $\mathbb{C}$.

5. Théorème de Pólya pour un corps de nombres.

THÉORÈME 3. - Soient k un corps de nombres algébriques, et (a_n) une suite de Pólya de k . Alors :

$$A = \sum a_n X^n \in \mathcal{R}(k) \iff A \text{ est une fonction de Pólya} .$$

Soient k' l'extension galoisienne engendrée par k, G son groupe de Galois, $N = N_{k'/\underset{\sim}{Q}}$.

Si A est une fonction de Pólya, il est immédiat que (a_n) est une suite de Pólya de k.

Soit (a_n) une suite de Pólya de k^*, alors $(N(a_n))$ est une suite de Pólya de $\underset{\sim}{Q}^*$. Si $A \in \mathcal{R}(k)$, alors $B = N(A) \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q})$, et B est donc inversible. Comme $B = A \prod_{\substack{\sigma \in G \\ \sigma \neq e}} \sigma A$, A est lui-même inversible dans $\mathcal{R}(k)$, et A est une fonction de Pólya, par 1.3.

Remarque. - J'ignore si le théorème 1 est encore valable si je prends pour (c_n) une suite de Pólya d'un corps de nombres.

6. Applications.

6.1. THÉORÈME 4. - Soient $A \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Z}, \underset{\sim}{Q})$, $B \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Z}, \underset{\sim}{Q})$, $a_n = b_n c_n$. Supposons que :

(1) $c_n \in \underset{\sim}{Z}$ pour tout n ;
(2) $\mathcal{P}((c_n)) \cap \mathcal{P}((b_n))$ fini ;
(3) $\sup_n \tau(c_n) < \infty$, où $\tau(d)$ est le nombre de diviseurs positifs de $d \in \underset{\sim}{Z}^*$, $\tau(0) = 0$.

Alors (c_n) est une suite de Pólya (et elle est périodique).

Pour $b_n = 1$ pour tout n, on retrouve un résultat de J. BERSTEL [2].

Nous pouvons toujours supposer que A et B satisfont à la propriété (r) du lemme 3.1.

Soit

$$a_n = \sum_{i=1}^{\ell} P_i(n) \alpha_i^n ,$$

$$a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \ldots + q_h a_n , \qquad q_j \in \underset{\sim}{Z} , \quad q_h \neq 0 .$$

Supposons que $\mathcal{P}((c_n))$ ne soit pas fini.

Soit $p_1 \in \mathcal{P}((c_n))$, $p_1 \notin \mathcal{P}((b_n))$, et p_1 ne divisant pas q_h. Modulo p_1, la suite $(\overline{c_n})$ est strictement périodique, d'où il existe une sous-suite $(c_{\mu_1 + r m_1})$

dont tous les termes sont divisibles par p_1 . Si $\mathcal{P}((c_{\mu_1+rm_1}))$ est fini, alors par le théorème 1, $\sum_r c_{\mu_1+rm_1} X^r$ est une fonction de Pólya, et il existe donc m' tel que

$$a_{\nu+rm'} = c_\nu \gamma_\nu^r b_{\nu+rm'} ,$$

d'où

$$a_n = c\gamma^n b_n ,$$

par le lemme 3.1 (b), et $\mathcal{P}((c_n))$ serait fini.

Il existe donc $p_2 \in \mathcal{P}((c_{\mu_1+rm_1}))$, $p_2 \notin \mathcal{P}((b_n))$, et p_2 ne divisant pas q_h , $p_2 \neq p_1$. Comme

$$a_{\mu_1+rm_1} = \sum_{i=1}^{\ell} P_i(\mu_1 + rm_1)\, \alpha_i^{\mu_1} (\alpha_i^{m_1})^r ,$$

le produit des $\alpha_i^{m_1}$ (avec leur multiplicité) est, au signe près, $q_h^{m_1}$; d'où la suite $(\bar{a}_{\mu_1+rm_1})$ modulo p_2 est strictement périodique. Il existe une sous-suite $(c_{\mu_2+rm_2})$ de $(c_{\mu_1+rm_1})$ dont tous les termes sont divisibles par p_2 . On construit ainsi une suite infinie de nombres premiers divisant les termes de sous-suites de (c_n) , contrairement à l'hypothèse $\sup_n \tau(c_n) < \infty$.

6.2. - Soient $a \in \underset{\sim}{Q}^*$, $a \neq \pm 1$, $(\varphi(n))$ une suite de $\underset{\sim}{Z}$. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{\varphi(n)} X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q}) \iff \sum_{n=0}^{\infty} a^{-\varphi(n)} X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q})$$

$$\iff \exists\, m \in \underset{\sim}{N} \text{ tel que, pour } \mu = 0 , 1 , \dots , m-1 ,$$

$$r \to \varphi(\mu + rm) \text{ soit affine .}$$

En effet, la suite $(a^{\varphi(n)})$ est de Pólya dans $\underset{\sim}{Q}$.

En particulier, soit (a_n) une suite de $\underset{\sim}{Q}_p$, alors

$$\sum_n |a_n|_p X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q}) \iff \exists\, m \in \underset{\sim}{N} \text{ tel que, pour } \mu = 0 , 1 , \dots , m-1 ,$$

$$r \longmapsto v_p(a_{\mu+rm}) \text{ soit affine .}$$

Soit $A \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q}_p)$, $a_n \neq 0$ pour tout n . Alors $a_n = p^{-v_p(a_n)} b_n$,

$$\sum_n |a_n|_p X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q}) \iff \sum_n b_n X^n .$$

En effet, $A_p = \sum |a_n|_p X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q})$ implique que A est une fonction de Pólya, et par suite est inversible dans $\mathcal{R}(\underset{\sim}{Q})$.

Posons $a_n = p^{-v_p(a_n)} b_n$. Si $\sum b_n X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q}_p)$, comme $(|a_n|_p)$ est une suite de Pólya de $\underset{\sim}{Q}$, $\sum \frac{a_n}{b_n} X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q})$, par le théorème 1.

6.3. - Soit $f(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} \in \underset{\sim}{Q}(X)$. Si f n'est pas constante, il n'existe pas d'ensemble fini de nombres premiers $\{p_1 , \dots , p_\ell\}$ tel que

$$f(n) = \pm p_1^{\omega_1(n)} \dots p_\ell^{\omega_\ell(n)} , \qquad \omega_j(n) \in \underset{\sim}{Z} ,$$

pour tout n (ou pour les n d'une progression arithmétique).

En effet, si un tel ensemble de nombres premiers existait, $(f(n))$ serait une suite de Pólya de $\underset{\sim}{Q}$, et comme $\sum_n P(n) X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q})$ et $\sum_n Q(n) X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q})$, $\sum_n f(n) X^n$ serait une fonction de Pólya.

Il existerait m tel que $\frac{P(\mu + rm)}{Q(\mu + \varepsilon m)} = \frac{P(\mu)}{Q(\mu)} \alpha_\mu^r$, $\forall\, r \implies f = \text{Cte}$.

Remarque. - Par le théorème de Cantor (1.4), il n'existe pas de fraction rationnelle $f(X) \in \underset{\sim}{C}(X)$ non polynôme telle que $f(n)$ soit entier algébrique pour tout n (ou pour tous les n d'une progression arithmétique).

6.4. - Soit $A = \sum \frac{\alpha_n}{\beta_n} X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q})$, avec $\alpha_n \in \underset{\sim}{Z}^*$, $\beta_n \in \underset{\sim}{Z}^*$, $\beta_n > 0$, $(\alpha_n , \beta_n) = 1$. Supposons que $\mathcal{P}((\alpha_n))$ soit fini, et que $\mathcal{P}((\alpha_n)) \cap \mathcal{P}((\beta_n)) = \emptyset$. Alors $\sum_n \alpha_n X^n$ et $\sum_n \beta_n X^n$ sont des fonctions de Pólya.

Il existe $q \in \underset{\sim}{Z}^*$ tel que $q^{n+1} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = u_n \in \underset{\sim}{Z}$,

$$q^{n+1} \alpha_n = \beta_n u_n .$$

Puisque $\mathcal{P}((\alpha_n))$ est supposé fini, $\mathcal{P}((\beta_n))$ est fini, de même $\mathcal{P}((u_n))$. D'où $\sum \frac{\beta_n}{\alpha_n} X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q})$, et A est une fonction de Pólya ; il existe m tel que

$$\frac{\alpha_{\mu+rm}}{\beta_{\mu+\varepsilon m}} = \frac{\alpha_\mu}{\beta_\mu} \gamma_\mu^r = \frac{\alpha_\mu}{\beta_\mu} \left(\frac{\alpha'_\mu}{\beta'_\mu}\right)^r .$$

Cas particulier : Soit (a_n) une suite de $\underset{\sim}{Z}^*$. Si $\sum_n \frac{X^n}{a_n} \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q})$, alors

$$\sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{Q}) .$$

Plus généralement, si (a_n) est une suite d'entiers algébriques non nuls telle que $\sum \frac{X^n}{a_n} \in R(\underset{\sim}{Q})$, alors $\sum a_n X^n \in R(\underset{\sim}{Q})$.

Notons, comme conséquence, que si $A \in R(\underset{\sim}{C})$ et $B \in R(\underset{\sim}{C})$, $c_n \in \underset{\sim}{Z}^*$ et $\sum \frac{b_n}{a_n} X^n \in R(\underset{\sim}{C})$ (en particulier si A est inversible), alors $\sum \frac{a_n}{b_n} X^n \in R(\underset{\sim}{Q})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENZAGHOU (Benali). - Sur l'algèbre de Hadamard des fractions rationnelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 9e année, 1967/68, n° 15, 16 p.

[2] BERSTEL (Jean). - Une application d'un théorème de Mahler aux propriétés arithmétiques des coefficients des séries rationnelles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266, 1968, Série A, p. 693-695.

[3] CANTOR (David G.). - On arithmetic properties of coefficients of rational functions, Pacific J. of Math., t. 15, 1965, p. 55-58.

[4] FATOU (P.). - Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math. Uppsala, t. 30, 1906, p. 335-400 (Thèse Sc. math. Paris, 1907).

[5] MAHLER (K.). - On the Taylor coefficients of rational functions, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 52, 1956, p. 39-48.

[6] PISOT (Charles). - Sur les fonctions arithmétiques analytiques à croissance exponentielle, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 222, 1946, p. 988-990.

[7] PÓLYA (G.). - Arithmetische Eigenschaften der Reihenentwicklungen rationaler Funktionen, J. für reine und angew. Math., t. 151, 1921, p. 1-31.

[8] RITT (J. F.). - On the zeros of exponential polynomials, Trans. Amer. math. Soc., t. 31, 1929, p. 680-686.

(Manuscrit reçu le 2.12.1968)

Benali BENZAGHOU
M. Ass. Fac. Sc. Alger
Maison des Etudiants arméniens
57 boulevard Jourdan
75 - PARIS 14e