

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

JACQUES LESCA

Équirépartition dans un anneau d'Adèles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 8, n° 2 (1966-1967),
exp. n° 15, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1966-1967__8_2_A6_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EQUIRÉPARTITION DANS UN ANNEAU D'ADÈLES

par Jacques LESCA

Introduction. Sommaire.

Dans le § 1, nous rappelons la définition de l'équirépartition d'une suite dans le tore T .

Dans le § 2, après avoir défini un anneau d'adèles A , nous définissons l'équirépartition d'une suite d'adèles modulo \mathcal{O} , le sous-anneau des adèles entiers.

Dans le § 3, nous examinons la répartition modulo \mathcal{O} des suites : $n \rightarrow na$ de points de A .

Dans le § 4, nous étudions la répartition modulo \mathcal{O} des suites : $n \rightarrow \lambda a^n$ de points de A .

Dans ce dernier paragraphe, sera esquissée la démonstration d'un résultat qui généralise le résultat suivant dû à J. F. KOKSMA [5] : Pour tout λ réel et pour presque tout x réel, de valeur absolue supérieure à 1, la suite $n \rightarrow \lambda x^n$ est équirépartie modulo 1.

1. Rappel de définitions classiques de l'équirépartition.

(a) Equirépartition dans le tore $T = R/Z$. - On dit qu'une suite $u : n \rightarrow u_n$ est équirépartie dans T si, pour tout intervalle I de T ,

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \Pi(I, n) / n \} = \mu(I)$$

(où $\Pi(I, n)$ désigne le nombre de points de la suite appartenant à I parmi les n premiers points de la suite, et $\mu(I)$ la mesure de I).

On a le critère d'équirépartition de la suite u dû à H. WEYL : " u est équirépartie si, et seulement si, pour tout $h \in Z$, $h \neq 0$:

$$(2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^N (\exp 2\pi i h u_n) / N \right\} = 0 .$$

(b) Equirépartition d'une suite dans un groupe topologique abélien compact G (voir [4]). - Désignons par $\Gamma = \Gamma(G)$ le groupe des homomorphismes continus de G dans $T = R/Z$ (lié de façon évidente au groupe des caractères continus de G)

(abréviation H. C.).

On dit qu'une suite u de points de G est équirépartie dans G si, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 0$:

$$(3) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\exp 2\pi i \gamma(u_n)) \right\} = 0 .$$

2. Définition de l'équirépartition dans un anneau d'adèles.

(a) Anneau d'adèles. - Soient k un corps de nombres algébriques, Ω l'ensemble de ses valuations, pour tout $p \in \Omega$, k_p désigne le complété de k pour la valuation p (la norme étant notée $|\cdot|_p$).

Pour S une partie de Ω contenant l'ensemble des valuations archimédiennes Ω_∞ , on définit l'anneau d'adèles $A = A_S$: A est le sous-anneau de l'anneau produit : $\prod_{p \in S} \{k_p\}$ défini par :

$$A = \{a = (a_p) ; \text{pour presque tout } p \in S, |a_p|_p \leq 1\} .$$

Pour un idéal i de A , c'est-à-dire un adèle inversible, on définit

$$V(i) = \{a \in A ; \forall p \in S, |a_p|_p \leq |i_p|_p\} .$$

Les $V(i)$ définissent un système fondamental de voisinages de 0 , pour une topologie qui munit A d'une structure d'anneau topologique localement compact.

Le groupe des H. C. de A . - A est auto-dual, c'est-à-dire qu'il existe un H.C. γ_0 tel que l'application :

$$a \rightarrow (x \rightarrow \gamma_0(ax))$$

définit un homéomorphisme de A dans le groupe de ses H. C. : $\Gamma = \Gamma(A)$.

Le sous-anneau \mathcal{O} des entiers de A . - Définissons \mathcal{O} par :

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_S = \{a \in A : a \in k ; \forall p \in \Omega - S, |a|_p \leq 1\} \quad (1) .$$

\mathcal{O} est un sous-anneau discret de A , et le groupe quotient A/\mathcal{O} est compact. Son annulateur :

$$\mathcal{O}^* = \{\gamma \in \Gamma ; \forall x \in \mathcal{O}, \gamma(x) = 0\}$$

possède les mêmes propriétés. En outre, pour un choix convenable de γ_0 , \mathcal{O}^* peut

(1) k étant identifié à son image dans l'injection canonique dans A .

être identifié ⁽²⁾ à un sous-anneau de k ; il est dénombrable.

(b) Définition de l'équirépartition modulo Θ . - La définition de l'équirépartition d'une suite u dans le groupe compact A/Θ se définit comme dans le § 1 (b).

Nous dirons qu'une suite u de points de A est équirépartie modulo Θ , si la suite $n \rightarrow \varphi(u_n)$ (φ désignant l'application canonique de A dans A/Θ) est équirépartie dans A/Θ .

Le groupe Θ étant un sous-groupe fermé de A , l'ensemble des H. C. de A/Θ peut être identifié à l'ensemble des H. C. de Θ^* , et on obtient naturellement le critère d'équirépartition.

PROPOSITION 1. - Une suite $u : n \rightarrow u_n$ de points de A est équirépartie modulo Θ si, et seulement si, pour tout H. C. γ de Θ^* , $\gamma \neq \emptyset$:

$$(3) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\exp 2\pi i \gamma(u_n)) \right\} = 0 .$$

Remarque 1. - On peut donner de l'équirépartition dans A/Θ une définition analogue à celle du § 1 (a). En effet, en utilisant, par exemple, un domaine fondamental, on peut définir des "pavages" qui permettent des partitions de A/Θ avec les "pavés arbitrairement petits". On déduit de là une mesure de Riemann et les caractérisations suivantes d'une suite équirépartie u :

(1) Pour tout pavé P ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\Pi(P, n)}{n} \right\} = \mu(P) ;$$

(2) Pour tout sous-ensemble X mesurable au sens de Riemann,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\Pi(X, n)}{n} \right\} = \mu(A)$$

(où $\Pi(X, n)$ est le nombre de points de la suite u appartenant à X parmi les n premiers points de la suite).

Remarque 2. - Mme Françoise BERTRANDIAS [1] et D. CANTOR [2] ont défini différemment l'équirépartition dans un ensemble d'adèles. Ce dernier, par exemple, en utilisant le "filtre des sections à droite" correspondant à une famille de parties finies de Θ , définit l'équirépartition modulo Θ pour les fonctions de Θ dans A .

(2) A et $\Gamma(A)$ étant identifiés par l'homéomorphisme décrit ci-dessus.

3. Quelques résultats généraux.

(a) Equirépartition modulo \mathcal{O} des suites $n \rightarrow na$.

PROPOSITION 2. - Pour $a \in A$, les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) La suite $n \rightarrow na$ est équirépartie modulo \mathcal{O} ;
- (2) Pour tout $\gamma \in \mathcal{O}^*$, $\gamma \neq 0$, la suite $n \rightarrow n\gamma(a)$ est équirépartie dans T ;
- (3) Pour tout $\gamma \in \mathcal{O}^*$, $\gamma \neq 0$, $\gamma(a)$ est irrationnel (image canonique d'un irrationnel de R dans R/Z) ;
- (4) Pour tout $\gamma \in \mathcal{O}^*$, $\gamma \neq 0$, $\gamma(a) \neq 0$;
- (5) L'ensemble des classes $\{\mathfrak{o}(ua) : u \in \mathbb{Z}\}$ des éléments (ua) est partout dense dans A/\mathcal{O} .

L'identification des cinq propriétés précédentes peut être faite dans le cadre plus général de l'équirépartition dans un groupe compact G , lorsque le groupe $\Gamma(G)$ est sans torsion. Elle est facile. L'identification des propriétés (4) et (5), par exemple, est la traduction du résultat d'analyse harmonique suivant : "L'annulateur d'un sous-groupe H d'un groupe abélien localement compact G est réduit à l'élément 0 , si, et seulement si, la fermeture de H dans G est G ".

Les propriétés (3) ou (4) permettent de déterminer les $a \in A$ tels que la suite $n \rightarrow na$ soit équirépartie modulo \mathcal{O} . C'est ainsi que si $k = \mathbb{Q}$, quel que soit S , on obtient la condition nécessaire et suffisante d'équirépartition suivante : "La composante infinie de A est un irrationnel".

Plus généralement, soient $A_\infty = A_{\Omega_\infty}$, l'anneau d'adèles construit à partir des seules valuations archimédiennes, et $E = \mathcal{O}_\infty$ le sous-anneau des entiers de A (entiers de k au sens habituel). Le groupe additif A_∞^+ est isomorphe à \mathbb{R}^n , et la trace définie dans k permet de définir naturellement une forme bilinéaire non dégénérée dans A (notée Tr), en outre E est un réseau, au sens habituel de $A_\infty^+ = \mathbb{R}^n$. Si $a \in A_S$, désignons par a_∞ l'élément de A dont la composante pour chaque $p \in \Omega_\infty$ est la composante correspondante de a .

PROPOSITION 3. - Pour $a \in A_S$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) $n \rightarrow na$ est équirépartie modulo \mathcal{O}_S ;
- (2) Pour tout $e \in E$: $\text{tr}(ea_\infty) \neq 0$ (est irrationnel) ;
- (3) La suite $n \rightarrow na_\infty$ est équirépartie dans A_∞ modulo le réseau E .

(b) Equirépartition des polynômes.

PROPOSITION 4. - Si une suite (u_n) est telle que, pour tout $h \in \mathbb{N}$, $h \neq 0$, la suite $n \rightarrow u_{n+h} - u_n$ est équirépartie modulo \mathcal{O} , alors la suite $n \rightarrow u_n$ est équirépartie modulo \mathcal{O} .

COROLLAIRE. - Si le polynôme $f(n) = a_r n^r + \dots + a_0$ est tel que l'une des suites $n \rightarrow na_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) est équirépartie modulo \mathcal{O} , alors la suite $n \rightarrow f(n)$ est équirépartie modulo \mathcal{O} .

4. Répartition de la suite $n \rightarrow \lambda x^n$.

Soit

$$M = \{a \in A ; \forall p \in S, |a_p|_p \leq 1\} .$$

Si $x \in M$, une suite $n \rightarrow \lambda x^n$ ne peut être équirépartie modulo \mathcal{O} . On peut démontrer le théorème suivant :

THÉOREME. - Pour tout $\lambda \in A$, tel que pour tout $p \in S$, $\lambda_p \neq 0$, et pour presque tout $x \in A - M$, la suite $n \rightarrow \lambda x^n$ est équirépartie modulo \mathcal{O} .

Esquissons une démonstration. Dans une première partie, on se ramène à une démonstration concernant une seule composante (voir (d) ci-dessous), et dans la seconde partie, on fait la démonstration pour chaque composante possible.

Première partie de la démonstration.

1° En utilisant le fait que \mathcal{O}^* est dénombrable, on est ramené à démontrer :

(a) Soit $\gamma \in \mathcal{O}^*$, $\gamma \neq 0$, alors, pour presque tout $x \in A - M$:

$$(3) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\exp 2\pi i \gamma(\lambda x^n)) \right\} = 0 .$$

2° On détermine une famille $\mathcal{O} = \{D\}$ de parties de A convenablement définies, incluses dans $A - M$, et dont une union dénombrable remplit $A - M$. On se ramène à la démonstration suivante :

(b) Soient $D \in \mathcal{O}$ et $\gamma \in \mathcal{O}^*$, $\gamma \neq 0$, alors pour presque tout $x \in D$, (3) est vérifiée.

3° Si nous utilisons un calcul et une méthode (très ingénieuse) dus à KOKSMA [5], la démonstration de (b) se ramène à :

(c) Pour $D \in \mathcal{O}$ et $\gamma \in \mathcal{O}^*$, $\gamma \neq 0$:

$$(1/N^2) \sum_{1 \leq n < m \leq N} \left| \int_D \exp 2\pi i \phi_{m,n}(x) dx \right| = O(\log N/N) ,$$

où $\phi_{m,n}(x) = \lambda(x^m - x^n)$.

4° Enfin, en utilisant le fait que $D = \prod_{p \in S} (D_p)$ est un ensemble produit, que pour une composante q , D_q ne rencontre pas le disque unité, que tout H.C. $\neq 0$ de \mathcal{O}^* est la somme de H. C. non nuls définis dans chaque composante, on est ramené à démontrer :

(d) Soient $q \in S$, D_q un sous-ensemble convenable de k_q , $\gamma_q \in \Gamma(k_q)$, $\gamma_q \neq 0$.
Alors :

$$(1/N^2) \sum_{1 \leq n < m \leq N} \left| \int_{D_q} \exp 2\pi i \gamma_q(\phi_{m,n}(x_q)) dx_q \right| = O(\log N/N) .$$

Deuxième partie de la démonstration. - On est ramené à la majoration de

$$I(m, n) = \left| \int_D \exp 2\pi i \phi_{m,n}(x) dx \right|$$

dans les trois cas : $k_q = \mathbb{R}$, $k_q = \mathbb{C}$, k_q est non archimédien.

Dans le cas réel, la majoration de Koksma convient.

Dans le cas non archimédien, il suffit d'adapter certaines démonstrations dues à Françoise BERTRANDIAS [1].

Dans le cas complexe, l'adaptation (difficile) des méthodes utilisées dans le cas réel a été faite par J.-P. BERTRANDIAS.

Remarque 1. - Le résultat précédent est complètement différent de la généralisation du théorème de Koksma donnée par Françoise BERTRANDIAS dans [1].

Remarque 2. - Par des procédés analogues aux précédents, on peut démontrer : "Pour tout $a \in A - M$ et pour presque tout $\lambda \in A$, la suite $n \rightarrow \lambda a^n$ est équirépartie modulo \mathcal{O} ". (Il est d'ailleurs possible d'avoir un énoncé général qui engloberait les deux résultats.)

Remarque 3. - On ne connaît pas d'élément a pour lequel la suite $n \rightarrow na$ soit équirépartie modulo \mathcal{O} . Par contre, en transformant légèrement les S -nombres de Françoise BERTRANDIAS [1], on obtient des éléments de $A - M$ pour lesquels la suite a^n tend vers 0 modulo \mathcal{O} .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, 1965, Mémoire n° 4, VI + 98 p. (Thèse Sc.math. Paris 1965).
 - [2] CANTOR (D.). - The elementary theory of diophantine approximation over the ring of adeles, Illinois J. Math., t. 9, 1965, p. 677-700.
 - [3] CHAUVINEAU (Jean). - Equirépartition et équirépartition uniforme modulo 1, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, 3e année, 1961/62, n° 7, 35 p.
 - [4] EYMARD (Pierre). - Suites équiréparties dans un groupe compact, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 14e année, 1960/61, n° 3, 11 p.
 - [5] KOKSMA (J. F.). - Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins, Compos. Math., Groningen, t. 2, 1935, p. 250-258.
-