Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Bénali Benzaghou

# Sur l'algèbre de Hadamard des fractions rationnelles

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 9, n° 2 (1967-1968), exp. n° 15, p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1967-1968__9_2_A1_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
9e année, 1967/68, n° 15



4 mars 1968

# SUR L'ALGÈBRE DE HADAMARD DES FRACTIONS RATIONNELLES

par Bénali BENZAGHOU

## 1. Algèbre de Hadamard.

### 1° Définitions.

Soit $A$ un anneau commutatif, unitaire, intègre, de caractéristique nulle. Soient $E = A^{\mathbb{N}}$ le $A$-module des suites à valeurs dans $A$, $(e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots)$ sa base canonique et $E_n = Ae_n$.

DÉFINITION 1. - L'algèbre de Hadamard de $A$, notée $\mathcal{H}(A)$, est la $A$-algèbre des endomorphismes $T$ de $E$ tels que $T(e_n) \in E_n$ pour chaque $n$.

Un élément $T$ de $\mathcal{H}(A)$ est défini par la suite $(t_n)$ où $T(e_n) = t_n e_n$.

$\mathcal{H}(A)$ est une sous-algèbre de $\mathrm{End}(E)$, commutative, unitaire. L'élément neutre $\delta$ de $\mathcal{H}$ est défini par $\delta(e_n) = e_n$ pour tout $n$. Nous définissons :

- $\theta \in \mathcal{H}(A)$ par $\theta(e_n) = ne_n$ pour tout $n$.
- pour chaque $\alpha \in A$, $h_\alpha \in \mathcal{H}(A)$ par $h_\alpha(e_n) = \alpha^n e_n$ pour tout $n$.

Remarque. - Si $T_0$ est un élément de $\mathcal{H}(A)$ tel que la suite associée $(t_n)$ ait tous ses éléments distincts, ( $\theta$ par exemple), $\mathcal{H}(A)$ est alors le commutant de $T_0$ dans $\mathrm{End}(E)$.

DÉFINITION 2.

- $\Theta(A)$ est la $A$-algèbre engendrée par $\theta$.
- $\mathcal{R}(A)$ est la $A$-algèbre engendrée par $\theta$ et tous les $h_\alpha$, $\alpha \in A$.

Un élément de $\Theta(A)$ est donc de la forme $P(\theta)$ où $P(X) \in A[X]$, la suite associée est $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Un élément $T$ de $\mathcal{R}(A)$ est de la forme $T = \sum_{i=1}^{k} P_i(\theta)\, h_{\alpha_i}$, où $P_i(X) \in A[X]$, et la suite associée est :

$$t_n = \sum_{i=1}^{k} P_i(n)\, \alpha_i^n$$

$\mathcal{R}(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{H}(A)$, commutative, unitaire ; $\Theta(A)$ est une sous-algèbre intègre de $\mathcal{R}(A)$.

2° Algèbre de Hadamard et séries formelles.

A un élément $T$ de $\mathcal{H}(A)$ , défini par sa suite $(t_n)$ , nous associons la série formelle $T(X) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n X^n$ .

Si nous définissons dans $A[[X]]$ une multiplication par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n X^n \star \sum_{n=0}^{\infty} t'_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} t_n t'_n X^n$$

(produit de Hadamard), nous avons un isomorphisme d'algèbres entre $\mathcal{H}(A)$ et $A[[X]]$.

$\mathcal{H}(A)$ n'est d'ailleurs que la représentation régulière de l'algèbre des séries formelles $A[[X]]$ munie du produit de Hadamard.

Nous pouvons également faire opérer $\mathcal{H}(A)$ dans $A[[X]]$ de la manière habituelle:

Soit $T \in \mathcal{H}$ et $(t_n)$ la suite associée

$$F(X) = \sum a_n X^n \longmapsto T(F(X)) = \sum t_n a_n X^n \quad .$$

$\theta$ s'interprète alors comme la dérivation $H = X \frac{d}{dX}$ et $h_\alpha$ comme la transformation qui à $F(X)$ associe $F(\alpha X)$ . En particulier, si $T \in \Theta$ , alors $F \longmapsto T(F)$ n'est autre que la dérivation $P(H)$ appliquée à $F$ .

PROPOSITION 1. - $T \in \mathcal{R}(A) \Longrightarrow T(X) \in A(X)$ .

Il suffit de le montrer pour $T = P(\theta)h_\alpha$ ou encore pour $T = P(\theta)$ . Or $P(\theta) = P(\theta)\,\delta$ et comme $\delta(X) = \frac{1}{1 - X}$ ,

$$T(X) = P(H)\left(\frac{1}{1 - X}\right) = \frac{Q(X)}{(1 - X)^m}$$

avec $m = d^\circ P + 1$ , $d^\circ Q < d^\circ P$ .

Si $T = \sum_{i=1}^{k} P_i(\theta)\, h_{\alpha_i}$ alors $T(X) = \sum_{i=1}^{k} \frac{Q_i(\alpha_i X)}{(1 - \alpha_i X)^{m_i}}$ .

$1/\alpha_i$ est un pôle de la fraction rationnelle $T(X)$ et son ordre est $d^\circ P_i + 1$ .

Remarques.

(a) La restriction de l'isomorphisme de $\mathcal{H}(A)$ sur $A[[X]]$ à $\mathcal{R}(A)$ n'est pas surjective sur $A(X)$ . L'image de $\mathcal{R}(A)$ est l'ensemble des fractions rationnelles $\frac{U(X)}{V(X)}$ telles que $d^\circ U < d^\circ V$ et $V(X) = b_0 \prod (1 - \alpha_i X)$ dans $A[X]$ avec $b_0$ inversible dans $A$ .

(b) Lorsque $A$ est de plus un corps algébriquement clos, alors l'image de $\mathcal{R}(A)$ est l'ensemble des fractions rationnelles sans pôle à l'origine et à l'infini.

(c) La représentation d'un élément $T$ de $\mathcal{R}(A)$ par $\sum_{i=1}^{k} P_i(\theta)\, h_{\alpha_i}$ est unique, cela résulte de l'unicité de la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.

3° Propriétés algébriques élémentaires de $\mathcal{K}(A)$ et de $\mathcal{R}(A)$ .

Notation. - $\mathcal{K}$ , $\mathcal{R}$ , $\Theta$ désigneront dans la suite toujours $\mathcal{K}(\underset{\sim}{C})$ , $\mathcal{R}(\underset{\sim}{C})$ et $\Theta(\underset{\sim}{C})$ où $\underset{\sim}{C}$ est le corps des nombres complexes.

A. Idempotents de $\mathcal{K}$ et de $\mathcal{R}$ .

PROPOSITION 2.

1° L'ensemble $\mathfrak{I} = \{T\ ,\ T \in \mathcal{K}$ et $T^2 = T\}$ a la puissance du continu.

2° $\mathfrak{I} \cap \mathcal{R} = \{T \mid T(X) = \dfrac{P(X)}{1 - X^m}$ , $P$ polynôme à coefficients dans $\{0\ ,\ 1\}$ et de degré $< m\ \}$ . $\mathfrak{I} \cap \mathcal{R}$ est dénombrable.

3° Si $T \in \mathfrak{I}$ et $T \notin \mathcal{R}$ , alors la série de Taylor $T(z)$ admet le cercle $|z| = 1$ comme cercle de coupure.

PROPOSITION 3. - Pour tout $m \in \underset{\sim}{N}$ , considérons $\Phi_{m,\mu}(X) = \dfrac{X^\mu}{1 - X^m}$ avec $\mu = 0\ ,\ 1\ ,\ \ldots\ ,\ m - 1$ .

1° Les $\Phi_{m,\mu}$ , pour $m$ fixé, sont des idempotents orthogonaux deux à deux.

2° Pour tout $T \in \mathcal{K}$ , notons $T_{m,\mu} = \Phi_{m,\mu}\, T$ alors

$$T = \sum_{\mu=0}^{m-1} T_{m,\mu} \quad .$$

3° Si $\zeta$ est une racine primitive $m$-ième de l'unité, on a :

$$mT_{m,\mu}(X) = \sum_{r=0}^{m-1} \zeta^{-r\mu}\, T(\zeta^r X) \quad .$$

4° Si $A \in \mathcal{R}$ , alors pour tout $(m\ ,\ \mu)$ , $A_{m,\mu} \in \mathcal{R}$ , et soit $T \in \mathcal{K}$ :

$$T \in \mathcal{R} \iff \exists\, m \text{ tel que } T_{m,\mu} \in \mathcal{R} \text{ pour } \mu = 0\ ,\ 1\ ,\ \ldots\ ,\ m - 1 \quad .$$

La proposition 2 est la formulation dans $\mathcal{K}$ de résultats classiques sur les séries de Taylor à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$ .

La proposition 3 résulte des remarques suivantes :

$$\delta = \sum_{\mu=0}^{m-1} \Phi_{m,\mu}$$

et

$$\sum_{r=0}^{m-1} \zeta^{-\mu r}\, \zeta^{rn} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \not\equiv \mu \pmod m \\ m & \text{si} \quad n \equiv \mu \pmod m \end{cases} .$$

PROPOSITION 4. - Notons $\mathcal{R}_{\alpha_1,\cdots,\alpha_s} = \Theta h_{\alpha_1} \oplus \Theta h_{\alpha_2} \oplus \ldots \oplus \Theta h_{\alpha_s}$, les $\alpha_i$ étant distincts.

Si $A \in \mathcal{R}_{\alpha,\zeta\alpha,\cdots,\zeta^{m-1}\alpha}$ où $\zeta$ est une racine primitive m-ième de l'unité, alors

$$A_{m,\mu} \in \mathcal{R}_{\alpha^m} .$$

En effet, $a_n = \sum_{i=0}^{m-1} P_i(n)(\zeta^i \alpha)^n$ d'où

$$a_{\mu+rm} = \alpha^{mr} \sum_{i=0}^{m-1} P_i(\mu + rm)\, \alpha^{\mu} = Q(r)(\alpha^m)^r .$$

Cette remarque permet de réduire le nombre de pôles d'une fraction rationnelle $A(X)$ lorsque ceux-ci se déduisent de l'un d'entre eux par multiplication par des racines de l'unité.

B. Racines de l'unité de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{R}$ .

PROPOSITION 5. - Soit $\Lambda_m = \{T ,\ T \in \mathcal{H} \text{ et } T^m = \delta\}$ .

1° $\Lambda_m$ a la puissance du continu.

2° $\Lambda_m \cap \mathcal{R} = \{T \mid T(X) = \dfrac{P(X)}{1 - X^m}$ où $P$ est un polynôme de degré $m - 1$ et à coefficients dans $\{1 , \zeta , \zeta^2 , \ldots , \zeta^{m-1}\}$ où $\zeta$ est une racine primitive m-ième de l'unité$\}$ . $\Lambda_m \cap \mathcal{R}$ est dénombrable.

3° Un élément $T$ de $\Lambda_m$ , ou bien est dans $\mathcal{R}$ , ou bien est tel que sa série de Taylor admette $|z| = 1$ comme ligne de coupure.

4° Soit $T \in \mathcal{H}$ tel que la série de Taylor $T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n$ ait un rayon de convergence $R$ non nul. Alors, il existe $\varepsilon \in \Lambda_2$ tel que $(\varepsilon T)(z)$ admette le cercle $|z| = R$ comme ligne de coupure.

$\Lambda_m$ a la puissance de $[0 , 1[$ où les nombres sont écrits sur la base $m$ , d'où 1°.

2° et 4° sont des propriétés classiques des séries de Taylor dont les coefficients ne prennent qu'un nombre fini de valeurs.

3° est un théorème de Fatou [4].

C. Eléments inversibles de $\mathcal{K}(A)$ . - Si $G$ est le groupe des éléments inversibles de l'anneau $A$ , $\mathcal{K}(G)$ est le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{K}(A)$ . En particulier, si $A$ est un corps $K$ , $\mathcal{K}(K^*)$ est le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{K}(K)$ .

Si $A$ est un sous-anneau de $\underset{\sim}{C}$ tel que $G$ soit fini, alors les éléments inversibles $T$ de $\mathcal{R}(A)$ sont de la forme $T(X) = \dfrac{P(X)}{1 - X^m}$ où $P$ est un polynôme de degré $m - 1$ , à coefficients dans $G$ . Par exemple, le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{R}(\underset{\sim}{Z})$ est $\Lambda_2$ .

Nous énonçons une condition suffisante pour un anneau $A$ , nous étudierons la nécessité dans le cas $A = \underset{\sim}{C}$ plus loin.

PROPOSITION 6. - Soit $(t_n)$ une suite de $A$ telle que :

$$\exists\, m \in \underset{\sim}{N} , \qquad \alpha_0 , \dots , \alpha_{m-1} \in G(A) , \qquad t_0 , \dots , t_{m-1} \in G(A)$$

tels que

$$t_{\mu+rm} = \alpha_\mu^r \, t_\mu \qquad \forall\, r \in \underset{\sim}{N} , \quad \forall\, \mu = 0 , 1 , \dots , m - 1 ,$$

alors $T \in \mathcal{R}(A)$ et est inversible dans $\mathcal{R}(A)$ .

En effet,

$$T(X) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n X^n = \sum_{\mu=0}^{m-1} T_{m,\mu}(X)$$

et

$$T_{m,\mu}(X) = \sum_{r=0}^{\infty} t_\mu X^\mu \alpha_\mu^r X^{rm} = \frac{t_\mu X^\mu}{1 - \alpha_\mu X^m}$$

et

$$T_{m,\mu}^{-1}(X) = \sum_{r=0}^{\infty} t_\mu^{-1} X^\mu \frac{X^{rm}}{\alpha_\mu^r} = \frac{t_\mu^{-1} X^\mu}{1 - \frac{X^m}{\alpha_\mu}} \quad .$$

Exemple. - Soit $A = K(Y)$ ; s'il existe $m \in \underset{\sim}{N}$ , $\alpha_0 , \dots , \alpha_{m-1}$ , $t_0 , \dots , t_{m-1}$ éléments non nuls de $K(Y)$ vérifiant la proposition 6, alors $\sum_{n=0}^{\infty} t_n(Y) X^n$ repré-

sente une fraction rationnelle à deux indéterminées $\frac{P(X , Y)}{Q(X , Y)}$ , ainsi que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{t_n(Y)}$

Par exemple, $T(X , Y) = \frac{X + Y}{1 - X^2}$ , alors $T^{-1}(X , Y) = \frac{1 + XY}{Y(1 - X^2)}$ (dans $\mathcal{H}(A)$ ).

## 2. Algèbre de Hadamard et séries convergentes.

Dans tout ce paragraphe, il s'agira de séries à coefficients dans $\underset{\sim}{C}$ .

PROPOSITION 7. - Soit $\mathcal{H}' = \{T \in \mathcal{H} \mid \overline{\lim_{n\to\infty}} |t_n|^{1/n} < +\infty\}$ . Alors $\mathcal{H}'$ est une sous-algèbre de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{R}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{H}'$ .

En effet, $\overline{\lim_n} |a_n b_n|^{1/n} \leqslant \overline{\lim_n} |a_n|^{1/n} . \overline{\lim_n} |b_n|^{1/n}$ . Nous identifierons, quand il n'y a pas de confusion possible, un élément $T$ de $\mathcal{H}'$ et la fonction analytique au voisinage de l'origine $T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n$ . Le produit de Hadamard de $T$ et $T'$ sera alors noté $T(z) \star T'(z)$ .

Soient $A \in \mathcal{H}'$ et $B \in \mathcal{H}'$ , $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ .

Si $\Gamma$ est une courbe simple entourant l'origine contenue dans le domaine de convergence commun de $A(z)$ et $B(z)$ , alors

$$C(z) = A(z) \star B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} A(x) B(\tfrac{z}{x}) \frac{dx}{x} .$$

Nous énoncerons seulement le théorème de multiplication des singularités de Hadamard (mais nous n'aurons pas à l'utiliser sous cette forme générale).

Soient $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ représentant des fonctions uniformes. Si $\gamma$ est un point singulier de $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ , alors :

(a) ou bien $\gamma = \alpha\beta$ où $\alpha$ est un point singulier de $A(z)$ et $\beta$ un point singulier de $B(z)$ ;

(b) ou bien tout arc de Jordan joignant $0$ à $\gamma$ contient au moins un point de la forme $\alpha\beta$ .

Si $A(z)$ et $B(z)$ n'ont que des points singuliers isolés, alors les points singuliers de $C(z)$ sont isolés et de la forme $\gamma = \alpha\beta$ .

Nous allons établir un théorème de factorisation dans $\mathcal{H}'$ qui jouera un rôle important dans toute la suite :

THÉORÈME 1. - Soient $F(z)$ et $G(z)$ deux fonctions :

(a) n'ayant chacune qu'un nombre fini de points singuliers ;

(b) holomorphes et uniformes dans $\underset{\sim}{C}$ en dehors des singularités ;

(c) nulles à l'infini ;

(d) analytiques au voisinage de l'origine.

Si leur produit de Hadamard au voisinage de l'origine est une fraction rationnelle n'ayant qu'un seul pôle, alors les deux fonctions F et G sont rationnelles.

Nous pouvons toujours supposer que la fraction rationnelle a son pôle en 1 . Soient au voisinage de l'origine,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

$$H(z) = F(z) \star G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)\, z^n \quad (P \text{ polynôme}) .$$

Nous avons besoin de plusieurs lemmes. Si $f(z)$ est une fonction entière, soit

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{r}$$

et

$$K(A , c) = \{f , \ f \text{ entière}, \ h(0) \leqslant A , \ h(\pi) \leqslant A , \ h(\pm \tfrac{\pi}{2}) \leqslant c\} .$$

LEMME 1 [1]. - Soit $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . Si $\overline{\lim_n} |a_n|^{1/n} < \infty$ , alors il existe une fonction entière de type exponentiel f telle que $a_n = f(n)$ , pour tout n .

Si F(z) définit une fonction nulle à l'infini holomorphe uniforme en dehors du secteur :

- $|z| = e^A$ et $|z| = e^{-A}$ avec $-c \leqslant \varphi \leqslant c < \pi$ où $\varphi = \arg z$ , $A > 0$
- $\varphi = -c$ et $\varphi = +c$ avec $e^{-A} \leqslant |z| \leqslant e^A$ ,

Alors f peut être choisie dans K(A , c) .

Soient d et B tels que $c < d < \pi$ , $A < B$ et $\Gamma$ la courbe composée des arcs de cercle $-d \leqslant \varphi \leqslant d$ avec $|z| = e^B$ et $|z| = e^{-B}$ et des segments $\varphi = d$ et $\varphi = -d$ avec $e^{-B} \leqslant |z| \leqslant e^B$ . Soit

$$f(s) = -\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{F(z)}{z^{s+1}}\, dz .$$

Pour $z \in \Gamma$ ,

$$|f(s)| \leqslant O(1) \sup_{z\in\Gamma} |z^{-s-1}| \leqslant O(1)\, e^{B|x|+d|y|}$$

et ceci quels que soient $d \geqslant c$ , $B \geqslant A$ .

Par ailleurs,

$$f(n) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma}\frac{F(z)}{z^{n+1}}\,dz = a_n \quad .$$

Remarque. - Si $F(z)$ avait un pôle à l'infini, en considérant $G(z)$ obtenue en retranchant à $F(z)$ un polynôme, on montrerait qu'il existe $f \in K(A , c)$ telle que $f(n) = a_n$ pour $n \geqslant n_0$ , $n_0$ ne dépendant que de l'ordre du pôle à l'infini.

LEMME 2 (théorème de Carlson) [1]. - Si $f \in K(A , c)$ avec $c < \pi$ et $f(n) = 0$ pour tout $n$ , alors $f = 0$ .

LEMME 3. - Si $f$ est une fonction entière de type exponentiel et si elle n'a qu'un nombre fini de zéros, alors

$$f(z) = e^{az}\,P(z) \qquad a \in \underset{\sim}{C} \ , \ (P \text{ polynôme}).$$

En effet, $f$ est d'ordre inférieur ou égal à $1$ et le théorème de factorisation de Weierstrass-Hadamard permet d'écrire :

$$f(z) = z^k . e^{g(z)} . \prod_{n=1}^{\alpha} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) e^{z/\alpha_n}$$

où les $\alpha_n$ sont les zéros de $f$ non nuls et $g$ un polynôme de degré $\leqslant 1$ .

LEMME 4 (approximations simultanées diophantiennes) [2]. - Soient $\alpha_1 , \ldots , \alpha_k$ des nombres réels de $]0 , 1)$ . Alors, quel que soit $h > 1$ , il existe des entiers $m , m_1 , \ldots , m_k$ tels que

$$\left|\alpha_j - \frac{m_j}{m}\right| < \frac{1}{mh} \qquad j = 1 , 2 , \ldots , k \quad .$$

Démonstration du théorème 1. - Par hypothèse, $F(z)$ et $G(z)$ n'ont qu'un nombre fini de points singuliers, $z_1 , \ldots , z_r$ pour $F$ , $z_{r+1} , \ldots , z_k$ pour $G$ . Soit $z_j = \rho_j\, e^{i\alpha_j}$

$\forall\, h > 1$ , $\exists\, m , m_1 , \ldots , m_k$ entiers tels que

$$\left|\frac{\alpha_j}{2\pi} - \frac{m_j}{m}\right| < \frac{1}{mh} \qquad j = 1 , \ldots , k \quad .$$

Sur chaque cercle de centre $0$ et de rayon $\rho_j$ , considérons les polygones réguliers de $m$ côtés ayant un sommet sur l'axe réel positif. Appelons $\mathcal{B}$ l'ensemble des arcs de milieux les sommets de ces polygones et d'angles inférieurs à $\frac{2\pi}{mh}$ .

Les points singuliers de $F(z)$ et $G(z)$ sont sur des arcs de $\mathcal{B}$ . Soient les idempotents $\Phi_{m,\mu}$ (proposition 3). Pour chaque $\mu$ , les points singuliers de $F_{m,\mu}(z)$ et $G_{m,\mu}(z)$ sont sur des arcs de $\mathcal{B}$ (proposition 3, 3°).

Nous avons $F_{m,\mu}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{\mu+rm} z^{\mu} z^{rm}$ . Posons $z^m = t$ et considérons

$$\varphi_{\mu}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{\mu+rm} t^r \qquad \text{et} \qquad \psi_{\mu}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} b_{\mu+rm} t^r \ .$$

Alors, les points singuliers de $\varphi_{\mu}(t)$ et $\psi_{\mu}(t)$ sont sur des arcs centrés sur l'axe réel positif et d'angles inférieurs à $\frac{2\pi}{h}$ . En choisissant $h > 4$ , tous ces points singuliers sont dans un compact du demi-plan $\mathcal{R}(z) > 0$ et nous pouvons les enfermer dans des secteurs définis au lemme 1.

Il existe $f_{\mu} \in K(A_1 , c_1)$ et $g_{\mu} \in K(A_2 , c_2)$ avec $c_1 < \frac{\pi}{2}$ , $c_2 < \frac{\pi}{2}$ telles que

$$a_{\mu+rm} = f_{\mu}(r) , \qquad b_{\mu+rm} = g_{\mu}(r) \ .$$

Or, $f_{\mu}(r).g_{\mu}(r) = P(\mu + rm) = P_{\mu}(r)$ par hypothèse, $P_{\mu}$ polynôme, et comme $f_{\mu}(z)\, g_{\mu}(z) - P_{\mu}(z) \in K(A_1 + A_2 , c_1 + c_2)$ et $c_1 + c_2 < \pi$ , nous avons

$$f_{\mu}(z)\, g_{\mu}(z) = P_{\mu}(z) \qquad \text{pour tout } z \quad \text{(lemme 2)}$$

et

$$f_{\mu}(z) = e^{\theta_{\mu} z} Q_{\mu}(z) \qquad g_{\mu}(z) = e^{\gamma_{\mu} z} R_{\mu}(z) \qquad \text{avec } e^{\theta_{\mu}+\gamma_{\mu}} = 1 , \ Q_{\mu} R_{\mu} = P_{\mu} \ \text{(lemme 4)}$$

d'où

$$\varphi_{\mu}(t) = \frac{A_{\mu}(t)}{(1 - u_{\mu} t)^{s_{\mu}}} \qquad \psi_{\mu}(t) = \frac{B_{\mu}(t)}{(1 - v_{\mu} t)^{\ell_{\mu}}}$$

et par la proposition 3,

$$F(z) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{z^{\mu} A_{\mu}(z^m)}{(1 - u_{\mu} z^m)^{s_{\mu}}} \qquad G(z) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{z^{\mu} B_{\mu}(z^m)}{(1 - v_{\mu} z^m)^{\ell_{\mu}}} \ .$$

COROLLAIRE. - Si $H(z)$ a un pôle simple, alors les pôles de $F(z)$ et $G(z)$ sont simples. En particulier, si $F(z) \star G(z) = \frac{1}{1 - z}$ , alors

$$F(z) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{A_{\mu} z^{\mu}}{1 - \alpha_{\mu} z^m} \qquad \text{et} \qquad G(z) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{A_{\mu}^{-1} z^{\mu}}{1 - \frac{z^m}{\alpha_{\mu}}} \qquad A_{\mu} \in \underset{\sim}{C}^* , \ \alpha_{\mu} \in \underset{\sim}{C}^* \ .$$

## 3. Éléments inversibles de $\mathcal{R}(\underset{\sim}{C})$ .

Soit $A \in \mathcal{R}$ et $(a_n)$ la suite associée. Une condition nécessaire pour que $A$ soit inversible dans $\mathcal{R}$ est évidemment que $a_n \neq 0$ , pour tout $n$ . Concernant les éléments de $\mathcal{R}$ qui ont une infinité de coefficients nuls, nous avons le résultat suivant :

PROPOSITION 8. - *Soit* $A \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{C})$ , $A(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ , $I(A) = \{n \ , \ a_n = 0\}$ . *Si* $I(A)$ *est infini, alors, il est contenu dans une partie finie* $I'$ *de* $\underset{\sim}{N}$ *et un nombre fini de progressions arithmétiques* $I_{\mu_1}$ , ... , $I_{\mu_k}$ *de même raison. Si les coefficients* $a_n$ *sont algébriques sur* $\underset{\sim}{Q}$ , *alors cette inclusion est une égalité.*

Lorsque les coefficients $a_n$ sont algébriques, c'est un théorème de Mahler ([6] ou [7]) que nous pouvons énoncer, $\overline{\underset{\sim}{Q}}$ désignant la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}$ (*) :

*Soit* $A \in \mathcal{R}(\overline{\underset{\sim}{Q}})$ *tel que* $I(A)$ *soit infini. Alors, il existe* $m \in \underset{\sim}{N}$ , $\mu_1$ , ... , $\mu_k \in (0 \ , \ m-1)$ *tels que* $A_{m,\mu_j} = 0$ , $j = 1 \ , \ 2 \ , \ \dots \ , \ k$ , *et pour les autres* $\mu$ , $I(A_{m,\mu})$ *est fini.*

Établissons la première partie de la proposition 8 : il existe $b_0$ , $b_1$ ,..., $b_r$ , éléments de $\underset{\sim}{C}$ tels que

$$b_0 a_{n+r} + b_1 a_{n+r-1} + \dots + b_r a_n = 0 \qquad \forall \ n \ .$$

Soit $L = \underset{\sim}{Q}[a_0 \ , \ a_1 \ , \ \dots \ , \ a_{r-1} \ , \ b_0 \ , \ \dots \ , \ b_r]$ . C'est un anneau intègre, de type fini sur $\underset{\sim}{Q}$ , il existe [5] un $\underset{\sim}{Q}$-homomorphisme $\varphi$ de $L$ dans $\overline{\underset{\sim}{Q}}$ tel que $\mu(b_j) \neq 0$ pour $b_j \neq 0$ . Comme $\varphi(b_0)\,\varphi(a_{n+r}) + \dots + \varphi(b_r)\,\varphi(a_n) = 0$ :

$$G(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a_n) X^n \in \mathcal{R}(\overline{\underset{\sim}{Q}}) \qquad \text{et} \qquad I(F) \subset I(G) \ .$$

THÉORÈME 2. - *Soit* $F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ , $a_n \in \underset{\sim}{C}^*$ . *Pour que* $F(X)$ *et* $G(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{a_n}$ *représentent des fractions rationnelles, il faut et il suffit que la suite* $(a_n)$ *soit formée, à partir d'un certain rang, d'un nombre fini de progressions géométriques.*

PROPOSITION 9. - *Soit* $A \in \mathcal{R}(\underset{\sim}{C}^*)$ .

$A$ *inversible dans* $\mathcal{R}$ $\iff$ $\exists \ m \in \underset{\sim}{N} \mid A_{m,\mu}(X) = \dfrac{A_\mu X^\mu}{1 - \alpha_\mu X^m}$ $(A_\mu \in \underset{\sim}{C}^* \ , \ \alpha_\mu \in \underset{\sim}{C}^* \ , \ \mu = 0 \ , \ 1 \ , \ \dots \ , \ m-1)$ .

---

(*) C. LECH a généralisé le théorème de Mahler pour un corps commutatif quelconque, de caractéristique zéro (A note on recurring series, Arkiv för Mat., t. 2, 1953, p. 417-421.

Cette proposition, et le théorème 2, résultent de la proposition 6 et du corollaire du théorème 1.

En termes de suites dans $\underset{\sim}{C}^*$ , nous avons l'énoncé :

Pour qu'une suite $(a_n)$ de $\underset{\sim}{C}^*$ vérifie une relation de récurrence linéaire à coefficients constants et que la suite $(\frac{1}{a_n})$ vérifie une récurrence du même type, il faut et il suffit que la suite $(a_n)$ soit formée d'un nombre fini de progressions géométriques.

Si A est un sous-anneau de $\underset{\sim}{C}$ , les éléments inversibles de $\mathcal{R}(A)$ sont inversibles dans $\mathcal{R}(\underset{\sim}{C})$ , d'où

PROPOSITION 10. - Soit A un sous-anneau de $\mathcal{R}(\underset{\sim}{C})$ . Pour que $F \in \mathcal{R}(A)$ soit inversible dans $\mathcal{R}(A)$ , il faut et il suffit qu'il existe $m \in \underset{\sim}{N}$ , tel que

$$F_\mu(X) = \frac{A_\mu X^\mu}{1 - \alpha_\mu X^m} \qquad \text{pour } \mu = 0, 1, \dots, m-1 ,$$

les $A_\mu$ et $\alpha_\mu$ étant des éléments inversibles de l'anneau A .

En particulier, si nous prenons $A = \underset{\sim}{Z}$ , nous retrouvons un résultat classique signalé en I - C .

Nous allons donner quelques applications du théorème 2. Soit $H \in \mathcal{K}'$ et considérons l'application de $\mathcal{K}'$ dans $\mathcal{K}'$ définie par $F \longmapsto H.F$ . C'est un opérateur de convolution qui, à $F(z) \in \mathcal{K}'$ , associe

$$G(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma F(u)\, H(\frac{z}{u})\, \frac{du}{u}$$

où $\Gamma$ est une courbe simple entourant l'origine et contenue dans le domaine de convergence de $F(z)$ et de $H(z)$ . Lorsque H est inversible dans $\mathcal{K}'$ , nous avons $F = H^{-1}.G$ .

Nous pouvons caractériser de tels opérateurs de convolution dont les noyaux $H(z)$ et $H^{-1}(z)$ sont des fractions rationnelles.

PROPOSITION 11. - Soit $H \in \mathcal{K}'$ , inversible dans $\mathcal{K}'$ . Soit $F \in \mathcal{K}'$ et $\Gamma$ une courbe simple entourant l'origine convenablement choisie. Alors, les opérateurs de convolution

$$F(z) \longmapsto G(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma F(u)\, H(\frac{z}{u})\, \frac{du}{u}$$

et

$$G(z) \longmapsto F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma G(u)\, H^{-1}(\frac{z}{u})\, \frac{du}{u}$$

sont à noyaux rationnels, si, et seulement si,

$$H(u) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{A_\mu u^\mu}{1 - \alpha_\mu u^m} , \qquad A_\mu \in \underset{\sim}{C}^* , \quad \alpha_\mu \in \underset{\sim}{C}^* .$$

Et alors

$$H^{-1}(u) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{A_\mu^{-1} u^\mu}{1 - \alpha_\mu^{-1} u^m}$$

et

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma G(u) \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{A^{-1} u^\mu z^{m-1-\mu}}{u^m - \alpha_\mu^{-1} z^m} du .$$

$\Gamma$ doit être choisie dans le domaine de convergence de $F(z)$ et laissant les points $\alpha_\mu$ et $\alpha_\mu^{-1}$ à son extérieur.

PROPOSITION 12. - Soit $A \in \mathcal{R}$, inversible dans $\mathcal{R}$. Alors, l'équation $AY = B$ admet une solution dans $\mathcal{R}$ quel que soit $B \in \mathcal{R}$.

Ce résultat donne une réponse dans ce cas très particulier au problème suivant : $\sum a_n X^n$ et $\sum b_n X^n$ représentant des fractions rationnelles, dans quels cas $\sum \frac{b_n}{a_n} X^n$ représente encore une fraction rationnelle ?

La proposition 12 se généralise immédiatement en la proposition suivante :

PROPOSITION 13. - Soit un système de $r$ équations linéaires à $r$ inconnues $Y_1, \ldots, Y_r$, à coefficients dans $\mathcal{R}$ :

$$\sum_{j=1}^{r} A_{k,j} Y_j = B_k \qquad k = 1, \ldots, r .$$

Pour que ce système admette une solution dans $\mathcal{R}$ quels que soient les $B_k$ dans $\mathcal{R}$, il faut et il suffit que le déterminant $\Delta$ des $A_{k,j}$ soit inversible dans $\mathcal{R}$. La solution est alors unique et est donnée par les formules de Cramer.

Donnons enfin une application aux opérateurs différentiels. Soit $A \in \mathcal{R}$,

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} P_i(n) e^{\alpha_i n} .$$

Considérons la fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\underset{\sim}{C}$

$$a(x) = \sum_{i=1}^{k} P_i(x) e^{\alpha_i x}$$

$x \longmapsto a(x)$ est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants. Considérons l'idéal des dérivations linéaires à coefficients constants qui annulent la fonction $a(x)$, et soit $D$ un générateur de cet idéal principal. Nous avons

$$D(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ker} D = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i \, e^{\alpha_i x}$$

$E_i$ espace vectoriel des polynômes de $d^\circ \leqslant d^\circ P_i$.

PROPOSITION 14. - Soit $a(x) \in \operatorname{Ker} D$ et supposons que $a(x) \neq 0$ pour tout $x \in \underset{\sim}{R}$.

Une condition nécessaire pour qu'il existe une dérivation $\Delta$ linéaire à coefficients constants telle que $\Delta(\frac{1}{a}) = 0$ est que

$$\operatorname{Ker} D \subset \bigoplus_{j=1}^{km} \underset{\sim}{C} e^{\alpha_j x} ,$$

où les $e^{\alpha_j}$ sont les racines de $m$ équations $z^m = \beta_r$, $r = 0, 1, \ldots, m-1$ ; $\beta_r \in \underset{\sim}{C}^*$.

Si $a(x) = \sum_{j=1}^{km} \lambda_j e^{\alpha_j x}$, la condition devient suffisante, si les $\lambda_j$ sont tels que $\sum_{n=0}^{\infty} a(n) X^n$ est inversible dans $\mathcal{R}$.

Remarque. - Pour un corps commutatif quelconque $K$, de caractéristique zéro, nous pouvons énoncer seulement ce résultat très partiel qui se démontre par identification :

Soit $a_n = P_1(n) + P_2(n) \alpha^n$, $a_n \neq 0$ pour tout $n$. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ est inversible dans $\mathcal{R}(K)$, si, et seulement si, $P_1$ et $P_2$ sont de degré zéro, et $\alpha$ est une racine de l'unité.

## 4. Sous-algèbre $\mathfrak{M}$.

Nous allons considérer systématiquement les fonctions qui vérifient les hypothèses du théorème 1.

DÉFINITION 3. - Une fonction $z \longmapsto F(z)$ appartient à $\mathfrak{M}$ si :

1° elle n'a qu'un nombre fini de points singuliers dans $\underset{\sim}{C}$ ;

2° elle est holomorphe uniforme dans le complémentaire de l'ensemble de ces points singuliers ;

3° elle a au plus un pôle à l'infini ;

4° elle est analytique au voisinage de l'origine.

Par exemple $z \to \exp(\frac{1}{z^2 - 1}) \in \mathfrak{M}$ .

PROPOSITION 15. - $\mathfrak{M}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{H}'$ , $\mathfrak{R}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{M}$ .

Soit $F \in \mathfrak{M}$ ; en considérant les séries de Laurent de $F(z)$ au voisinage de chaque point singulier, nous pouvons écrire

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} F_i(z) + P(z)$$

où $F_i(z)$ est une fonction uniforme n'ayant qu'un seul point singulier, et $P$ un polynôme.

D'après un théorème de Faber-Lau [3], il existe une fonction entière $\varphi_i$ de type exponentiel minimal telle que, au voisinage de l'origine,

$$F_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_i^n \varphi_i(n) z^n$$

d'où, si $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ;

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^n \varphi_i(n) \qquad \text{pour} \quad n \geqslant n_0 .$$

Il en résulte que le produit de Hadamard de deux fonctions de $\mathfrak{M}$ est encore une fonction de $\mathfrak{M}$ .

Les polynômes sont évidemment des fonctions de type minimal. La proposition 15 résulte également du théorème de composition des singularités de Hadamard (§ 2).

En tenant compte de la remarque sur le lemme 1 du paragraphe 2, nous pouvons énoncer le théorème 1 ainsi :

PROPOSITION 16. - Si $F \in \mathfrak{M}$ , $G \in \mathfrak{M}$ et si $F.G$ est une fraction rationnelle ayant un seul pôle, alors $F$ et $G$ sont des fractions rationnelles.

Plus généralement,

THÉORÈME 3.

1° Si un élément $F$ de $\mathfrak{M}$ vérifie une équation algébrique à coefficients dans

$\mathcal{R}$ et de terme constant dans un $\mathcal{R}_\alpha$ , alors $F \in \mathcal{R}$ .

2° Si un élément $F$ de $\mathcal{M}$ est algébrique sur $\mathcal{M}$ et si le terme constant de son équation est dans un $\mathcal{R}_\alpha$ , alors $F \in \mathcal{R}$ .

3° Ces résultats sont encore valables si le terme constant est dans un $\mathcal{R}_{\alpha,\zeta\alpha,\cdots,\zeta^{m-1}\alpha}$ , où $\zeta$ est une racine primitive m-ième de l'unité.

En effet, si $F$ vérifie :

$$A_0 T^s + A_1 T^{s-1} + \ldots + A_s = 0 \qquad A_0 , \ldots , A_{s-1} \in \mathcal{M} , \quad A_s \in \mathcal{R}_\alpha ,$$

alors

$$T(A_0 T^{s-1} + \ldots + A_{s-1}) = - A_s ,$$

et il suffit d'appliquer les propositions 15 et 16.

Un corollaire immédiat du théorème 3 est :

PROPOSITION 17. - Si un élément $F$ de $\mathcal{M}$ est algébrique sur $\Theta$ , alors il est dans $\mathcal{R}$ . Le résultat est encore valable si on remplace $\Theta$ par $\mathcal{R}_{\alpha,\zeta\alpha,\cdots,\zeta^{m-1}\alpha}$ .

PROPOSITION 18. - L'équation $T^k = P(\theta)$ a une solution dans $\mathcal{R}$ , si, et seulement si, le polynôme $P(X)$ est la puissance k-ième d'un polynôme.

Si $P(X) = Q^k(X)$ , alors $Y = Q(\theta)$ est solution et nous obtenons toutes les autres solutions en multipliant $Q(\theta)$ par les éléments de $\Lambda_k$ (proposition 5).

Réciproquement, si $Y$ est une fraction rationnelle telle que $Y^k = P(\theta)$ , $Y = \sum a_n X^n$ , le même raisonnement que celui utilisé pour démontrer le théorème 1 montre qu'il existe $m \in \underset{\sim}{N}$ tel que :

$$(\Phi_{m,\mu} Y)^k = P_\mu ,$$

et $f_\mu \in K(A , c)$ avec $c < \frac{\pi}{k}$ telle que $a_{\mu+rm} = f_\mu(r)$ .

$$f_\mu^k(z) = P(\mu + mz) = P_\mu(z)$$

d'où

$$f_\mu(z) = Q_\mu(z)\, e^{\alpha_\mu z} \qquad \mu = 0 , 1 , \ldots , m - 1 ,$$

en particulier,

$$f_0(z) = Q_0(z)\, e^{\alpha_0 z} \qquad \text{avec} \quad e^{k\alpha_0} = 1 .$$

d'où $Q_0^k(z) = P(mz)$ . Ce même type de raisonnement s'applique à d'autres équations, par exemple $T^2 + P_1(\theta)T + P_2(\theta) = 0$ .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BUCK (R. Creighton). - A class of entire functions, Duke math. J., t. 13, 1946, p. 541-559.

[2] CASSELS (J. W. S.). - An introduction to diophantine approximation. - Cambridge, at the University Press, 1957 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, 45).

[3] FABER (Georg). - Uber die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorscher Reihen, Math. Annalen, t. 57, 1903, p. 369-388.

[4] FATOU (P.). - Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math., Uppsala, t. 30, 1906, p. 335-400 (Thèse Sc. math. Paris, 1907).

[5] LANG (Serge). - Algebra. - Palo Alto, London, New York [etc.], Addison-Wesley publishing Co, 1965 (Addison-Wesley Series in Mathematics).

[6] MAHLER (Kurt von). - Eine arithmetische Eigenschaft der Taylor-koffizienten rationaler Funktionen, Proc. Ned. Akad. Wet., t. 38,,1935, p. 50-60.

[7] PISOT (Charles). - Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques. - Montréal, Université de Montréal, 1963 (Séminaire de Mathématiques supérieures, 5).