Mary Dolorès Schrot

Pseudo-valuations sur les domaines de Dedekind

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 8, n° 2 (1966-1967), exp. n° 10, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1966-1967__8_2_A1_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
8e année, 1966/67, n° 10

30 janvier 1967

PSEUDO-VALUATIONS SUR LES DOMAINES DE DEDEKIND

par Mary Dolorès SCHROT

Introduction. - Il est bien connu qu'il existe, sur le corps Q des rationnels, des classes topologiques $\tilde{\varphi}$, de valuations non archimédiennes φ, de sorte que chaque classe corresponde à un élément irréductible p de Z, ou à un idéal premier P dans Z :

$$\tilde{\varphi} \Longleftrightarrow p \Longleftrightarrow P = pZ \ .$$

La complétion Q_p de Q par rapport à φ est encore un corps, et si S est un système quelconque de représentants de Z modulo p, on peut exprimer Q_p par la totalité des séries formelles dans p à coefficients dans S. A condition que $p \neq 2$, on peut choisir S, tel que les éléments de Q correspondent aux séries dont la partie finale est périodique, et que les entiers relatifs s'écrivent comme les polynômes dans p à coefficients dans S. C'est à peu près pareil pour le corps $k(X)$ des quotients de l'anneau $k[X]$ de polynômes à une indéterminée, sur k, un corps fini.

Pour généraliser cette situation, on peut considérer un domaine moins spécial, ou bien une fonction φ définie d'une manière moins restrictive.

Définition. - Soient H un anneau, et $\varphi : H \to \mathbb{R}$ telle que :

1° $\varphi(\alpha) = 0 \iff \alpha = 0$;

2° $\forall\ 0 \neq \alpha \in H$, $\varphi(\alpha) > 0$;

3° $\varphi(\alpha\beta) \leqslant \varphi(\alpha)\ \varphi(\beta)$;

4° $\varphi(\alpha - \beta) \leqslant \max\{\varphi(\alpha)\ ,\ \varphi(\beta)\}$.

On appelle une telle fonction une pseudo-valuation non-archimédienne ou, simplement, une pseudo-valuation. On exclut aussi, dans la suite, le cas trivial où $\varphi(\alpha) \geqslant 1$, $\forall\ 0 \neq \alpha \in H$.

En cherchant une généralisation de la situation de tout-à-l'heure, il est naturel d'exiger un domaine de Dedekind. En exigeant davantage, on trouvera une généralisation utilisable uniquement quand H est un corps global.

Considérons un domaine de Dedekind J, et son corps de quotients F. Soit φ une pseudo-valuation définie sur F et bornée sur J. Soit

$$\delta = \sup\{\varphi(\alpha) \mid \alpha \in J\} \ .$$

Pour chaque ε , $0 < \varepsilon \leqslant 1$, soit

$$G_\varepsilon = \{\alpha \in J \mid \varphi(\alpha) < \varepsilon\} ,$$

et soit B_ε l'idéal engendré par G_ε dans J .

THÉORÈME 1. - Chaque telle φ détermine un ensemble fini $\mathcal{P}_\varphi = \{P_1, P_2, \dots, P_\ell\}$ d'idéaux premiers de J , tel que

$$B_\varepsilon = P_1^{a_1(\varepsilon)} P_2^{a_2(\varepsilon)} \dots P_\ell^{a_\ell(\varepsilon)} , \quad \text{où} \quad a_i(\varepsilon) \in Z_+ \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} a_i(\varepsilon) = +\infty , \quad 1 \leqslant i \leqslant \ell .$$

Ceci exige d'abord un lemme.

LEMME. - Quel que soit ε , $0 < \varepsilon \leqslant 1$, il existe $t = t(\varepsilon) \in Z_+$ tel que

$$B_1^t \subseteq G_\varepsilon .$$

Il existe $G' = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s\} \subset G$, tel que B_1 est engendré par G' . Soit

$$\varepsilon_1 = \max\{\varphi(\gamma_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant s\} .$$

Alors, $\beta \in B_1$ implique $\varphi(\beta) \leqslant \varepsilon_1 \delta < \delta$, de sorte que $B_1 \neq J$. Il suffit de choisir t tel que $\varepsilon_1^t \delta < \varepsilon$, car chaque élément de B_1^t s'écrit comme une somme des produits $\alpha\gamma_1' \dots \gamma_t'$, $\alpha \in J$, $\gamma_j' \in G'$, $1 \leqslant j \leqslant t$.

Soit $\mathcal{P}_\varphi$ l'ensemble des idéaux premiers qui divisent B_1 , c'est-à-dire

$$B_1 = P_1^{a_1} P_2^{a_2} \dots P_\ell^{a_\ell} , \qquad a_i \in Z_+ \quad \text{et} \quad P_i \in \mathcal{P}_\varphi , \quad 1 \leqslant i \leqslant \ell .$$

Alors, $\forall\, \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$,

$$B_1^{t(\varepsilon)} \subseteq G_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon \subseteq B_1 ,$$

de sorte que

$$B_\varepsilon = P_1^{a_1(\varepsilon)} P_2^{a_2(\varepsilon)} \dots P_\ell^{a_\ell(\varepsilon)} ,$$

et $\varepsilon_0 < \varepsilon$ implique $a_i(\varepsilon_0) \geqslant a_i(\varepsilon)$.

Supposons qu'il existe ε' tel que $\forall\, \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon'$,

$$a_1(\varepsilon) = a_1(\varepsilon') .$$

Alors $B_\varepsilon = B_{\varepsilon'} C_\varepsilon$, tandis que $P_1 \nmid C_\varepsilon$. On peut fixer un β quelconque dans $B_{\varepsilon'}$, et choisir $\varepsilon < \varepsilon'$ tel que $0 < \varepsilon.\delta.\omega(1/\beta) < 1$. Puis, en choisissant $\alpha \in C_\varepsilon$ tel que $P_1 \nmid \alpha J$, on trouvera une contradiction :

$$1 \leqslant \varphi(\alpha) = \omega((\alpha\beta)/\beta) \leqslant \omega(\alpha\beta)\ \omega(1/\beta) \leqslant \varepsilon\delta\omega(1/\beta) < 1 \quad .$$

Donc $\omega \to \mathcal{P}$.

On observe maintenant, $\mathcal{P}$ étant fixé, que, pour chaque $\xi \in F^*$, il existe une seule factorisation de ξJ de la forme

$$(P_1^{d_1}\ P_2^{d_2}\ \ldots\ P_\ell^{d_\ell}\ A)/D$$

où $d_i \in Z$ et $(A\ ,\ D) = (A\ ,\ P_i) = (D\ ,\ P_i) = J$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$.

THÉORÈME 2. - Soit $\mathcal{P} = \{P_1\ ,\ P_2\ ,\ \ldots\ ,\ P_\ell\}$. Il existe ω sur F , bornée sur J , telle que $\mathcal{P}_\omega = \mathcal{P}$.

On peut choisir $0 < c_i < 1$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$, et définir

$$\omega(0) = 0 \ , \qquad \omega(\xi) = \max\{c_i^{d_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell\} \quad .$$

Il est facile de vérifier que ω est une pseudo-valuation.

Donc on peut dire que chaque ω détermine un ensemble $\mathcal{P}$, et que chaque $\mathcal{P}$ détermine au moins une pseudo-valuation ω :

$$\omega \to \mathcal{P} \to \omega' \quad .$$

Dans un tel cas, il est visible que $\omega \sim \omega'$ sur J .

Pour un $\mathcal{P}$ donné, soit

$$\mathcal{M} = \{\mu \in J \mid P \in \mathcal{P} \implies P \nmid \mu J\} \quad .$$

Quel que soit $C \subseteq J$, on peut définir

$$C_{\mathcal{M}} = \{\alpha/\mu \mid \alpha \in C\ ,\ \mu \in \mathcal{M}\} \quad .$$

Evidemment, $J_{\mathcal{M}} = \{\xi \in F \mid \xi J = (P_1^{d_1}\ P_2^{d_2}\ \ldots\ P_i^{d_i}\ A)/D\ ,\ d_i \geqslant 0\}$.

THÉORÈME 3. - Soient $\mathcal{P}$ donné, et ω telle que $\mathcal{P}_\omega = \mathcal{P}$. Soit

$$\delta = \sup\{\omega(\alpha) \mid \alpha \in J\} \quad .$$

Alors,

$$\{\alpha \in F \mid \omega(\alpha) \leqslant 1\} \subseteq J_{\mathcal{M}} \subseteq \{\alpha \in F \mid \omega(\alpha) \leqslant \delta\} \quad .$$

Soit $\alpha \in F$, $\varphi(\alpha) \leqslant 1$, tandis que

$$\alpha J = (P_1^{d_1} P_2^{d_2} \dots P_\ell^{d_\ell} A)/D \quad ,$$

où il existe $j \geqslant 1$ tel que $d_i < 0$, $1 \leqslant i \leqslant j$, $d_i \geqslant 0$, $j+1 \leqslant i \leqslant \ell$. Soit $c_i = -d_i \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant j$. D'après le lemme, il existe $t = t(1)$ tel que $B_1^t \subseteq G_1$, où $B_1 = P_1^{a_1} P_2^{a_2} \dots P_\ell^{a_\ell}$. De plus, il existe $s \in Z_+$ tel que $sc_i \geqslant a_i t$, $1 \leqslant i \leqslant j$. Donc,

$$\alpha^s D^s \prod_{i=1}^{j} P_1^{sc_i - a_i t} B_1^t = A^s \prod_{i=j+1}^{\ell} P_i^{sd_i + a_i t} \quad ,$$

de sorte que

$$\alpha^s CB_1^t = H \ , \qquad \text{où } P_i \not| H \ , \quad 1 \leqslant i \leqslant j \quad .$$

Soit $\lambda \in H$, $P_i \not| \lambda$, $1 \leqslant i \leqslant j$, de sorte que $\varphi(\lambda) \geqslant 1$. On a $\lambda/\alpha^s \in B_1^t$, de sorte que $\varphi(\lambda/\alpha^s) < 1$, donc

$$1 \leqslant \varphi(\lambda) = \varphi(\lambda/\alpha^s . \alpha^s) \leqslant \varphi(\lambda/\alpha^s) < 1 \quad ,$$

ce qui est une contradiction.

Quel que soit $\xi \in J_{\mathfrak{M}}$, il existe $\zeta \in J$ et $\mu \in \mathfrak{M}$ tels que $\xi = \zeta/\mu$. De plus, il existe $\alpha \in J$ tel que $\alpha\mu - 1 = \beta \in B_1^t$. Donc,

$$\xi = \alpha\zeta - \beta\xi \qquad \text{et} \qquad \varphi(\xi) = \varphi(\alpha\zeta) \leqslant \delta \quad .$$

THÉORÈME 4. - $\mathcal{P}_\varphi = \mathcal{P}_{\varphi'}$ <u>si, et seulement si,</u> $\varphi \sim \varphi'$ <u>sur</u> F .

Soient φ et φ' deux pseudo-valuations telles que $\mathcal{P}_\varphi = \mathcal{P}_{\varphi'}$; et soit $\{\xi_s\} \subset F$ une suite telle que

$$\lim_{s\to\infty} \varphi(\xi_s) = 0 \quad .$$

Il existe alors $s_0 \in Z$ tel que $\forall\, s \geqslant s_0$, $\xi_s \in J_{\mathfrak{M}}$, de sorte qu'il existe $\alpha_s \in J$ et $\mu_s \in \mathfrak{M}$ tels que $\xi_s = \alpha_s/\mu_s$. Alors,

$$\varphi(\alpha_s) = \varphi(\xi_s\, \mu_s) \leqslant \delta\varphi(\xi_s) \quad ,$$

d'où

$$\varphi(\alpha_s) \to 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi'(\alpha_s) \to 0 \quad ,$$

car $\varphi \sim \varphi'$ sur J . Mais,

$$\varphi'(\xi_s) = \varphi'(\alpha_s/\mu_s) \leqslant \delta'\varphi'(\alpha_s) \quad ,$$

de sorte que

$$\lim_{s\to\infty} \varphi'(\xi_s) = 0 \quad .$$

Alors, $\tilde{\varphi} \longleftrightarrow \wp$.

Soit γ un élément quelconque de J tel que $\gamma J \neq J$. Soit

$$\wp_\gamma = \{P_1 , P_2 , \dots , P_\ell\}$$

l'ensemble des idéaux premiers qui divisent γJ , c'est-à-dire,

$$\gamma J = P_1^{b_1} P_2^{b_2} \dots P_\ell^{b_\ell} , \qquad b_i \in Z_+ , \quad 1 \leqslant i \leqslant \ell \quad .$$

Quel que soit $\xi \in F^*$, il existe une seule expression

$$\xi J = (\gamma^k C)/D$$

telle que $(\gamma J , D) = (C , D) = J$ et $\gamma J \nmid C$. Si $0 < c < 1$, on peut définir $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\xi) = c^k$, et vérifier que φ est une pseudo-valuation. Ainsi, on a obtenu le théorème suivant.

THÉORÈME 5. - <u>Soit</u> γ <u>donné, il existe</u> φ , <u>discrète sur</u> F <u>et bornée sur</u> J , <u>telle que</u> $\wp_\varphi = \wp_\gamma$. <u>On peut définir</u> φ <u>de sorte que</u>

$$\{\alpha \in F \mid \varphi(\alpha) \leqslant \varphi(\gamma)^j\} = \{\alpha \in F \mid \varphi(\alpha) < \varphi(\gamma)^{j-1}\} = \gamma^j J_{\mathfrak{M}} \quad .$$

Donc $\tilde{\varphi} \longleftrightarrow \wp \longleftarrow \gamma$.

Maintenant, on exige de plus que J soit un domaine où $[J : C] < \infty$ quel que soit l'idéal $(0) \neq C \subseteq J$.

THÉORÈME 6. - <u>Soit</u> $\gamma \in J$ <u>un élément tel que</u> $\gamma J \neq J$. <u>Soit</u>

$$S = \{0 = \alpha_0 , \alpha_1 , \dots , \alpha_{\omega-1}\} \simeq J/\gamma J$$

<u>un système de représentants, où</u> $\omega = [J : \gamma J]$. <u>Alors, à chaque élément</u> $\xi \in F^*$, <u>correspond un, et un seul, entier relatif</u> j_0 <u>et une suite</u> $\{0 \neq \beta_{j_0} , \beta_{j_0+1} , \dots\}$ <u>d'éléments de</u> S , <u>de sorte que, pour toute</u> φ <u>telle que</u> $\wp_\varphi = \wp_\gamma$,

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(\xi - \sum_{j=j_0}^{t} \beta_j \gamma^j) = 0 \quad .$$

Soit ξ donné. Il existe j_0 tel que

$$\xi J = (\gamma^{j_0} C)/D \qquad \text{où} \quad (\gamma J , D) = (C , D) = J \quad \text{et} \quad \gamma J \nmid C \quad .$$

Alors, il suffit de donner la justification pour le cas où $\xi \in J_{\mathfrak{M}}$ et $\xi \notin B_{\mathfrak{M}}$ avec $B = \gamma J$. On peut trouver $\beta_0 \in S$ tel que

$$\xi \equiv \beta_0 \pmod{B_{\mathfrak{M}}} \quad ,$$

où $(\xi - \beta_0)/\gamma = \xi_1 \in J_{\mathfrak{M}}$, car $J_{\mathfrak{M}}/B_{\mathfrak{M}} \simeq J/B$, et S est un système de représentants des deux. On peut donc déterminer β_1 , ξ_2 , β_2 , ... de sorte que, pour chaque $t \in Z_+$,

$$\xi = \sum_{j=0}^{t} \beta_j \gamma^j + \xi_{t+1} \gamma^{t+1} \quad .$$

Alors, si φ est définie comme dans le théorème 5,

$$\varphi(\xi - \sum_{j=0}^{t} \beta_j \gamma^j) = \varphi(\xi_{t+1} \gamma^{t+1}) \leqslant \varphi(\gamma)^{t+1}$$

qui tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

On peut écrire également,

$$\xi = \sum_{j=j_0}^{\infty} \beta_j \gamma^j \quad .$$

THÉORÈME 7. - <u>Soit</u> $\mathcal{H}$ <u>l'anneau de toutes les séries formelles</u>

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \beta_j \gamma^j , \qquad \beta_{j_0} \neq 0 , \quad \beta_j \in S , \quad j \geqslant j_0 \cdots \quad .$$

<u>Soit</u> φ <u>une pseudo-valuation telle que</u> $\mathcal{P}_\varphi = \mathcal{P}_\gamma$. <u>Alors,</u> $\mathcal{H}$ <u>est la complétion</u> F_φ <u>de</u> F <u>par rapport à</u> φ .

Il suffit de vérifier que $\mathcal{H}$ est la complétion par rapport à une telle φ . On peut choisir $0 < c < 1$, et définir

$$\varphi(\sum_{j=j_0}^{\infty} \beta_j \gamma^j) = c^{j_0} \quad .$$

Si $\xi \in F$ et $\xi = \sum_{j=j_0}^{\infty} \beta_j \gamma^j = \gamma^{j_0} \xi'$, alors $\xi' \in J_{\mathfrak{M}}$ et $\xi J = (\gamma^{j_0} C)/D$, où $(C , D) = (D , \gamma J) = J$ et $\gamma J \nmid C$. Il est visible que φ est une pseudo-valuation et que, sur F , φ est la même que dans le théorème 5.

Soit

$$A = \{ \sum_{j=j_0}^{j_1} \beta_j \gamma^j \mid \beta_j \in S , \quad j_0 \in Z , \quad j_1 \in Z , \quad j_1 \geqslant j_0 \} \quad .$$

Evidemment, $A \subseteq F$. Soit $\sum_{j=j_0}^{\infty} \beta_j \gamma^j$ un élément quelconque de $\mathcal{H}$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $j_1 \geqslant j_0$ tel que $c^{j_1} \leqslant \varepsilon$, de sorte que

$$\varphi\Big(\sum_{j=j_0}^{\infty} \beta_j \gamma^j - \sum_{j=j_0}^{j_1} \beta_j \gamma^j \Big) = \varphi\Big(\sum_{j_1+1}^{\infty} \beta_j \gamma^j \Big) < c^{j_1} \leqslant \varepsilon \quad .$$

Alors A (et a fortiori F) est φ-dense dans $\mathcal{H}$.

Soit $\{\xi_s\}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}$; $\xi_s = \sum_{j=j(s)}^{\infty} \beta_j^{(s)} \gamma^j$. Nous cherchons un élément $\xi = \sum_{j=j_0}^{\infty} \beta_j \gamma^j$ tel que $\lim_{s\to\infty} \varphi(\xi_s - \xi) = 0$. En éliminant éventuellement un nombre fini d'éléments ξ_s , on peut supposer que $\varphi(\xi_s - \xi_t) < 1$, pour tous s , t , et définir $\beta_j = \beta_j^{(1)}$, $j(1) \leqslant j \leqslant 0$. Pour chaque $k \geqslant 1$, il existe $s(k)$ tel que s , $t \geqslant s(k)$ implique $\varphi(\xi_s - \xi_t) < c^k$. On peut alors définir $\beta_k = \beta_k^{s(k)}$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, si $c^k < \varepsilon$ et $s \geqslant s(k)$,

$$\varphi(\xi_s - \xi) < \varepsilon \quad .$$

En somme on peut constater :

Soit J un domaine de Dedekind où, quel que soit l'idéal $(0) \neq C \subseteq J$, $[J : C] < \infty$ et C^a est un idéal principal pour quelque $a \in Z_+$. Soit F le corps des quotients de J . Il existe donc des correspondances bijectives entre :

1° Les classes $\tilde{\varphi}$ de pseudo-valuations définies sur F et bornées sur J ,

2° Les classes $\tilde{\gamma}$ d'éléments de J , dont les diviseurs sont les mêmes,

3° Les ensembles finis $\mathcal{P}$ d'idéaux premiers de J .

$$\begin{tikzcd} \tilde{\varphi} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \tilde{\gamma} \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & \mathcal{P} & \end{tikzcd} \quad .$$

Il est toujours possible de représenter la complétion F_φ de F par rapport à φ par un anneau $\mathcal{H}$ de séries formelles.

Nous verrons, dans une seconde conférence, que nos conditions sont remplies exactement, quand F est un corps global, et nous y trouverons une manière de caractériser les parties de $\mathcal{H}$ correspondant à J et à F .