

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MARY DOLORÈS SCHROT

Pseudo-valuations sur les corps globaux

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 8, n° 2 (1966-1967),
exp. n° 14, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1966-1967__8_2_A5_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PSEUDO-VALUATIONS SUR LES CORPS GLOBAUX

par Mary Dolorès SCHROT

On appelle K un corps global de caractéristique 0 , si K est une extension finie de $\mathbb{Q}$. On appelle E un corps global de caractéristique p , si E est engendré de façon finie et de degré de transcendance 1 sur $\mathbb{F}_p$, le corps fini de p éléments. Par suite, chaque corps global est une extension algébrique, séparable et finie, d'un corps L ($\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_p(X)$) qui est le corps des quotients d'un domaine euclidien L_0 ($\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{F}_p[X]$), où $[L_0:pL_0] < \infty$ quel que soit l'élément p irréductible dans L_0 . On peut observer également qu'un tel L est contenu dans chaque corps F pour lequel il existe une pseudo-valuation non-triviale.

Dans la présente conférence, nous considérons l'aptitude des corps globaux à la théorie exposée dans notre conférence précédente [3], et nous démontrerons que la complétion d'un corps global F par rapport à une φ quelconque s'écrit comme un ensemble de séries formelles où l'on peut distinguer nettement les éléments de F et de F_0 .

THÉOREME 1. - F est un corps global si, et seulement si, les cinq conditions suivantes sont remplies :

- 1° F est le corps des quotients d'un domaine de Dedekind J ;
- 2° Quel que soit l'idéal premier $P \subset J$, $[J:P] < \infty$;
- 3° Il existe une pseudo-valuation φ , définie sur F et bornée sur J ;
- 4° Quelle que soit la pseudo-valuation φ , non-triviale sur F , φ est aussi non-triviale sur un corps infini quelconque $E \subseteq F$;
- 5° Quelle que soit la pseudo-valuation φ' , définie sur L et bornée sur L_0 , il existe une pseudo-valuation φ , définie sur F et bornée sur J , telle que $\varphi \sim \varphi'$ sur L .

Démonstration. - Soit F un corps global. F est le corps des quotients de F_0 , la clôture intégrale de L_0 dans F . F_0 est un domaine de Dedekind [4], d'où 1°. Il est bien connu que le nombre des classes d'un corps global est fini, et qu'il existe des idéaux premiers dans F_0 , d'où 2° et 3°. On peut trouver $L \subseteq F$ tel que, si $E \subseteq F$, où E est un corps infini, $L \subseteq E$ [2], d'où F/E est une extension finie. Si φ est une pseudo-valuation non-triviale sur F , on prend éventuellement $\varphi_1 \sim \varphi$, où φ_1 est définie comme dans le théorème 2 de [3]. Alors,

si $\alpha \in F$ et $\varphi(\alpha) < 1$, il existe des éléments $a_i \in E$, $0 \leq i \leq n$, tels que

$$a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0.$$

Si φ est triviale sur E ,

$$1 \leq \varphi_1(a_n) \leq \max\{\varphi_1(a_i \alpha^{n-i}) \mid 0 \leq i < n\} \leq \varphi_1(\alpha) < 1,$$

ce qui est une contradiction, d'où 4°.

Pour chaque idéal premier $P \subset F_0$, $P \cap L_0 = pL_0$, où p est un élément irréductible dans L_0 . Par contre, pour chaque tel p ,

$$pF_0 = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_g^{e_g},$$

où $P_i \subset F_0$ est un idéal premier, c'est-à-dire que p détermine un ensemble d'idéaux P tel que $P|pF_0$. Si φ' est définie sur L et bornée sur L_0 (théorème 1 [3]),

$$\varphi' \rightarrow \{p_1, p_2, \dots, p_\ell\}.$$

Il suffit de choisir pour chaque p_j , $1 \leq j \leq \ell$, au moins un P tel que $P|p_j F_0$, et de définir φ comme dans le théorème 2, pour obtenir 5°.

Maintenant, on suppose que F remplit les conditions 1° à 5°. La condition 3° implique qu'un corps L est contenu dans F , et qu'il existe au moins un idéal premier $P \subset J$. Supposons qu'il existe $y \in F$ tel que y n'est pas algébrique sur L . Alors, il existe une valuation non-archimédienne et non-triviale sur $L(y)$, mais triviale sur L [4]. Une telle valuation peut se prolonger à F [4], ce qui est en contradiction avec 4°. Donc F/L est algébrique.

Supposons que $\text{car } F = p$ et que F soit inséparable, c'est-à-dire que $F^p = F$. Si $\beta \in P$,

$$\beta J = P^b B, \quad \text{où } P \nmid B \text{ et } b \in \mathbb{Z}_+.$$

Il existe k tel que $p^k > b$, et $\alpha \in F$ tel que $\alpha^{p^k} = \beta$. Alors

$$\alpha J = P^a A \quad \text{et} \quad \alpha^{p^k} J = P^{ap^k} A^{p^k}, \quad \text{où } P \nmid A \text{ et } a \in \mathbb{Z}_+.$$

Alors

$$ap^k = b < p^k,$$

d'où $a < 1$, ce qui est une contradiction. F/L est donc toujours une extension algébrique et séparable.

Il faut que J , en tant que domaine de Dedekind, soit intégralement clos. Donc

$F_0 \subseteq J$, où F_0 est la clôture intégrale de L_0 dans F . Supposons que $\alpha \in J$, $\alpha \notin F_0$. Soit $E = L(\alpha)$. Alors

$$\alpha \in J' = J \cap E,$$

mais

$$\alpha \notin E_0 = \sum_{j=1}^t L_0 \omega_j,$$

où

$$\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_t\}$$

est une base intégrale de E/L . Il n'est pas difficile de vérifier qu'il existe $g \in L_0$ tel que

$$J' = E_{0_M} = \{\beta/m \mid \beta \in E_0, (m, g) = 1\}.$$

Soit $(p, g) = 1$, où p est un élément irréductible de L_0 . On peut maintenant trouver une pseudo-valuation φ , définie sur L et bornée sur L_0 , dont l'extension à F n'est pas bornée sur J . Donc 5° implique que $J = F_0$.

Soit p un élément irréductible quelconque de L_0 . Alors

$$pF_0 = P_1^{e_1} P_2^{e_2} \dots P_r^{e_r},$$

et

$$[F_0 : P_j] = [L_0 : pL_0]^{f_j}, \quad \text{où } f_j < \infty, \quad 1 \leq j \leq r.$$

Soit $n = \sum_{j=1}^r e_j f_j$. Supposons que $[F:L] > n$, et soit $E \subseteq F$ un corps quelconque tel que $[E:L] = m > n$. Alors

$$pE_0 = P_1^{e'_1} P_2^{e'_2} \dots P_s^{e'_s}, \quad s \leq r, \quad P_j |_{P'_i(j)} F_0,$$

de sorte que $e'_i \leq e_j$, $f'_i \leq f_j$. Donc

$$n < m = \sum_{i=1}^s e'_i f'_i \leq \sum_{j=1}^r e_j f_j = n,$$

ce qui est une contradiction.

Donc F est une extension algébrique, séparable, et finie de L , c'est-à-dire un corps global.

Soit F un corps global, où $[F:L] = n$. On rappelle quelques faits bien connus avec des notations adéquates. Il existe $\zeta \in F_0$ tel que $F = L(\zeta)$. Soit

$$f(y) \in L_0[y]$$

le polynôme minimal de ζ , et soit $\tilde{L}$ la complétion de L par rapport à φ_∞ , la valuation à l'infini. Alors

$$f(y) = \sum_{i=1}^{r+1} h_i(y) ,$$

où

$$h_i(y) \in \tilde{L}[y] , \quad \deg h_i = s_i , \quad \sum_{i=1}^{r+1} s_i = n ,$$

et où r est le nombre minimal de générateurs du groupe des unités de F_0 . Il existe $r+1$ valuations $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{r+1}$ indépendantes sur F , mais égales à φ_∞ sur L . Donc, quel que soit $\xi \in F$,

$$\varphi_\infty(N_{F/L}(\xi)) = \varphi_\infty\left(\prod_{i=1}^{r+1} \xi^{(i)s_i}\right) = \prod_{i=1}^{r+1} \psi_i(\xi) .$$

Dans le cas, car $F = 0$, $r+1 = r_1 + r_2$, où r_1 est le nombre de conjuguées réelles de ζ , r_2 le nombre de paires de conjuguées complexes, et $r_1 + 2r_2 = n$, on peut aussi écrire

$$|\xi|_i = |\xi^{(i)}| = \psi_i(\xi)^{1/s_i} , \quad 1 \leq i \leq r_1 + r_2 ,$$

et

$$|\xi|_i = |\xi|_{i-r_2} , \quad r_1 + r_2 < i \leq n .$$

THÉOREME 2. - Soient F un corps global dont $[F:L] = n$, et $\gamma \in F_0$ un élément tel que

$$\psi_i(\gamma) > 1 , \quad 1 \leq i \leq r+1 .$$

Soit S un système quelconque de représentants de $F_0/\gamma F_0$. Si $\xi \in F$ et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(\xi - \sum_{j=j_0}^t \beta_j \gamma^j) = 0 ,$$

où $\beta_j \in S$ et $\varphi = \varphi_\gamma$, alors il existe v' et s tels que $v \geq v'$ implique

$$\beta_{v+s} = \beta_s .$$

Démonstration. - Il suffit de considérer le cas où $j_0 = 0$, car on peut trouver un seul k tel que

$$\xi F_0 = (\gamma^k C)/D , \quad C/\gamma F_0 , \quad (\gamma, D) = 1 ,$$

d'où

$$\xi \gamma^{-k} \in F_0 \mathbb{M}, \quad \xi \gamma^{-k-1} \notin F_0 \mathbb{M}.$$

Donc

$$\xi = \xi_0 = \beta_0 + \beta_1 \gamma + \dots + \beta_{v-1} \gamma^{v-1} + \xi_v \gamma^v,$$

et

$$\xi_v = \xi_0 / \gamma^v - (\beta_0 + \beta_1 \gamma + \dots + \beta_{v-1} \gamma^{v-1}) / \gamma^v.$$

Cas 1 : car $F = 0$. Soit

$$A = \max\{|\alpha|_i \mid \alpha \in S, \quad 1 \leq i \leq n\}.$$

Alors, lorsque $1 \leq i \leq n$,

$$|\xi_v|_i \leq |\xi_0|_i / |\gamma|_i^v + A(1 + |\gamma|_i + \dots + |\gamma|_i^{v-1}) / |\gamma|_i^v \leq A + |\xi_0|_i / |\gamma|_i^v.$$

Il existe donc un entier v' tel que

$$|\xi_v^{(i)}| = |\xi_v|_i \leq A + 1, \quad 1 \leq i \leq n, \quad v \geq v'.$$

Cas 2 : car $F = p$. Soit

$$B = \max\{\psi_i(\alpha) \mid \alpha \in S, \quad 1 \leq i \leq r+1\}.$$

Il existe v' tel que

$$\psi_i(\xi_v) \leq B, \quad 1 \leq i \leq r+1, \quad v \geq v'.$$

Maintenant, pour chaque v , $\xi = \xi_0$ étant donné, soit $f_v(y) \in L_0[y]$ le polynôme minimal de ξ_v , et soit

$$C = \{f_v(y) \mid v \geq v'\}.$$

Si $a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_{n-1} y + a_n \in C$, $\varphi_\infty(a_i)$ est bornée, $1 \leq i \leq n$.
Donc l'ensemble C est fini, et il existe s tel que

$$\xi_{v'+s} = \xi_v, \quad \text{et} \quad \xi_{v+s} = \xi_v,$$

quel que soit $v \geq v'$. Visiblement, $\beta_{v+s} = \beta_v$ lorsque $\xi_{v+s} = \xi_v$.

THÉOREME 3. - Soit F un corps global. Si $\gamma \in F_0$, et

$$\psi_i(\gamma) > d, \quad 1 \leq i \leq r+1,$$

où

$$d = \begin{cases} 4, & \text{si } \text{car } F = 0, \\ 1, & \text{si } \text{car } F = p, \end{cases}$$

il existe alors un système de représentants S de $F_0/\gamma F_0$ tel que, quel que soit $\xi \in F_0$, il existe $g \in \mathbb{Z}_+$ et $\beta_j \in S$, $0 \leq j \leq g$, de sorte que

$$\xi = \sum_{j=0}^g \beta_j \gamma^j .$$

Démonstration. - Soit S tel que, pour chaque $\alpha \in S$,

$$\sum_{i=1}^n |\alpha|_i \quad \left(\sum_{i=1}^{r+1} \psi_i(\alpha) \right)$$

soit minimal lorsque $\text{car } F = 0$ ($\text{car } F = p$), c'est-à-dire, si $\xi \in F_0$ et $\xi \equiv \alpha \pmod{\gamma}$,

$$\sum_{i=1}^n |\xi|_i \geq \sum_{i=1}^n |\alpha|_i .$$

Soient $0 \neq \xi \in F_0$, et φ une pseudo-valuation telle que $\rho_\varphi = \rho_\gamma$. Supposons que

$$\xi = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \gamma^j ,$$

par rapport à φ où $\beta_j \in S$, et la série ne se termine pas. D'après le théorème 2, il existe v' et s tels que

$$\xi_{v+s} = \xi_v ,$$

lorsque $v \geq v'$. On remarque que

$$\xi_{v+1} = (\xi_v - \beta_v)/\gamma .$$

Si $\text{car } F = 0$, quel que soit $v \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^n |\xi_{v+1}|_i < \sum_{i=1}^n (|\xi_v|_i + |\beta_v|_i)/2 < \sum_{i=1}^n |\xi_v|_i .$$

Donc, si $v \geq v'$,

$$\sum_{i=1}^n |\xi_{v+s}|_i < \sum_{i=1}^n |\xi_v|_i ,$$

ce qui est une contradiction.

Si $\text{car } F = p$, on obtient une contradiction pareille en démontrant que

$$\sum_{i=1}^{r+1} \psi_i(\xi_{v+s}) < \sum_{i=1}^{r+1} \psi_i(\xi_v) .$$

Donc il existe v'' tel que $v > v''$ implique $\beta_v = 0$ lorsque $\xi \in F_0$.

THÉOREME 4. - Soit F un corps global. Il existe $\tau = \tau(F)$ de sorte que, lorsque $\gamma' \in F_0$ et $\varphi_\infty(N\gamma') > \tau$, il existe $\gamma \in F_0$ tel que $\gamma F_0 = \gamma' F_0$ et

$$\psi_i(\gamma) > d, \quad 1 \leq i \leq r+1.$$

Démonstration. - Soit $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r\}$ un ensemble de générateurs du groupe des unités. Alors $\gamma F_0 = \gamma' F_0$ si, et seulement si,

$$\gamma = \omega \varepsilon_1^{a_1} \varepsilon_2^{a_2} \dots \varepsilon_r^{a_r} \gamma',$$

où $\omega^n = 1$ et $a_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq r$. En ce cas,

$$\begin{aligned} \psi_i(\gamma) > d &\iff \prod_{k=1}^r \psi_i(\varepsilon_k^{-1})^{a_k} < \psi_i(\gamma'/d) \\ &\iff \sum_{k=1}^r a_k \log \psi_i(\varepsilon_k^{-1}) < \log \psi_i(\gamma'/d) \\ &\iff \sum_{k=1}^r a_k \eta_{ik} < \zeta_i, \quad 1 \leq i \leq r+1, \end{aligned}$$

où

$$\eta_{ik} = \log \psi_i(\varepsilon_k^{-1}) \quad \text{et} \quad \zeta_i = \log \psi_i(\gamma'/d),$$

$1 \leq i \leq r+1$, $1 \leq k \leq r$. Donc, nous nous intéressons à une solution

$$(a_1, a_2, \dots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$$

du système

$$\sum_{k=1}^r X_k \eta_{ik} < \zeta_i, \quad 1 \leq i \leq r+1.$$

On observe que

$$\sum_{i=1}^r \zeta_i = \log \varphi_\infty(N\gamma) - \zeta_{r+1},$$

et que, pour chaque k ,

$$\sum_{i=1}^r \eta_{ik} = -\eta_{r+1,k},$$

car ε_k est une unité. Alors

$$\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r X_k \eta_{ik} = - \sum_{k=1}^r X_k \eta_{r+1,k} ,$$

de sorte que, lorsque

$$\sum_{k=1}^r X_k \eta_{ik} < \zeta_i , \quad 1 \leq i \leq r ,$$

il s'ensuit que

$$\sum_{k=1}^r X_k \eta_{r+1,k} > \zeta_{r+1} - \log \varphi_{\infty}(N_Y) .$$

Il s'agit de trouver un nombre réel t tel que, lorsque

$$\log \varphi_{\infty}(N_Y) > t ,$$

il existe $(a_1, a_2, \dots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$ tel que

$$\sum_{k=1}^r a_k \eta_{ik} < \zeta_i , \quad 1 \leq i \leq r ,$$

et

$$\zeta_{r+1} - \log \varphi_{\infty}(N_Y) < \sum_{k=1}^r a_k \eta_{r+1,k} < \zeta_{r+1} .$$

Si on considère les r premières inégalités, le déterminant du système est le régulateur du corps global F , qui est toujours non nul. Ce système est une translation de celui considéré dans le lemme suivant.

LEMME. - Soit

$$\sum_{k=1}^r X_k \eta_{ik} < 0 , \quad 1 \leq i \leq r ,$$

un système de r inégalités à coefficients réels, avec déterminant non-nul. Alors, quand $t > 0$ est assez grand, il existe une solution du système

$$(a_1, a_2, \dots, a_r) \in \mathbb{Z}^r ,$$

telle que

$$\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r a_k \eta_{ik} > -t .$$

Démonstration. - Les r inégalités déterminent un cône A ouvert et convexe dans $\mathbb{R}^r$. Lorsque $(X_1, X_2, \dots, X_r) \in A$,

$$\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r x_k \eta_{ik} < 0 .$$

Quel que soit $t > 0$, il existe un ensemble borné A_t des points

$$(x_1, x_2, \dots, x_r) \in A$$

tel que

$$\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r x_k \eta_{ik} > -t .$$

Quand t est assez grand, A contient une r -sphère de rayon 1, donc un point de Z^r .

Si

$$t_0 = \inf\{t \mid A_t \cap Z^r \neq \emptyset\} ,$$

il suffit de poser $\tau = e^{t_0}$.

On sait que, pour chaque F , il existe $h = h(F)$ tel que P^h est principal, quel que soit l'idéal premier P . Donc, $\mathcal{P}$ étant donné, on peut trouver γ_1 tel que $P \mid \gamma_1 F_0$ si, et seulement si, $P \in \mathcal{P}$. De plus, il existe $c \in Z_+$, et de là, $\gamma \in F_0$ tel que

$$\varphi_\infty(N\gamma) = \varphi_\infty(N\gamma_1^c) \geq \tau = \tau(F) ,$$

où

$$\gamma F_0 = \gamma_1^c F_0 \quad \text{et} \quad \psi_i(\gamma) > d, \quad 1 \leq i \leq r+1 .$$

En prenant S d'après le théorème 3, nous obtenons notre résultat principal :

THÉOREME 5. - Soient F un corps global, et $\mathcal{P}$ un ensemble fini d'idéaux premiers dans F_0 . Il existe $\gamma \in F_0$ tel que $\mathcal{P}_\gamma = \mathcal{P}$, et il existe un système S de représentants de $F_0/\gamma F_0$ tel que l'ensemble $\mathcal{K}$ de toutes séries formelles dans γ à coefficients dans S a les propriétés suivantes :

1° Si φ est une pseudo-valuation quelconque telle que $\mathcal{P}_\varphi = \mathcal{P}$, $\mathcal{K}$ est la complétion de F par rapport à φ ;

2° Il existe une correspondance bijective entre les éléments de F et les éléments de $\mathcal{K}$ qui sont périodiques ;

3° Il existe une correspondance bijective entre les éléments de F_0 et les polynômes dans γ à coefficients dans S .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARTIN (Emil). - Theory of algebraic numbers, Lectures held at the Mathematisches Institut Göttingen. - Göttingen, G. Striker, 1959.
 - [2] MAC LANE (Saunders). - Modular fields, I : Separating transcendence bases, Duke Math. J., t. 5, 1939, p. 372-393.
 - [3] SCHROT (Mary Dolorès). - Pseudo-valuations sur les domaines de Dedekind, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 8e année, 1966/67, n° 10, 7 p.
 - [4] ZARISKI (Oscar) et SAMUEL (Pierre). - Commutative algebra, t. 1. - Princeton, D. Van Nostrand, 1958 (The University Series in higher Mathematics).
-