Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

Jean-Louis Nicolas

Répartition des nombres premiers

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 9, n° 2 (1967-1968), exp. n° G6, p. G1-G4

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1967-1968__9_2_A12_0>

Groupe d'Etude de
THÉORIE DES NOMBRES
Année 1967/68, n° 6

15 janvier 1968

RÉPARTITION DES NOMBRES PREMIERS

par Jean-Louis NICOLAS

1. Théorème des nombres premiers.

Rappel de définition.

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1 \; ; \qquad \theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p \; ; \qquad \psi(x) = \sum_{\substack{(m,p) \\ p^m \leqslant x}} \log p$$

où p décrit l'ensemble des nombres premiers, et m est entier $\geqslant 1$. On remarque que $\exp(\theta(x))$ est le produit de tous les nombres premiers au plus égaux à x, et que $\exp(\psi(x))$ est le plus petit commun multiple des nombres entiers au plus égaux à x. De plus, on a :

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta(x^{1/2}) + \ldots + \theta(x^{1/m}) = \sum_{p \leqslant x} \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p$$

avec $m = \left[\frac{\log x}{\log 2}\right]$ en désignant par $[u]$ la partie entière de u.

THÉORÈME 1. - Quand $x \to \infty$, on a :

$$\theta(x) = x + O(xe^{-c\sqrt{\log x}})$$

$$\psi(x) = x + O(xe^{-c\sqrt{\log x}})$$

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O(xe^{-c\sqrt{\log x}})$$

où $\operatorname{li} x = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$.

2. Différence entre deux nombres premiers consécutifs.

On désigne par p_n le n-ième nombre premier, et on pose $d_n = p_n - p_{n-1}$. Comme $\pi(p_n) = n$, on a

$$p_n \sim n \log n$$

et

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} d_i = \frac{1}{N} p_N \sim \log N \sim \log p_N .$$

THÉORÈME 2 (RANKIN [4]). - Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité de n qui vérifient :

$$p_{n+1} - p_n \geqslant (e^{\gamma} - \varepsilon) \log p_n \frac{\log_2 p_n \log_4 p_n}{\log_3^2 p_n}$$

où γ est la constante d'Euler $(e^{\gamma} = 1{,}78)$.

THÉORÈME 3. - Il existe un nombre $\tau < 1$ tel que, pour tout n, on ait :

$$p_{n+1} - p_n \leqslant p_n^{\tau} .$$

On peut prendre $\tau = \frac{5}{8}$, et même un peu moins ; l'hypothèse de Riemann permet de prendre $\tau = \frac{1}{2} + \varepsilon$ pour tout ε.

Remarque. - On voit que les théorèmes 2 et 3 sont très éloignés l'un de l'autre. Une conjecture de Cramer est que

$$\overline{\lim} \frac{d_n}{\log^2 p_n} = A .$$

THÉORÈME 4 (BOMBIERI-DAVENPORT [1]). - Il existe une infinité de n pour lesquels on a :

$$p_{n+1} - p_n < \frac{1}{2} \log p_n .$$

Remarque. - On a toujours $p_{n+1} - p_n \geqslant 2$. La conjecture dite des nombres premiers jumeaux est que l'équation $p_{n+1} - p_n = 2$ a une infinité de solutions en n.

3. Remarque sur la démonstration des théorèmes 2, 3, 4.

Les démonstrations se trouvent dans PRACHAR [3] (chap. V, § 5, et chap. IX, § 3), où l'on trouvera également d'autres renseignements.

A propos des théorèmes 2 et 4, remarquons qu'il est très facile d'établir (car $\log p_n$ est la valeur moyenne de d_n) :

$$\underline{\lim} \frac{d_n}{\log p_n} \leqslant 1 \leqslant \overline{\lim} \frac{d_n}{\log p_n} .$$

Supposons par exemple que $\underline{\lim} \frac{d_n}{\log p_n} = a > 1$. Cela veut dire que, pour $p_n > p_{n_0}$ A, on a $d_n > a' \log p_n$ avec $a > a' > 1$. On aurait alors pour $n > n_0$,

$$p_n = \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n_0} d_i + \sum_{i=n_0+1}^{n} d_i \geqslant p_{n_0} + (n - n_0)a' \log p_n .$$

Comme $a' > 1$, on arrive à une contradiction lorsque $n \to \infty$.

Pour démontrer le théorème 2, on cherche des nombres a_1 , a_2 , ... , a_k de telle façon que si z vérifie les congruences :

$$z \equiv a_i \mod(p_i) \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant k$$

alors les nombres $z + 2$, $z + 3$, ... , $z + u$, sont divisibles par l'un des nombres p_1 , p_2 , ... , p_k , avec u le plus grand possible. Il n'y a donc pas de nombres premiers entre $z + 2$ et $z + u$.

Le théorème 3 découle du résultat plus général suivant :

THÉORÈME 3'. - Soit $\tau \geqslant \frac{5}{8}$, alors $\pi(x + x^\tau) - \pi(x) \sim \frac{x^\tau}{\log x}$.

Le théorème 3' se démontre par des méthodes analytiques en étudiant la fonction ζ de Riemann.

Le théorème 4 se démontre en utilisant la méthode du crible. A l'aide du résultat suivant ([3], Satz 4.4, chap. 2) :

$$\operatorname{card}\{i \mid p_i \leqslant x \; ; \; d_i = n\} \leqslant C \frac{x}{\log^2 x} \prod_{p \mid n} (1 + \frac{1}{p}) .$$

on peut démontrer qu'il n'y a pas "trop" de d_i compris entre $a \log p_i$ et $A \log p_i$ avec $a < 1 < A$. Si on avait $d_i > a \log p_i$ constamment, il y aurait donc beaucoup de d_i supérieur à $A \log p_i$, ce qui ne peut pas avoir lieu.

4. Quelques problèmes irrésolus.

$$\overline{\lim} \frac{\min(d_n , d_{n+1} , \ldots , d_{n+k})}{\log p_n} = + \infty \qquad \text{pour tout} \quad k > 2$$

(conjecture de P. ERDÖS, qui a démontré le résultat pour $k = 2$).

De même :

$$\underline{\lim} \frac{\max(d_n , d_{n+1})}{\log p_n} < 1$$

(conjecture de P. ERDÖS).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOMBIERI (E.) and DAVENPORT (H.). - Small differences between prime numbers, Proc. Royal Soc. London, Series A, t. 293, 1966, p. 1-18.

[2] INGHAM (A. E.). - The distribution of prime numbers. - Cambridge, at the University Press, 1932 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, 30).

[3] PRACHAR (K.). - Primzahlverteilung. - Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1957 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 91).

[4] RANKIN (R. A.). - The difference between consecutive prime numbers, V, Proc. Edinburgh math. Soc., t. 13, 1963, p. 331-332.