Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Marthe Grandet-Hugot

# Nombres de Pisot dans un corps de séries formelles

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 8, n° 1 (1966-1967), exp. n° 4, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1966-1967__8_1_A4_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
8e année, 1966/67, n° 4



5 décembre 1966

# NOMBRES DE PISOT DANS UN CORPS DE SÉRIES FORMELLES

par Marthe GRANDET-HUGOT

Dans un article, paru en 1962 [2], P. BATEMAN et A. DUQUETTE introduisent des " PV éléments" dans un corps de séries formelles ; ces éléments ont des propriétés analogues à celles des nombres de Pisot classiques.

Dans cet exposé, nous allons donner la définition de ces éléments, et indiquer leurs principales propriétés.

## 1. Notations et rappels.

Nous noterons par $S$ l'ensemble des nombres de Pisot, c'est-à-dire : l'ensemble des entiers algébriques $\theta$ sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, ayant tous leurs conjugués, autres que $\theta$ lui-même, de valeur absolue inférieure à 1 [6].

On sait que toute extension algébrique finie réelle de $\mathbb{Q}$ peut être engendrée par un nombre $\theta \in S$, et de plus, on connaît la caractérisation suivante des nombres $\theta \in S$ basée sur la répartition modulo 1 de la suite $\lambda\theta^n$ où $\lambda$ est réel:

Un nombre $\theta$ appartient à $S$ si et seulement s'il existe $\lambda$ réel, tel que si l'on pose :

$$\lambda\theta^n = u_n + \varepsilon_n , \qquad \text{où } u_n \in \mathbb{Z} \text{ et } -\frac{1}{2} \leqslant \varepsilon_n < \frac{1}{2} ,$$

la série $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2$ converge.

De même, ces nombres permettent d'obtenir une caractérisation des nombres algébriques à partir d'approximations rationnelles [4], [7].

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre réel $\alpha$ soit algébrique est qu'il ait des approximations rationnelles "régulièrement réparties", c'est-à-dire qu'il existe une suite de couples d'entiers $(u_n , v_n)$ et un nombre réel $\omega > 1$ tel que

$$|u_n \alpha - v_n| < \frac{C}{u_n^{\eta}} ,$$

$$|u_{n+1} - \omega u_n| < \frac{K}{u_n^{\eta}} ,$$

et si s est le degré de $\alpha$ : $s \leqslant 1 + \frac{1}{\eta}$ .

Nous verrons, dans la suite, que ces propriétés se généralisent d'une certaine manière aux éléments introduits par BATEMAN et DUQUETTE.

Nous désignerons par k un corps quelconque, k[x] l'anneau des polynômes à une indéterminée sur k , et k(x) son corps des quotients, c'est-à-dire le corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur k ; k(x) sera muni de sa "valuation à l'infini", c'est-à-dire que si

$$a = \frac{f}{g} \in k(x) , \qquad \text{où} \quad f \in k[x] \quad \text{et} \quad g \in k[x] ,$$

$$v_\infty(a) = d^\circ g - d^\circ f \qquad \text{et} \qquad |a|_\infty = e^{-d^\circ g + d^\circ f} ,$$

e étant un nombre réel quelconque supérieur à 1 (que l'on peut prendre égal à la base des logarithmes népériens). Quand nous n'utiliserons pas d'autre valuation de k(x) , nous noterons simplement v(a) et |a| .

La complétion de k(x) pour cette valuation est alors le corps des séries de Laurent formelles de la forme :

$$\alpha = \sum_{j=-h}^{\infty} a_{-j} x^{-j} , \qquad \text{où} \quad a_{-j} \in k , \quad a_{-h} \neq 0 ,$$

que l'on désigne par $k\{x^{-1}\}$ , alors $|\alpha| = e^h$ .

Un élément $\alpha \in k\{x^{-1}\}$ peut alors s'écrire :

$$\alpha = \sum_{j=-h}^{0} a_{-j} x^{-j} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{-j} x^{-j} .$$

En posant

$$E(\alpha) = \sum_{j=-h}^{0} a_{-j} x^{j} \in k[x] ,$$

$$\varepsilon(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{-j} x^{-j} ,$$

alors $|\varepsilon(\alpha)| < 1$ ; on obtient la décomposition suivante :

$$\alpha = E(\alpha) + \varepsilon(\alpha) ,$$

où $E(\alpha) \in k[x]$ et $|\varepsilon(\alpha)| < 1$ pour tout élément $\alpha \in k\{x^{-1}\}$ ; cette décomposition est unique et joue un rôle analogue à celui des parties entières et fraction-

naires dans le domaine réel. K désignera la clôture algébrique de $k\{x^{-1}\}$ , et $\hat{K}$ sa complétion.

## 2. Définition et existence des PV éléments.

DÉFINITION 1. - Nous désignerons par $\mathbb{S}^*$ l'ensemble ainsi défini : Un élément $\alpha$ de $k\{x^{-1}\}$ appartient à $\mathbb{S}^*$ s'il est entier algébrique sur $k[x]$ et si tous ses conjugués, autres que lui-même, par rapport à $k(x)$ sont de valeur absolue inférieure ou égale à 1 (c'est-à-dire de valuation positive ou nulle).

DÉFINITION 2. - Nous désignerons par $\mathbb{S}$ l'ensemble ainsi défini ( PV éléments de Bateman et Duquette) : Un élément $\theta$ de $k\{x^{-1}\}$ appartient à $\mathbb{S}$ s'il est entier algébrique sur $k[x]$ et si tous ses conjugués, autres que lui-même, par rapport à $k(x)$ sont de valeur absolue inférieure à 1 (c'est-à-dire de valuation positive).

Ces définitions entraînent que les éléments de $\mathbb{S}^*$ ou de $\mathbb{S}$ sont séparables sur $k(x)$ .

THÉORÈME 2.1. - Soit k un corps quelconque. Alors $k\{x^{-1}\}$ contient des éléments de $\mathbb{S}$ de tous degrés sur $k(x)$ .

En effet, considérons le polynôme $X^r - xX^{r-1} - 1$ , on voit alors facilement, en considérant son polygone de Newton, que ce polynôme, qui est irréductible sur $k(x)$, a une racine $\theta \in k\{x^{-1}\}$ vérifiant $|\theta| > 1$ , les autres racines dans K vérifiant $|\theta_i| < 1$ pour $i = 2 , \dots , r$ .

Remarques sur les éléments $\theta \in \mathbb{S}$ . - Soit

$$P(X) = X^s + a_1 X^{s-1} + \dots + a_s , \qquad \text{où } a_j \in k[x] , \quad j = 1 , \dots , s$$

le polynôme minimal de $\theta$ ; en considérant son polygone de Newton, on voit immédiatement que

$$|a_1| = |\theta| \qquad \text{et} \qquad |a_j| < |\theta| \quad \text{pour } j = 2 , \dots , s \ (^1) .$$

De plus, si $\theta_i$ $(i = 2 , \dots , s)$ désigne les conjugués de $\theta$ , on a

---

($^1$) Les nombres $\theta \in S$ vérifient une propriété analogue, en effet [5], il existe un polynôme $\Pi(X)$ tel que $\Pi(\theta) = 0$ et dont les coefficients sont, en valeur absolue, inférieurs ou égaux à $\theta$ , toutefois ce polynôme n'est pas nécessairement irréductible.

$$\frac{1}{|\theta|} < |\theta_i| \leqslant e^{-1/(s-1)} \quad ,$$

et si l'on pose

$$\rho = \max_{i=2,\ldots,s} |\theta_i| \quad ,$$

l'on a :

$$|\theta|^{-1/(s-1)} \leqslant \rho \leqslant e^{-1/(s-1)} \quad .$$

A l'aide d'un lemme analogue au lemme de Minkowski dans le cas réel, on démontre le théorème suivant.

THÉORÈME 2.2 [2]. - Soit $k$ un corps quelconque. Toute extension algébrique finie et séparable de $k(x)$, contenue dans $k\{x^{-1}\}$, peut être engendrée par un élément $\theta \in \mathbb{S}$.

En effet, toute extension algébrique finie et séparable est simple, on peut donc se borner aux extensions $k(x)(\xi)$, où $\xi \in k\{x^{-1}\}$ est algébrique et séparable sur $k(x)$, il existe alors une $k[x]$-base $\omega_1, \ldots, \omega_s$ pour la clôture entière de $k[x]$ dans $k(x)(\xi)$, c'est-à-dire que tout entier de $k(x)(\xi)$ peut s'écrire ([8], p. 265) :

$$\alpha = \sum_{i=1}^{s} X_i \, \omega_i \quad .$$

La suite de la démonstration se fait à peu près comme dans le cas réel.

Dans ce cas, $k(x)(\theta)$ contient une infinité de PV-éléments, et peut être engendré par l'un de ces éléments.

Cas particulier où $k$ est un corps parfait. - On obtient alors le lemme suivant:

LEMME 2.1. - Si $k$ est un corps parfait, alors tout élément de $k\{x^{-1}\}$ qui est algébrique sur $k(x)$ est aussi séparable sur $k(x)$.

Si $k$ est de caractéristique zéro, le résultat est trivial puisque $k(x)$ est aussi de caractéristique zéro, donc est parfait.

Si $k$ est de caractéristique $p \neq 0$ : Soit $\alpha$ un élément algébrique de $k\{x^{-1}\}$ et soit $g(X) \in k[x][X]$ un polynôme tel que $g(\alpha) = 0$ et dont le degré soit minimum. Supposons que $g(X)$ est inséparable, alors :

$$g(X) = A_n X^{np} + A_{n-1} X^{(n-1)p} + \ldots + A_1 X^p + A_0 \quad ,$$

où $A_j \in k[x]$, $j = 1, \ldots, n$ et $A_n \neq 0$. On peut alors écrire :

$$A_j = A_j(x) = A_{j,0}(x^p) + xA_{j,1}(x^p) + \ldots + x^{p-1} A_{j,p-1}(x^p) \quad \text{pour} \quad j = 0 , 1 , \ldots , n$$

puisque $g(\alpha) = 0$ , on a donc :

$$\sum_{i=0}^{p-1} x^i [A_{n,i}(x^p) \alpha^{pn} + A_{n-1,i}(x^p) \alpha^{p(n-1)} + \ldots + A_{0,i}(x^p)] = 0 ,$$

mais puisque $k$ est de caractéristique $p$ :

$$\alpha^{pi} = \alpha(x)^{pi} = [\alpha(x)^p]^i = \{\beta(x^p)\}^i ,$$

où $\beta \in k\{x^{-1}\}$ et est obtenu à partir de $\alpha$ en élevant chaque coefficient à la puissance $p$ . Alors chaque terme de la somme précédente ne contient que des puissances de $x$ dont l'exposant est congru à $x$ mod $p$ , il en résulte que tous les termes doivent être nuls, c'est-à-dire :

$$A_{n,i}(x^p) \alpha^{pn} + A_{n-1,i}(x^p) \alpha^{p(n-1)} + \ldots + A_{0,i}(x^p) = 0 \quad \text{pour} \quad i = 0 , \ldots , p - 1 .$$

$k$ étant parfait, tout coefficient de $A_{j,i}$ est une p-ième puissance, donc :

$$A_{j,i}(x^p) = [B_{j,i}(x)]^p , \qquad j = 0 , 1 , \ldots , n , \quad i = 0 , \ldots , p - 1 ,$$

donc on peut écrire :

$$[B_{n,i}(x) \alpha^n + B_{n-1,i}(x) \alpha^{n-1} + \ldots + B_{0,i}(x)]^p = 0 , \qquad i = 0 , 1 , \ldots , p - 1 .$$

D'autre part, nous avons supposé $A_n \neq 0$ , donc il existe $i$ tel que $A_{n,i} \neq 0$ , donc $B_{n,i} \neq 0$ . Alors $\alpha$ est zéro du polynôme :

$$B_{n,i}(x) X^n + \ldots + B_{0,i}(x) = 0$$

dont les coefficients appartiennent à $k[x]$ mais dont le degré est inférieur à celui de $g(X)$ , or nous avions supposé que $g(X)$ était de degré minimum, il en résulte que $\alpha$ est séparable sur $k(x)$ .

D'où l'on déduit le théorème suivant.

THÉORÈME 2.3. - Si $k$ est un corps parfait, toute extension algébrique finie de $k(x)$ , contenue dans $k\{x^{-1}\}$ , peut être engendrée par un élément $\theta \in \mathbb{S}$ .

## 3. Caractérisation.

P. BATEMAN et A. DUQUETTE ont montré le théorème suivant.

Si $k$ est un corps parfait, soit $\theta \in k\{x^{-1}\}$ tel que $|\theta| > 1$, s'il existe un élément $\lambda$ de $k\{x^{-1}\}$ non nul, tel que

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon(\lambda\theta^n) = 0 \quad .$$

Alors $\theta \in \mathbb{S}$ et $\lambda \in k(x)(\theta)$ .

En reprenant la démonstration, nous allons voir que le résultat est encore valable si le corps $k$ n'est pas parfait :

THÉORÈME 3.1. - Soit $k$ un corps quelconque. Un élément $\theta \in k\{x^{-1}\}$, tel que $|\theta| > 1$, appartient à $\mathbb{S}$ si, et seulement si, il existe $\lambda \neq 0$ et $\lambda \in k\{x^{-1}\}$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon(\lambda\theta^n) = 0$$

et de plus $\lambda \in k(x)(\theta)$ .

On obtient ainsi une caractérisation de l'ensemble $\mathbb{S}$ analogue à celle qui avait été obtenue pour les nombres de Pisot classiques. Nous obtiendrons également une caractérisation de l'ensemble $\mathbb{S}^*$ .

THÉORÈME 3.2. - Soit $k$ un corps quelconque, soit $\alpha \in k\{x^{-1}\}$, $|\alpha| > 1$ ; pour que $\alpha \in \mathbb{S}^*$, il faut et il suffit qu'il existe un élément $\lambda \neq 0$ de $k\{x^{-1}\}$ tel que, pour $n$ assez grand :

$$|\varepsilon(\lambda\alpha^n)| < \frac{1}{|\alpha|^2} \quad .$$

Alors $\lambda \in k(x)(\alpha)$ .

La démonstration s'appuie sur les lemmes suivants.

LEMME 3.1.(Lemme de Fatou). - Soit $\{u_n\}$ une suite d'éléments de $k[x]$ vérifiant une relation de récurrence à coefficients constants :

$$a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \ldots + a_r u_{n+r} = 0 \quad .$$

Alors il existe une relation de récurrence du même type où $a_i \in k[x]$ et $a_r = 1$ (élément unité de $k$ ).

LEMME 3.2. - Soient $k$ un corps quelconque, et $\{\xi_n\}$ une suite d'éléments de $k\{x^{-1}\}$ satisfaisant à une relation de récurrence

$$\xi_{n+r} + \alpha_{r-1}\,\xi_{n+r-1} + \ldots + \alpha_0\,\xi_n = 0 \quad ,$$

où $\alpha_0 , \dots , \alpha_{r-1}$ appartiennent à $k\{x^{-1}\}$ et sont des constantes. Soit $\{u_n\}$ une suite d'éléments de $k\{x^{-1}\}$ tels que :

$$|u_n - \xi_n| < \frac{1}{\max(|\alpha_0| , \dots , |\alpha_{r-1}| , 1)^2} \qquad \text{pour } n \geqslant N .$$

Alors la suite $\{u_n\}$ satisfait à une relation de récurrence à coefficients constants.

Pour $n \geqslant N + r$ , posons :

$$\varepsilon_n = u_n + \alpha_{r-1} u_{n-1} + \dots + \alpha_0 u_{n-r} ,$$

alors :

$$|\varepsilon_n| < |u_n - \xi_n + \alpha_{r-1}(u_{n-1} - \xi_{n-1}) + \dots + \alpha_0(u_{n-r} - \xi_{n-r})| ,$$

donc :

$$|\varepsilon_n| < \frac{1}{\max(|\alpha_0| , \dots , |\alpha_{r-1}| , 1)} .$$

Pour $n \geqslant N + 2r$ , nous poserons :

$$\eta_n = \varepsilon_n + \alpha_{r-1} \varepsilon_{n-1} + \dots + \alpha_0 \varepsilon_{n-r} ,$$

on a donc :

$$|\eta_n| < 1 \qquad \text{pour } n \geqslant N + 2r ,$$

donc, puisque $k\{x^{-1}\}$ est à valuation discrète, on a, pour $n \geqslant N + r$, $|\varepsilon_n| \leqslant e^{-1}$, et $|\eta_n| \leqslant e^{-1}$ pour $n \geqslant N + 2r$ , donc si l'on considère le déterminant de Kronecker :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} u_0 & \dots & u_n \\ \vdots & & \\ u_n & \dots & u_{2n} \end{vmatrix} ,$$

par combinaison linéaire des lignes et des colonnes, on obtient :

$$\Delta_n = \det(\delta_{i+j})$$

où

$$\delta_{i+j} = u_{i+j} \qquad \text{pour } i < N + r , \quad j < N + r ,$$

$$\delta_{i+j} = \eta_{i+j} \qquad \text{pour } i \geqslant N + 2r , \quad j \geqslant N + 2r ,$$

$$\delta_{i+j} = \varepsilon_{i+j} \qquad \text{dans les autres cas} ,$$

et, en posant :

$$M = \max(|u_0|\ ,\ |u_1|\ ,\ \dots\ ,\ |u_{2_{N+2r-2}}|\ ,\ 1)\ ,$$

on obtient :

$$|\Delta_n| \leqslant M^{N+r}\ (e^{-1})^{n-N-r+1}\ ,$$

donc, pour $n$ assez grand, $|\Delta_n| < 1$, donc puisque $\Delta_n \in k[x]$, $\Delta_n = 0$, et la suite $u_n$ satisfait à une relation de récurrence d'après le théorème de Kronecker.

Démonstration des théorèmes 3.1 et 3.2. - Soit $\alpha \in k\{x^{-1}\}$, tel que $|\varepsilon(\lambda\alpha^n)| < \frac{1}{|\alpha|^2}$ à partir d'un certain rang. En posant $\xi_n = \lambda\alpha^n$, nous obtenons une suite vérifiant les hypothèses du lemme 3.2, on a en effet la relation de récurrence :

$$\xi_{n+1} - \alpha\xi_n = 0\ ,$$

et l'inégalité

$$|u_n - \xi_n| < \frac{1}{|\alpha|^2} \qquad \text{pour} \quad n \geqslant N\ .$$

Les $u_n$ vérifient donc une relation de récurrence que l'on peut écrire :

$$A_0\, u_n + A_1\, u_{n+1} + \dots + u_{n+s} = 0$$

d'après le lemme de Fatou.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ représente donc une fraction rationnelle $\frac{A(X)}{Q(X)}$ et, dans $K$, clôture algébrique de $k\{x^{-1}\}$, cette fonction admet comme pôle, $\frac{1}{\alpha}$, intérieur au disque $|X| < 1$, les autres pôles étant dans le domaine défini par $|X| \geqslant 1$, ce qui montre que $\alpha \in \mathbb{S}^*$.

Si, de plus, $\varepsilon(\lambda\alpha^n) \to 0$ quand $n \to \infty$, alors les conjugués de $\alpha$ sont de valeur absolue inférieure à $1$, et $\alpha \in \mathbb{S}$.

Dans les deux cas, on voit immédiatement que $\lambda \in k(x)(\alpha)$.

Inversement, étant donné un élément $\alpha$ de $\mathbb{S}$ ou $\mathbb{S}^*$, il est facile de trouver un élément $\lambda$ tel que les hypothèses du théorème 3.1 ou 3.2 soient vérifiées.

## 4. Approximation rationnelle des éléments algébriques.

THÉORÈME 4.1. - Pour qu'un élément $\alpha \in k\{x^{-1}\}$ soit algébrique et séparable sur $k(x)$, il faut et il suffit qu'il admette des approximations rationnelles "régulièrement réparties", c'est-à-dire qu'il existe une suite d'approximations rationnelles

$\frac{u_n}{v_n}$ (où $u_n$ et $v_n \in k[x]$) ayant les propriétés suivantes :

$$\lim_{n\to\infty} |u_n - \alpha v_n| = 0$$

et

$$\exists\, \omega \in k\{x^{-1}\}\ , \quad |\omega| > 1 \qquad \lim_{n\to\infty} |u_{n+1} - \omega u_n| = 0 \ ;$$

alors $\omega \in \mathbb{S}$ et $\alpha \in k(x)(\omega)$ .

1° Soit $\alpha$ un élément de $k\{x^{-1}\}$ qui soit algébrique et séparable sur $k(x)$ , et soit $\omega \in \mathbb{S} \cap k(x)(\alpha)$ .

Alors, $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ où $\lambda$ et $\mu$ sont entiers algébriques sur $k(x)$ , on a donc

$$\lambda\omega^n = u_n + \varepsilon_n \qquad \text{où} \quad \varepsilon_n = -(\lambda_2\,\omega_2^n + \dots + \lambda_s\,\omega_s^n)\ ,$$

$$\mu\omega^n = v_n + \varepsilon'_n \qquad \text{où} \quad \varepsilon'_n = -(\mu_2\,\omega_2^n + \dots + \mu_s\,\omega_s^n)\ ,$$

$s$ étant le degré de $\alpha$ .

Alors

$$|\varepsilon_n| \leqslant C\rho^n$$

$$\text{où} \quad \rho = \max(|\omega_2|\ ,\ \dots\ ,\ |\omega_s|) \leqslant e^{-1/(s-1)} < 1\ ,$$

$$|\varepsilon'_n| \leqslant C\rho^n$$

d'où

$$|u_n - \alpha v_n| < K\rho^n\ ,$$

$$|u_{n+1} - \omega u_n| < K_1\,\rho^n\ ,$$

$$|v_{n+1} - \omega v_n| < K_1\,\rho^n\ ,$$

$K$ et $K_1$ étant des constantes. On peut donc dire, comme dans le cas réel, que les $u_n$ et les $v_n$ forment "presque" une progression géométrique.

2° Réciproquement, soit $\alpha$ un élément de $k\{x^{-1}\}$ , admettant des approximations "régulièrement réparties", c'est-à-dire : Etant donné $\varepsilon$ arbitrairement petit, il existe un entier $N$ tel que

$$n > N \implies \begin{matrix} |u_n - \alpha v_n| < \varepsilon \\ |u_{n+1} - \omega u_n| < \varepsilon \end{matrix} \qquad \text{où} \quad \omega \in k\{x^{-1}\} \quad \text{et} \quad |\omega| > 1\ ,$$

alors

$$|u_{n+1}| = |\omega|\ |u_n| \quad .$$

On en déduit que $\omega = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ , et puisque

$$|\frac{u_{n+1}}{\omega^{n+1}} - \frac{u_n}{\omega^n}| < \frac{\varepsilon}{|\omega|^{n+1}} \quad ,$$

la suite $(\frac{u_n}{\omega^n})$ est une suite de Cauchy, donc admet une limite $\lambda \in k\{x^{-1}\}$ .

D'autre part, si $m > n > N$ , on a :

$$|\frac{u_n}{\omega^n} - \frac{u_n}{\omega^n}| < \frac{\varepsilon}{|\omega|^{n+1}} \quad ,$$

d'où, en faisant tendre $m$ vers l'infini :

$$|\lambda - \frac{u_n}{\omega^n}| < \frac{\varepsilon}{|\omega|^{n+1}} \qquad \text{et} \qquad |u_n - \lambda\omega^n| < \frac{\varepsilon}{|\omega|} \quad ,$$

donc :

$$\lambda\omega^n = u_n + \varepsilon(\lambda\omega^n) \quad ,$$

où $\varepsilon(\lambda\omega^n) \to 0$ quand $n \to \infty$ , il en résulte que $\omega \in \mathbb{S}$ et $\lambda \in k(x)(\omega)$ .

En appliquant le même raisonnement à la suite $(v_n)$ , on obtient :

$$\mu\omega^n = v_n + \varepsilon(\mu\omega^n) \quad ,$$

où $\mu \in k(x)(\omega)$ , et $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} \in k(x)(\omega)$ est donc algébrique et séparable sur $k(x)$ .

## 5. Généralisation aux adèles de $k(x)$ .

On peut généraliser certaines de ces propriétés à des ensembles d'adèles algébriques sur le corps $k(x)$ . Ces généralisations se font d'une manière analogue à celles qui ont été faîtes dans le cas des adèles de $\mathbb{Q}$ par F. BERTRANDIAS [3].

A tout polynôme premier $p \in k[x]$ , on peut associer une valeur-absolue du corps $k(x)$ , les valeurs absolues obtenues satisfont à la formule du produit, et nous noterons par $k_p\{x\}$ le complété de $k(x)$ pour la valuation associée au polynôme $p$ (avec $k_\infty\{x\} = k\{x^{-1}\}$ ).

Nous noterons $V(k)$ l'anneau des adèles de $k(x)$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments :

$$\xi \in \prod k_p\{x\} \times k\{x^{-1}\} \quad ,$$

le produit étant étendu à tous les polynômes premiers de $k[x]$, tels que $|\xi|_p \leqslant 1$, sauf pour, au plus, un nombre fini de $p$ ; $e_p$ désignera l'élément unité de $V(k)$.

Il existe une décomposition d'Artin [1] dans $V(k)$ :

Un élément $\xi \in V(k)$ peut se mettre d'une manière unique sous la forme :

$$\xi = E(\xi)\, e_p + \varepsilon(\xi) \quad ,$$

où $E(\xi) \in k(x)$ et $|\varepsilon(\xi)|_\infty < 1$, $|\varepsilon(\xi)|_p \leqslant 1$ pour tout $p$ premier de $k[x]$.

Si $I$ désigne un sous-ensemble fini de polynômes premiers de $k[x]$, nous noterons par $V_I(k)$ le sous-ensemble de $V(k)$ ainsi défini :

$$\xi \in V_I(k) \quad , \qquad \text{si} \quad \xi_p = 0 \quad \text{pour} \quad p \notin I \quad ;$$

dans la décomposition précédente, on a alors :

$$E(\xi) \in k[x]_I \quad ,$$

où

$$k[x]_I = \{\xi \in k(x) \; ; \quad |\xi|_p \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad p \notin I \cup \{\infty\}\} \quad ,$$

c'est-à-dire l'anneau des fractions rationnelles n'admettant au dénominateur que des facteurs premiers appartenant à $I$.

Nous allons maintenant introduire les ensembles $\mathcal{S}_I$ et $\mathcal{S}_I^{p'}$ ainsi définis :

Un élément $\alpha \in V_I(k)$ appartient à $\mathcal{S}_I$ si $|\alpha|_p > 1$ pour tout $p \in I$, et si $\alpha$ est racine d'un polynôme $P(X) \in k[x][X]$ dont les zéros sont tels que :

$$|\alpha_j|_p \leqslant 1 \quad , \qquad j = 2 \, , \, \dots \, , \, s \quad \text{si} \quad p \in I \quad ,$$

$$|\alpha_j|_p \leqslant 1 \quad , \qquad j = 1 \, , \, 2 \, , \, \dots \, , \, s \quad \text{si} \quad p \notin I \quad .$$

$\alpha$ appartient à $\mathcal{S}_I^{p'}$ si, en plus des propriétés précédentes, on a :

$$|\alpha_j|_{p'} < 1 \qquad \text{pour} \qquad \begin{matrix} j = 1 \, , \, 2 \, , \, \dots \, , \, s \quad \text{si} \quad p' \notin I \\ j = 2 \, , \, \dots \, , \, s \quad \text{si} \quad p' \in I \end{matrix} \quad ,$$

$p'$ étant un polynôme premier de $k[x]$.

On peut alors démontrer les théorèmes suivants.

THÉORÈME 5.1. - Pour qu'un élément $\alpha$ de $V_I(k)$ appartienne à $\mathfrak{S}_I$, il faut et il suffit qu'il existe un élément inversible $\lambda$ de $V_I(k)$, tel que, à partir d'un certain rang,

$$|\varepsilon(\lambda\alpha^n)|_p \leqslant \frac{1}{|\alpha|_p^2} \qquad \text{pour tout } p \in I \ .$$

THÉORÈME 5.2. - Pour qu'un élément $\theta$ de $V_I(k)$ appartienne à $\mathfrak{S}_I^{p'}$, il faut et il suffit qu'il existe un élément inversible $\lambda$ de $V_I(k)$ tel que :

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_{p'}(\lambda\theta^n) = 0 \ .$$

BIBLIOGRAPHIE


[1] ARTIN (Emil). - Algebraic numbers and algebraic functions. - New York and Princeton University, 1950/51 (multigraphié).

[2] BATEMAN (P.) and DUQUETTE (A.). - The analogue of the Pisot-Vijayaraghavan numbers in fields of formal power series, Illinois J. of Math., t. 6, 1962, p. 594-606.

[3] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, Mémoire 4, 1965, VI + 98 p. (Thèse Sc. math. Paris, 1965).

[4] BERTRANDIAS (J.-P.). - Applications des nombres $\theta$, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, 3e année, 1961/62, n° 12, 21 p.

[5] HUGOT (Marthe GRANDET-) et PISOT (C.). - Sur certains entiers algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 2831-2833.

[6] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Série 2, t. 7, 1938, p. 205-248 (Thèse Sc. math. Paris, 1938).

[7] PISOT (Charles). - Sur quelques approximations rationnelles caractéristiques des nombres algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 206, 1938, p. 1862-1864.

[8] ZARISKI (O.) and SAMUEL (P.). - Commutative algebra, Vol. 1. - Princeton, Toronto, D. Van Nostrand Comp., 1958 (The University Series in higher Mathematics).