Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Gérard Garandel

Systèmes déterminants dans les espaces de Banach ultramétriques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 9, nº 1 (1967-1968), exp. nº 5, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1967-1968__9_1_A5_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des Nombres)
9e année, 1967/68, n° 5
4 décembre 1967

SYSTÈMES DÉTERMINANTS DANS LES ESPACES DE BANACH ULTRAMÉTRIQUES

par Gérard GARANDEL

J.-P. SERRE [3] a suggéré d'appliquer les méthodes de SIKORSKI [4] à l'équation $x + u(x) = x_0$ où u est un endomorphisme complètement continu d'un espace de Banach ultramétrique muni d'une base normale. Les définitions de GROTHENDIECK [1] quelque peu modifiées et généralisées sur les modules (voir aussi GRUSON [2]), apportent des simplifications à la théorie de Sikorski, et conduisent à la discussion et à la résolution d'une telle équation.

1. Préliminaires.

Soit A un anneau commutatif et unitaire. Soit E et F deux A-modules unitaires. Si u est un homomorphisme de E dans F, on peut lui associer l'homomorphisme de $\bigwedge^n E$ dans $\bigwedge^n F$ noté $\bigwedge^n u$, défini par

$$\bigwedge^n u(x_1 \wedge \dots \wedge x_n) = u(x_1) \wedge \dots \wedge u(x_n) .$$

Si $v_1, \dots, v_n$ sont des homomorphismes de E dans F, on peut définir l'homomorphisme de $\bigwedge^n E$ dans $\bigwedge^n F$ noté $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ par la formule

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n(x_1 \wedge \dots \wedge x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma\, v_1(x_{\sigma(1)}) \wedge \dots \wedge v_n(x_{\sigma(n)})$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} v_{\sigma(1)}(x_1) \wedge \dots \wedge v_{\sigma(n)}(x_n) ,$$

S_n étant le n-ième groupe symétrique, et ε_σ la signature de la permutation σ.

Si $v_1, \dots, v_p, u$ sont des homomorphismes de E dans F, définissons l'homomorphisme de $\bigwedge^n E$ dans $\bigwedge^n F$, $v_1 \wedge \dots \wedge v_p \bigwedge^{n-p} u$, par la formule

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_p \bigwedge^{n-p} u)(x_1 \wedge \dots \wedge x_n)$$
$$= \sum_H \sum_{\sigma \in S_p} u(x_1) \wedge \dots \wedge v_{\sigma(1)}(x_{h_1}) \wedge \dots \wedge v_{\sigma(p)}(x_{h_p}) \wedge \dots \wedge u(x_n) ,$$

l'ordre des $x_1, \dots, x_n$ étant respecté, la somme $\sum_H$ étant étendue à toutes les parties $H = \{h_1 < \dots < h_p\}$ à p éléments de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

On voit que

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \overset{1}{\wedge} v_n$$

et

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_p \wedge \underbrace{u \wedge \ldots \wedge u}_{(n-p)\ \text{fois}} = (n-p)!\ v_1 \wedge \ldots \wedge v_p \overset{n-p}{\wedge} u$$

en particulier $\underbrace{u \wedge \ldots \wedge u}_{n\ \text{fois}} = n! \overset{n}{\wedge} u$.

Si $u_1 , \ldots , u_k$ sont des homomorphismes de E dans F , pour tout k-uple de nombres $(i_1 , \ldots , i_k)$ tel que $i_1 + \ldots + i_k = n$, on peut définir l'homomorphisme $\overset{i_1}{\wedge} u_1 \wedge \ldots \overset{i_k}{\wedge} u_k$ de $\overset{n}{\wedge} E$ dans $\overset{n}{\wedge} F$ pour la formule

$$\overset{i_1}{\wedge} u_1 \wedge \ldots \overset{i_k}{\wedge} u_k(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = \sum_{\mathcal{P}} u_{p(1)}(x_1) \wedge \ldots \wedge u_{p(n)}(x_n) ,$$

la somme étant étendue à toutes les partitions $\mathcal{P} = \{H_1 , \ldots , H_k\}$ de $\{1 , \ldots , n\}$ telles card $H_1 = i_1$, ... , card $H_k = i_k$, $p(q)$ étant l'indice tel que $q \in H_{p(q)}$ $(1 \leqslant q \leqslant n)$ [2].

Par exemple, si u_1 et u_2 sont deux homomorphismes de E dans F , on pourra écrire

$$(\overset{q}{\wedge} u_1 \overset{n-q}{\wedge} u_2)(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n)$$
$$= \sum_H u_2(x_1) \wedge \ldots \wedge u_1(x_{h_1}) \wedge \ldots \wedge u_1(x_{h_q}) \wedge \ldots \wedge u_2(x_n) ,$$

la somme étant étendue à toutes les parties $H = \{h_1 < \ldots < h_q\}$ à q éléments de $\{1 , \ldots , n\}$. On a

$$\underbrace{u_1 \wedge \ldots \wedge u_1}_{q\ \text{fois}} \wedge \underbrace{u_2 \wedge \ldots \wedge u_2}_{(n-q)\ \text{fois}} = (n-q)!\ u_1 \wedge \ldots \wedge u_1 \overset{n-q}{\wedge} u_2$$
$$= (n-q)!\ q! \overset{q}{\wedge} u_1 \overset{n-q}{\wedge} u_2 .$$

<u>Remarque</u>. - $(v_1 , \ldots , v_p) \to v_1 \wedge \ldots \wedge v_p \overset{n-p}{\wedge} u$ est symétrique.

2. Traces.

Si E est un A-module <u>libre</u>, un endomorphisme u de E est dit de rang fini, s'il existe un sous-module N de E de type fini tel que $u(E) \subset N$. Il existe alors un sous-module M <u>libre</u>, de <u>type fini</u>, <u>facteur direct</u> dans E tel que $u(E) \subset M$. Un tel sous-module M de E sera appelé sous-module <u>attaché</u> à u. Le rang de u est le minimum des dimensions des sous-modules attachés à u. On sait que le A-module $L_{\mathfrak{F}}(E)$ des endomorphismes de rang fini de E est isomorphe à $E' \otimes E$, E' étant le dual algébrique de E. Si u_M désigne la restriction de u à un sous-module M attaché à u, si on désigne par $\mathrm{tr}(u_M)$ la trace de u_M, $\mathrm{tr}(u_M)$ est indépendante du sous-module attaché M choisi. On pose alors

$$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(u_M) .$$

Si M est attaché à u, $\overset{n}{\wedge} M$ est attaché à $\overset{n}{\wedge} u$, on pourra poser

$$\mathrm{tr}(\overset{n}{\wedge} u) = \mathrm{tr}((\overset{n}{\wedge} u)_{\overset{n}{\wedge} M})$$

ce qui est d'ailleurs égal à $\mathrm{tr}(\overset{n}{\wedge} u_M)$.

De même, si $u_1, \dots, u_k$ sont des endomorphismes de rang fini de E, il existe un sous-module M attaché à $u_1, \dots, u_k$, on définira de la même façon $\mathrm{tr}(\overset{i_1}{\wedge} u_1 \wedge \dots \overset{i_k}{\wedge} u_k)$.

<u>Remarque</u>. - S'il existe q $(1 \leq q \leq k)$ tel que u_q soit de rang inférieur à i_q alors

$$\mathrm{tr}(\overset{i_1}{\wedge} u_1 \wedge \dots \overset{i_k}{\wedge} u_k) = 0 .$$

Si $v_i = a'_i \otimes b_i$, où $a'_i \in E'$, $b_i \in E$ $(1 \leq i \leq n)$, alors

$$\mathrm{tr}(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = \det(\langle a'_i\, b_j \rangle) ,$$

$(\langle a'_i\, b_j \rangle)$ étant la matrice des produits scalaires $\langle a'_i\, b_j \rangle$.

Si $u = \sum_{i=1}^{m} a'_i \otimes b_i$, si $m < n$, $\mathrm{tr}(\overset{n}{\wedge} u) = 0$, si $m \geq n$, on a

$$\mathrm{tr}(\overset{n}{\wedge} u) = \sum_{H} \mathrm{tr}(a'_{h_1} \otimes b_{h_1} \wedge \dots \wedge a'_{h_n} \otimes b_{h_n})$$

la somme étant étendue à toutes les parties $H = \{h_1 < \dots < h_n\}$ à n éléments de $\{1, \dots, m\}$.

On a, de même, si $v_q = A'_q \otimes B_q$, $(1 \leq q \leq p)$, et si $u = \sum_{i=1}^{m} a'_i \otimes b_i$ $(m \geq n-p)$

$$\mathrm{tr}(v_1 \wedge \dots \wedge v_p \overset{n-p}{\wedge} u)$$
$$= \sum_{K} \mathrm{tr}(A'_1 \otimes B_1 \wedge \dots \wedge A'_p \otimes B_p \wedge a'_{k_1} \otimes b_{k_1} \wedge \dots \wedge a'_{k_{n-p}} \otimes b_{k_{n-p}}) ,$$

la somme étant étendue à toutes les parties $K = \{k_1 < \dots < k_{n-p}\}$ à $(n-p)$ éléments de $\{1, \dots, m\}$.

Si (β_{ij}) est la matrice de u dans une base de E, on peut se restreindre, pour calculer la trace, à la matrice $(\beta_{ij})_{\substack{1\leq i\leq r \\ 1\leq j\leq r}}$ de u dans un sous-module attaché. On obtient,

$$\mathrm{tr}(\overset{n}{\Lambda} u) = \sum_H \det(\beta_{h_i h_j}) = \sum_H \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_\sigma \beta_{h_1 h_{\sigma(1)}} \dots \beta_{h_n h_{\sigma(n)}}, \qquad \text{pour } n \leq r,$$

la somme étant étendue à toutes les parties $H = \{h_1 < \dots < h_n\}$ à n éléments de $\{1, \dots, r\}$.

De même, si (γ^q_{ij}) est la matrice de v_q $(1 \leq q \leq n)$, dans un sous-module de dimension r attachée à v_q, pour tout q, on a

$$\mathrm{tr}(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = \sum_H \sum_{\sigma\in S_n} \sum_{\tau\in S_n} \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau \gamma^1_{h_{\tau(1)} h_{\sigma(1)}} \dots \gamma^n_{h_{\tau(n)} h_{\sigma(n)}}, \qquad \text{pour } n\leq r,$$

la somme $\sum_H$ étant étendue à toutes les parties $H = \{h_1 < \dots < h_n\}$ à n éléments de $\{1, \dots, r\}$. Avec les mêmes notations, on a pour $p \leq n \leq r$,

$$\mathrm{tr}(v_1 \wedge \dots \wedge v_p \overset{n-p}{\Lambda} u) = \sum_H \sum_{\sigma\in S_n} \sum_K \sum_{\tau\in S_p} \varepsilon_\tau \varepsilon_\sigma \beta_{h_1 h_{\sigma(1)}} \dots \gamma^1_{k_{\tau(1)} h_{\sigma(k_1)}} \dots$$
$$\gamma^p_{k_{\tau(p)} h_{\sigma(k_p)}} \dots \beta_{h_n h_{\sigma(n)}},$$

la somme $\sum_H$ étant étendue à toutes les parties $H = \{h_1 < \dots < h_n\}$ à n éléments de $\{1, \dots r\}$, la somme $\sum_K$ étant étendue à toutes les parties $K = \{k_1 < \dots < k_p\}$ à p éléments de $\{h_1, \dots, h_n\}$.

3. Les formes fondamentales.

On appellera n-ième forme fondamentale, sur $(L_{\mathfrak{F}}(E))^n$, la forme n-linéaire symétrique α_n définie par

$$\alpha_n(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{tr}(v_1 \wedge \dots \wedge v_n).$$

Si u est un endomorphisme de E $(u \in L(E))$, $u \circ v_q$ et $v_q \circ u$ sont de rang fini $(1 \leq q \leq n)$, alors $\alpha_n(v_1 \circ u, \dots, v_n \circ u) = \alpha_n(u \circ v_1, \dots, u \circ v_n)$. Toute forme n-linéaire sur $(L_{\mathfrak{F}}(E))^n$ s'identifie avec une forme $2n$-linéaire sur $E'^n \times E^n$.

Définition. - Une forme n-linéaire sur $(L_{\mathfrak{F}}(E))^n$ est bi-alternée si la forme $2n$-linéaire associée

$$(a'_1 , \ldots , a'_n , b_1 , \ldots , b_n) \to \ell(a'_1 \otimes b_1 , \ldots , a'_n \otimes b_n)$$

est alternée par rapport aux a'_i et alternée par rapport aux b_i .

PROPOSITION 1. - Si E est un A-module possédant une base finie, toute forme ℓ , n-linéaire bi-alternée sur $(L(E))^n$ s'écrit

$$\ell(v_1 , \ldots , v_n) = \mathrm{tr}(w \circ (v_1 \wedge \ldots \wedge v_n)) \qquad \text{où} \quad w \in L(\overset{n}{\bigwedge} E) \quad [1].$$

PROPOSITION 2. - Si E est un A-module libre, toute forme n-linéaire, bi-alternée ℓ sur $(L_{\mathfrak{F}}(E))^n$ telle que

$$\ell(u \circ v_1 , \ldots , u \circ v_n) = \ell(v_1 \circ u , \ldots , v_n \circ u)(v_1 , \ldots , v_n , u \in L_{\mathfrak{F}}(E))$$

s'écrit $\ell = \rho\alpha_n$ $(\rho \in A)$.

4. La théorie de Sikorski.

K étant un corps commutatif, soient E et E' deux K-espaces vectoriels en dualité séparante. Soit $(x' , x) \to \langle x'x \rangle$ la forme bi-linéaire sur $E' \times E$. Un opérateur U sera une forme bi-linéaire sur $E' \times E$: $(x' , x) \to \langle x'Ux \rangle$, vérifiant les deux axiomes :

(0_1) $\quad (\forall\, x \in E , \ \exists\, y \in E \mid \langle x'Ux \rangle = \langle x'y \rangle , \ \forall\, x' \in E')$

(0_2) $\quad (\forall\, x' \in E' , \ \exists\, y' \in E' \mid \langle x'Ux \rangle = \langle y'x \rangle , \ \forall\, x \in E)$,

alors $x \to y = Ux$ est un endomorphisme u de E associé à U et $x' \to y' = xU$ est un endomorphisme $\tilde{u}$ de E' associé à U .

L'ensemble $\mathcal{O}$ des opérateurs est une algèbre sur K en posant

$$\langle x'(U_1 U_2)x \rangle = \langle (x'U_1)U_2 x \rangle = \langle x'U_1(U_2 x) \rangle = \langle (x'U_1)(U_2 x) \rangle .$$

L'élément unité I est défini par $\langle x'Ix \rangle = \langle x'x \rangle$. Un opérateur P est un projecteur si $P^2 = P$. Un opérateur F est de rang fini si f et $\tilde{f}$ sont de rang fini.

Opérateurs de Fredholm. - Un sous-espace E_1 de E est de co-dimension r s'il est l'orthogonal d'un sous-espace de dimension r . Alors E_1 admet un supplémentaire de dimension r .

Un opérateur U est de *Fredholm d'ordre* r si les deux conditions sont vérifiées simultanément :

(f_1) $\mathrm{Im}(u)$ est de co-dimension r ;
(f_2) $\mathrm{Im}(\tilde{u})$ est de co-dimension r .

Si U est de Fredholm d'ordre r , alors $\ker(u)$ et $\ker(\tilde{u})$ sont de dimension r .

PROPOSITION 3. - *Tout opérateur* U *de Fredholm d'ordre* r *se met sous la forme* $U = U_0(I - P)$ *où* U_0 *est inversible et où* P *est un projecteur de rang* r .

Si U *est de Fredholm,* U *admet un quasi-inverse, c'est-à-dire un opérateur* V *tel que* $UVU = U$ *et* $VUV = V$.

PROPOSITION 4. - *Tout opérateur de la forme* $U_0(I - F)$ *où* U_0 *est inversible et* F *de rang fini est de Fredholm.*

Exemple fondamental. - Si $x'_1 , \dots , x'_p$ appartiennent à E' , si $x_1 , \dots , x_p$ appartiennent à E , si $u , v_1 , \dots , v_p$ appartiennent à $L_{\mathfrak{F}}(E)$, l'application partielle

$$(x'_1 , x_1) \rightarrow \mathrm{tr}(x'_1 \otimes v_1(x_1) \wedge \dots \wedge x'_p \otimes v_p(x_p) \overset{n-p}{\bigwedge} u)$$

est un opérateur.

Systèmes déterminants. - Si U est un opérateur, on appelle système déterminant associé à U , une suite $D_0 , \dots , D_n$ vérifiant :

(δ_1) D_0 est un élément de K , pour $n \geq 1$, D_n est une forme $2n$-linéaire sur $E'^n \times E^n$ dont la valeur au point $(x'_1 , \dots , x'_n , x_1 , \dots , x_n)$ sera notée
$$D_n\begin{pmatrix} x'_1 , & \dots , & x'_n \\ x_1 , & \dots , & x_n \end{pmatrix} ;$$

(δ_2) pour $n \geq 2$, D_n est bi-alternée ;

(δ_3) pour $n \geq 1$, l'application partielle $(x'_1 , x_1) \rightarrow D_n\begin{pmatrix} x'_1 , & \dots , & x'_n \\ x_1 , & \dots , & x_n \end{pmatrix}$ est un opérateur ;

(δ_4) il existe un entier $r \geq 0$ tel que D_r ne soit pas identiquement nul ;

(δ_5) on a, pour tout n

$$D_{n+1}\begin{pmatrix} x'_0\, U , & x'_1 , & \dots , & x'_n \\ x_0 , & x_1 , & \dots , & x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle x'_0\, x_i \rangle D_n \begin{pmatrix} x'_1 , & & \dots & & , x'_n \\ x_0 , & \dots , & \cancel{x_i} , & \dots , & x_n \end{pmatrix}$$

et

$$D_{n+1}\begin{pmatrix} x'_0 , & x'_1 , & \dots , & x'_n \\ Ux_0 , & x_1 , & \dots , & x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle x'_i \; x_0 \rangle D_n \begin{pmatrix} x'_0 , & \dots , & \hat{x}_i , & \dots , & x_n \\ x_1 , & & \dots & & , x_n \end{pmatrix}$$

le <u>rang</u> du système déterminant est le plus petit r tel que D_r ne soit pas identiquement nul.

<u>Exemple</u> 1. – $D_0 = 1$ et $D_n\begin{pmatrix} x'_1 , & \dots , & x'_n \\ x_1 , & \dots , & x_n \end{pmatrix} = \operatorname{tr}(x'_1 \otimes x_1 \wedge \dots \wedge x'_n \otimes x_n)$ est un système déterminant pour I .

<u>Exemple</u> 2. – $D_0 = 1$ et $D_n\begin{pmatrix} x'_1 , & \dots , & x'_n \\ x_1 , & \dots , & x_n \end{pmatrix} = \operatorname{tr}(\bigwedge^n u^{-1} \circ (x'_1 \otimes x_1 \wedge \dots \wedge x'_n \otimes x_n)$ est un système déterminant pour un opérateur U inversible.

<u>Exemple</u> 3. – Si E est de dimension n , E' est isomorphe au dual de E et tout opérateur U est de Fredholm. Soit (β_{ij}) la matrice de u dans une base de E ; on construit un système déterminant associé à U en posant

$$D_0 = \det(\beta_{ij}) ,$$

D_1 sera construit à l'aide des sous-déterminants d'ordre 1 , β_{ij} , ... D_p à l'aide des sous-déterminants d'ordre $(n - p)$ [4].

PROPOSITION 5. – <u>Si un opérateur admet un système déterminant d'ordre</u> r , <u>il est de Fredholm d'ordre</u> r . <u>De façon précise, si</u> $y'_1 , \dots , y'_r$ <u>et</u> $y_1 , \dots , y_r$ <u>sont tels que</u> $D_r\begin{pmatrix} y'_1 , & \dots , & y'_r \\ y_1 , & \dots , & y_r \end{pmatrix} \neq 0$:

1° <u>Il existe dans</u> E' , r' <u>éléments</u> $x'_1 , \dots , x'_r$ <u>engendrant</u> $\ker(\tilde{u})$ <u>et, dans</u> E , r <u>éléments</u> $x_1 , \dots , x_r$ <u>engendrant</u> $\ker(u)$ <u>tels que l'équation</u> $X'U = x'_0$ <u>admette une solution, si, et seulement si,</u> $\langle x'_0 \; x_i \rangle = 0$ $(1 \leq i \leq r)$ et <u>l'équation</u> $UX = x_0$ <u>admette une solution, si, et seulement si,</u> $\langle x'_i \; x_0 \rangle = 0$ $(1 \leq i \leq r)$.

2° <u>L'opérateur</u> V <u>défini par</u>

$$x'Vx = D_{r+1}\begin{pmatrix} x' , & y'_1 , & \dots , & y'_r \\ x , & y_1 , & \dots , & y_r \end{pmatrix} / D_r \begin{pmatrix} y'_1 , & \dots , & y'_r \\ y_1 , & \dots , & y_r \end{pmatrix}$$

<u>est un quasi-inverse de</u> U .

3° Si x'_0 est orthogonal à $x_1 , \dots , x_r$, $x'_0 V$ est l'unique solution de $X'U = x'_0$ orthogonale à $y_1 , \dots , y_r$.

Si x_0 est orthogonal à $x'_1 , \dots , x'_r$, Vx_0 est l'unique solution de $UX = x_0$ orthogonale à $y'_1 , \dots , y'_r$.

PROPOSITION 5. - Si U est un opérateur de Fredholm d'ordre r , alors U possède un système déterminant d'ordre r , défini à une constante multiplicative près.

Pour le voir, on décompose U sous la forme $U_0(I - P)$ alors

$$D_0 = D_1 = \dots = D_{r-1} = 0 , \dots , D_{r+k}$$

défini par

$$D_{r+k}\begin{pmatrix} x'_1 , \dots , x'_{r+k} \\ x_1 , \dots , x_{r+k} \end{pmatrix} = \mathrm{tr}((\overset{r}{\Lambda} p \overset{k}{\Lambda} \underset{\sim}{1}) \circ (x'_1 \otimes x_1 \wedge \dots \wedge x'_{r+k} \otimes x_{r+k}) ,$$

où $\underset{\sim}{1}$ est l'endomorphisme identité de E , constitue un système déterminant pour $I - P$. $D_0 = D_1 = \dots = D_{r-1} = 0 , \dots , D_{r+k}$, défini par

$$D_{r+k}\begin{pmatrix} x'_1 , \dots , x'_{r+k} \\ x_1 , \dots , x_{r+k} \end{pmatrix} = \mathrm{tr}((\overset{r}{\Lambda} p \overset{k}{\Lambda} \underset{\sim}{1}) \circ (\overset{r+k}{\Lambda} u_0^{-1}) \circ (x'_1 \otimes x_1 \wedge \dots \wedge x'_{r+k} \otimes x_{r+k}),$$

est un système déterminant pour U .

5. Applications aux espaces de Banach ultramétriques.

Soit K un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique pour laquelle, il est complet. Soit A l'anneau de valuation, $\mathfrak{m}$ l'idéal de valuation. Soit E un espace de Banach ultramétrique sur K , E_0 le cercle circonférencié de rayon 1 . Si $\mathfrak{A}$ désigne la famille des idéaux $\mathfrak{a}$ de A , on sait que E_0 est homéomorphe à $\varprojlim (E_0/\mathfrak{a}E_0$, $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A})$ les $(A/\mathfrak{a})$-modules $E_0/\mathfrak{a}E_0$ libres étant munis de la topologie discrète. (De même $A = \varprojlim A/\mathfrak{a}$.)

Soit $\mathcal{C}(E)$ l'espace de Banach des endomorphismes complètement continus de E . Soit $\mathcal{C}_0(E)$ le cercle circonférencié de rayon 1 de $\mathcal{C}(E)$. On sait que $\mathcal{C}_0(E)$ est homéomorphe à $\varprojlim (L_{\mathfrak{F}}(E_0/\mathfrak{a}E_0))$, $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A})$, si $u \in \mathcal{C}_0(E)$, u définit par passage au quotient un endomorphisme de rang fini $u_{\mathfrak{a}}$ de $E_0/\mathfrak{a}E_0$.

Si $i_1 , \dots , i_k$ sont k nombres tels que $i_1 + \dots + i_k = n$, si $u_1 , \dots, u_k$ sont des éléments de $\mathcal{C}_0(E)$, pour tout $\mathfrak{a}$ soit $f_{\mathfrak{a}}$ l'application de $(L_{\mathfrak{F}}(E_0/\mathfrak{a}E_0))^k$ dans $A/\mathfrak{a}$ définie par

$$f_{\mathfrak{a}}(u_{1\mathfrak{a}} , \dots , u_{k\mathfrak{a}}) = \mathrm{tr}(\overset{i_1}{\Lambda} u_{1\mathfrak{a}} \wedge \dots \overset{i_k}{\Lambda} u_{k\mathfrak{a}}) .$$

f_α définit par passage à la limite projective une application f de $(\mathcal{C}_0(E))^k$ dans A notée $\mathrm{tr}(\overset{i_1}{\Lambda} u_1 \wedge \dots \overset{i_k}{\Lambda} u_k)$ qui est continue.

Si u_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ sont des éléments de $\mathcal{C}(E)$, il existe des éléments $\varepsilon_i \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ tels que $u_i/\varepsilon_i \in \mathcal{C}_0(E)$, on pose alors

$$\mathrm{tr}(\overset{i_1}{\Lambda} u_1 \wedge \dots \overset{i_k}{\Lambda} u_k) = \varepsilon_1^{i_1} \dots \varepsilon_k^{i_k} \, \mathrm{tr}(\overset{i_1}{\Lambda} u_1/\varepsilon_1 \wedge \dots \overset{i_k}{\Lambda} u_k/\varepsilon_k) .$$

Si u_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ sont des endomorphismes de rang fini, on retrouve alors les définitions algébriques.

<u>Les formes fondamentales continues sur</u> $(\mathcal{C}(E))^n$. - On appellera n-ième forme fondamentale continue sur $(\mathcal{C}(E))^n$, la forme n-linéaire symétrique α_n définie par

$$\alpha_n(v_1 , \dots , v_n) = \mathrm{tr}(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) .$$

On peut alors démontrer des propriétés analogues aux propriétés exposées au paragraphe 3 en remarquant que $\mathcal{C}(E)$ est isomorphe à $E' \hat{\otimes} E$ [3], E' étant le dual topologique de E. Puisque $E' \otimes E$ est injecté dans $E' \hat{\otimes} E$ [2], tout élément u de $\mathcal{C}(E)$ peut s'écrire $u = \sum_{i=1}^{\infty} a'_i \otimes b_i$ où $a'_i \in E'$, $b_i \in E$ avec $\gamma(a'_i \otimes b_i) \to 0$ (si $i \to \infty$), γ étant la norme sur $E' \hat{\otimes} E$. Alors, il est aisé de voir que

$$\mathrm{tr}(\overset{n}{\Lambda} u) = \sum_H \mathrm{tr}(a'_{h_1} \otimes b_{h_1} \wedge \dots \wedge a'_{h_n} \otimes b_{h_n}) ,$$

la somme étant étendue à toutes les parties $H = \{h_1 < \dots < h_n\}$ de N^*. Si $v_q = A'_q \otimes B_q$ $(1 \leqslant q \leqslant p)$ et $u = \sum_{i=1}^{\infty} a'_i \otimes b_i$

$$\mathrm{tr}(v_1 \wedge \dots \wedge v_p \overset{n-p}{\Lambda} u)$$
$$= \sum_K \mathrm{tr}(A'_1 \otimes B_1 \wedge \dots \wedge A'_p \otimes B_p \wedge a'_{k_1} \otimes b_{k_1} \wedge \dots \wedge a'_{k_{n-p}} \otimes b_{k_{n-p}}) ,$$

la somme étant étendue à toutes les parties $K = \{k_1 < \dots < k_{n-p}\}$ à $(n - p)$ éléments de N^*.

On a, de même, des expressions à l'aide des matrices des endomorphismes dans la base normale de E.

Si u est complètement continu, u définit un opérateur U sur $E' \times E$.

<u>Construction d'un système déterminant pour l'opérateur</u> $I + U$. - On pose

$$D_0 = \det(\underset{\sim}{1} + u) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{tr}(\bigwedge^n u) \quad [3]$$

et

$$D_p\begin{pmatrix} x'_1 , \dots , x'_p \\ x_1 , \dots , x_p \end{pmatrix} = \sum_{n=p}^{\infty} \operatorname{tr}(x'_1 \otimes x_1 \wedge \dots \wedge x'_p \otimes x_p \bigwedge^{n-p} u)$$

ce qui a bien un sens puisque, pour tout $\mathfrak{a}$, $\operatorname{tr}(x'_1 \otimes x_1 \wedge \dots \wedge x'_p \otimes x_p \bigwedge^{n-p} u)$ est nul modulo $\mathfrak{a}$ à partir d'un certain n .

(δ_1) et (δ_2) sont vérifiés. (δ_3) se vérifie en utilisant l'exemple fondamental du paragraphe 4 et en munissant l'esp ce des opérateurs de la norme canonique.

(δ_5) se démontre en utilisant la proposition suivante :

PROPOSITION 7. - $w , v_1 , \dots , v_p$ <u>étant des endomorphismes complètement continus, on a</u>

$$\operatorname{tr}(w \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_p \bigwedge^{n-p} u) = - \operatorname{tr}(u \circ w \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_p \bigwedge^{n-p-1} u)$$

$$- \sum_{i=1}^{p} \operatorname{tr}(v_1 \wedge \dots \wedge v_i \circ u \wedge \dots \wedge v_p \bigwedge^{n-p} u) + \operatorname{tr} w \operatorname{tr}(v_1 \wedge \dots \wedge v_p \bigwedge^{n-p} u)$$

$$= - \operatorname{tr}(w \circ u \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_p \bigwedge^{n-p-1} u) - \sum_{i=1}^{p} \operatorname{tr}(v_1 \wedge \dots$$

$$\wedge w \circ v_i \wedge \dots \wedge v_p \bigwedge^{n-p} u) + \operatorname{tr} w \operatorname{tr} v_1 \wedge \dots \wedge v_p \bigwedge^{n-p} u) .$$

(δ_4), enfin, se démontre en remarquant que dans le $(A/\mathfrak{m})$-espace vectoriel $E_0/\mathfrak{m}E_0$, $\underset{\sim}{1} + u$ définit, par passage au quotient, un opérateur de Fredholm dont le système déterminant est constitué par la suite $D_{0\mathfrak{m}}$, ... , $D_{p\mathfrak{m}}$, ... , définie par D_0 , ... , D_p , ..., par passage au quotient. Si n est le rang de $u_{\mathfrak{m}}$, alors $D_{n\mathfrak{m}} \neq 0$ donc $D_n \neq 0$. Pour un opérateur U de la forme $U_0(I + U)$ où U est tel que u soit complètement continu et U_0 inversible,

$$D_0 = \det(\underset{\sim}{1} + u) \ , \ \dots \ , \ D_p\begin{pmatrix} x'_1 , \dots , x'_p \\ x_1 , \dots , x_p \end{pmatrix} = \sum_{n=p}^{\infty} \operatorname{tr}(x'_1 \otimes u_0^{-1}(x_1) \wedge \dots \wedge x'_p \otimes u_0^{-1}(x_p) \bigwedge^{n-p} u)$$

définissent un système déterminant.

L'opérateur définit par $U_0(\underset{\sim}{1} + u)$ où U_0 est inversible et u complètement continu est de Fredholm. En particulier, on retrouve l'alternative de Fredholm [3] c'est-à-dire $\ker(\underset{\sim}{1} + u)$ est de dimension finie. Si $D_0 \neq 0$, on a

$$\langle x'(I + U)^{-1} x\rangle = \frac{1}{D_0} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tr}(x' \otimes x \overset{n-1}{\bigwedge} u) \text{ .}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] GROTHENDIECK (Alexander). - La théorie de Fredholm, Bull. Soc. math. France, t. 84, 1956, p. 319-384.

[2] GRUSON (Laurent). - Theorie de Fredholm p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 94, 1966, p. 67-95.

[3] SERRE (Jean-Pierre). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 12, p. 69-85).

[4] SIKORSKI (R.). - Determinant systems, Studia mathematica, t. 18, 1959, p. 161-186.