Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

CLAUDE DESCHAMPS

Équations différentielles p-adiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 7, n^{o} 2 (1965-1966), exp. n^{o} 19, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1965-1966__7_2_A7_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
7e année, 1965/66, n° 19

9 mai 1966

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p-ADIQUES

par Claude DESCHAMPS

Préliminaires. - Notre but est d'étendre, aux fonctions p-adiques d'une variable p-adique, les propriétés différentielles des fonctions réelles (resp. complexes) d'une variable réelle (resp. complexe).

Comme corps, nous utiliserons :

$\mathbb{Q}_p$: complété p-adique du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, pour la valeur absolue p-adique normalisée :

$$|p| = \frac{1}{p} .$$

K : une extension complète quelconque de $\mathbb{Q}_p$ munie de la valeur absolue prolongeant celle de $\mathbb{Q}_p$. En particulier, K pourra être le complété de la clôture algébrique de Ω_p : $\hat{\Omega}_p$.

Nous noterons $v(x) = -\log_p|x|$, la valuation d'un élément x de K $(v(0) = +\infty)$.

Etant donnée une fonction p-adique d'une variable p-adique définie sur un ouvert U , la notion de dérivée se définit comme pour une fonction de variable réelle, et les propriétés formelles des dérivées : dérivée d'une somme, d'un produit, d'une fonction de fonction, sont valables sans modification. Nous chercherons à résoudre une équation différentielle $y' = F(x , y)$, et nous distinguerons deux cas suivant la nature du corps p-adique.

1. Les fonctions p-adiques sont définies sur un sous-ensemble de $\mathbb{Q}_p$, et sont à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$.

Nous nous proposons de démontrer le théorème d'existence [1].

Si $F(x , y)$ est une fonction de deux variables p-adiques continue pour $|x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$, il existe une fonction p-adique f , continue, dérivable pour $|x - x_0| \leqslant a$, telle que $y_0 = f(x_0)$, et telle que l'on ait identiquement pour ces valeurs de x ,

$$f'(x) = F[x , f(x)] .$$

Par translation sur les variables x et y , nous pouvons supposer que

$$x_0 = y_0 = 0 .$$

Par homothétie sur la variable x, nous pouvons supposer que $a = 1$.

$B_{Q_p}(0, b)$ désignant la boule de Q_p de centre 0, de rayon b, F est une application continue du produit $Z_p \times B_{Q_p}(0, b)$ dans Q_p.

Tout entier p-adique est caractérisé par son développement de Hensel :

$$x = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n + \dots$$

avec a_i entier, $0 \leqslant a_i \leqslant p - 1$, et nous poserons :

$$x_n = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n .$$

En particulier :

$$|x - x_n| \leqslant \frac{1}{p^{n+1}} .$$

<u>Construction de la fonction</u> f. - Nous allons définir une suite d'applications continues f_n, de Z_p dans $B_{Q_p}(0, b)$.

Les boules $|x| \leqslant 1$ et $|y| \leqslant b$ étant compactes, F étant continue sur le produit de ces boules, il existe M tel que, pour tout $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant b$, on ait :

$$|F(x, y)| \leqslant M .$$

Soit k un entier, tel que $\frac{M}{p^{k+1}} \leqslant b$. Nous poserons :

$$f_0(x) = f_1(x) = \dots = f_{k-1}(x) = 0 ,$$

$$f_k(x) = (x - x_k) F[x_k, 0] ,$$

pour $n > k$,

$$f_n(x) = f_{n-1}(x_n) + (x - x_n) F[x_n, f_{n-1}(x_n)] .$$

Montrons que f_n applique Z_p dans $B_{Q_p}(0, b)$ (ce qui justifiera cette définition par récurrence),

$$x \in Z_p \qquad |f_k(x)| \leqslant \frac{M}{p^{k+1}} \leqslant b .$$

Par récurrence, il est évident que :

$$|f_{n-1}(x)| \leqslant b \implies |f_n(x)| \leqslant b \qquad \text{pour tout } x \in Z_p .$$

Soit alors $n > k$, quelconque :

$$f_n(x_{n+1}) = f_{n-1}(x_n) + (x_{n+1} - x_n)\, F[x_n , f_{n-1}(x_n)] \quad ,$$

d'où

(1) $$f_{n+1}(x) - f_n(x) = (x - x_{n+1})[F(x_{n+1} , f_n(x_{n+1})) - F(x_n , f_{n-1}(x_n))] \quad .$$

En particulier :

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{M}{p^{n+2}} \quad ,$$

et quel que soit $m > n$:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{M}{p^{n+2}} \quad .$$

La suite f_n est une suite de Cauchy qui converge normalement.

Soit f sa limite : f est une application de Z_p dans $B_{Q_p}(0 , b)$, et de plus, pour tout $n > k$, et pour tout $x \in Z_p$:

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{M}{p^{n+2}} \quad .$$

Montrons maintenant que f satisfait aux conditions imposées :

$f(0) = 0$ est évident.

f est continue comme limite uniforme d'une suite d'applications continues.

Il reste à démontrer que f est dérivable en x et que :

$$f'(x) = F[x , f(x)] \quad .$$

Pour cela, nous allons démontrer que :

$$\forall\, \varepsilon > 0 , \quad \exists\, \eta > 0 \text{ tel que } |x' - x| \leqslant \eta \implies \left|\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - F[x , f(x)]\right| \leqslant \varepsilon \, .$$

Etant donné ε , il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\left.\begin{cases} |\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant \delta \\ |\beta_1 - \beta_2| \leqslant \delta \end{cases}\right\} \implies |F(\alpha_1 , \beta_1) - F(\alpha_2 , \beta_2)| \leqslant \varepsilon$$

(uniforme continuité de F sur le compact $Z_p \times B_{Q_p}(0 , b)$). Il existe un entier N $(N \geqslant k)$ tel que :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p^{N+1}} \leqslant \delta \quad , \\ \dfrac{M}{p^{N+1}} \leqslant \delta \quad . \end{cases}$$

Soit $n \geqslant N$:

$$\left\{\begin{array}{l} |x - x_n| \leqslant \dfrac{1}{p^{n+1}} \leqslant \delta \\ \\ |f(x) - f_{n-1}(x_n)| \leqslant \dfrac{M}{p^{n+1}} \leqslant \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |F[x\ ,\ f(x)] - F[x_n\ ,\ f_{n-1}(x_n)]| \leqslant \varepsilon \ .$$

Prenons $\eta = \dfrac{1}{p^{N+1}}$. Soit x' tel que $|x' - x| \leqslant \eta$.

$$|x' - x| = \frac{1}{p^{n_0+1}}$$

(la valuation est discrète) avec $n_0 \geqslant N$. En particulier, $x'_{n_0} = x_{n_0}$:

$$f_{n_0}(x') = f_{n_0-1}(x_{n_0}) + (x' - x_{n_0})\ F[x_{n_0}\ ,\ f_{n_0-1}(x_{n_0})]\ ,$$

$$f_{n_0}(x') - f_{n_0}(x) = (x' - x)\ F[x_{n_0}\ ,\ f_{n_0-1}(x_{n_0})]\ .$$

Comme $n_0 \geqslant N$:

$$\left|\frac{f_{n_0}(x') - f_{n_0}(x)}{x' - x} - F[x\ ,\ f(x)]\right| \leqslant \varepsilon \ .$$

Pour un entier n quelconque, supérieur à n_0 , et pour un élément z , quelconque, de Z_p , d'après la relation (1) :

$$\left\{\begin{array}{l} |z_{n+1} - z_n| \leqslant \dfrac{1}{p^{n+1}} \leqslant \delta \\ \\ |f_n(z_{n+1}) - f_{n-1}(z_n)| \leqslant \dfrac{M}{p^{n+1}} \leqslant \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f_{n+1}(z) - f_n(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{p^{n+2}} \leqslant \varepsilon |x' - x| \ .$$

En particulier :

$$\left|\frac{f_{n+1}(x') - f_{n+1}(x)}{x' - x} - \frac{f_n(x') - f_n(x)}{x' - x}\right| \leqslant \varepsilon \ .$$

Par récurrence, on en déduit :

$$\forall\ m \geqslant n_0 \qquad \left|\frac{f_m(x') - f_m(x)}{x' - x} - F[x\ ,\ f(x)]\right| \leqslant \varepsilon \ ,$$

ce qui démontre le résultat par passage à la limite.

Remarque. - Le théorème des accroissements finis n'est plus vrai dans Q_p . En particulier, il n'y a pas unicité de la solution, et on peut envisager des fonctions continues, dérivables, à dérivée identiquement nulle, non constantes.

Soit par exemple l'application f de Z_p dans Z_p :

$$x = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n + \dots ,$$

$$f(x) = a_0 + a_1 p^2 + \dots + a_n p^{2n} + \dots .$$

Si $|x' - x| = \frac{1}{p^n}$, $|f(x') - f(x)| = \frac{1}{p^{2n}}$. Elle est donc continue, non constante au voisinage de x. Et pourtant elle est dérivable en x, et sa dérivée est nulle:

$$\left|\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}\right| = \frac{1}{p^n} \to 0 \qquad \text{lorsque} \qquad x' \to x .$$

2. Les fonctions p-adiques sont définies sur un sous-ensemble de K, et sont à valeurs dans K.

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME. - Si $F(x , y)$ est analytique au point (x_0 , y_0), l'équation différentielle $y' = F(x , y)$ admet une solution unique f :

- analytique au point x_0,
- telle que $y_0 = f(x_0)$.

Par translation sur les variables, nous pouvons supposer que $x_0 = y_0 = 0$.

Il existe donc r et R tels que :

$$F(x , y) = a_{00} + a_{10} x + a_{01} y + \dots + a_{nm} x^n y^m + \dots \qquad \text{pour} \begin{cases} |x| < r \\ |y| < R \end{cases} .$$

S'il existe une solution analytique de l'équation différentielle $y' = F(x , y)$, telle que $y_0 = f(x_0)$, cette solution est la somme d'une série :

$$y = \sum_{n \geq 1} \alpha_n x^n ,$$

et les coefficients α_n sont déterminés par les relations de récurrence (obtenues en substituant y dans $y' = F(x , y)$) :

$$\alpha_1 = a_{00} ,$$

$$2\alpha_2 = a_{10} + a_{01} \alpha_1 ,$$

$$\dots$$

$$(n + 1)\alpha_{n+1} = \sum_{0 \leq i+k \leq n} a_{ik} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k} ,$$

avec $i_1, i_2, \ldots, i_k$ des entiers tels que $i_1 + \ldots + i_k = n - i$. Ces relations déterminent une série formelle unique, à coefficients dans K, solution de $y' = F(x, y)$.

Montrons que son rayon de convergence n'est pas nul.

PROPRIÉTÉ. - Si $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont des entiers tels que $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \leqslant n$, alors :

$$|n!| \leqslant |a_1!\, a_2! \ldots a_k!| .$$

Il suffit de le démontrer pour $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$.

Remarquons que :

$$\binom{n+k}{n} = \frac{(n+k)\ldots(k+1)}{n!}$$

est un entier ; donc, quel que soit l'entier k positif ou nul :

$$|(k+1)\ldots(k+n)| \leqslant |n!| ,$$

$$n! = \underbrace{1.2.3\ldots a_1}_{a_1!}\ \underbrace{(a_1+1)\ldots(a_1+a_2)}_{\leqslant |a_2!|}\ \ldots\ \underbrace{(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+1)\ldots n}_{\leqslant |a_k!|} ,$$

$$|n!| \leqslant |a_1!\, a_2! \ldots a_k!| .$$

Majorons $|\alpha_n|$; soient x et y tels que

$$\begin{cases} |x| = \dfrac{1}{p^\alpha} < r , \\ |y| = \dfrac{1}{p^\beta} < R . \end{cases}$$

Nous pouvons supposer α et β positifs ou nuls. La série double converge, et il existe $\underset{\sim}{C}$ (que l'on peut supposer supérieur ou égal à 1) tel que :

$$|a_{nm}| \leqslant \underset{\sim}{C}\, p^{n\alpha}\, p^{m\beta} .$$

Soit $\gamma = \sup(\alpha, \beta)$,

$$|a_{nm}| \leqslant \underset{\sim}{C}\, p^{(n+m)\gamma} .$$

$|\alpha_1| \leqslant C$:

$$|\alpha_2| \leqslant \frac{\sup[C\, p^\gamma, C^2\, p^\gamma]}{|2|} \leqslant \frac{C^2\, p^\gamma}{|2|} .$$

Supposons que, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $|\alpha_i| \leqslant \frac{C^i p^{(i-1)\gamma}}{|i!|}$,

$$|(n+1)\alpha_{n+1}| \leqslant \sup[C\, p^{(i+k)\gamma} \frac{C^{i_1} p^{(i_1-1)\gamma}}{|i_1!|} \cdots \frac{C^{i_k} p^{(i_k-1)\gamma}}{|i_k!|}] \leqslant \frac{C^{n+1} p^{n\gamma}}{|n!|} ,$$

en utilisant le fait que $i_1 + i_2 + \dots + i_k = n - i$.

En particulier, pour tout n :

$$|\alpha_n| \leqslant \frac{C^n p^{(n-1)\gamma}}{|n!|} .$$

Si R_0 désigne le rayon de convergence de la série exponentielle, pour

$$|x| < R_0 \frac{1}{C\, p^{\gamma}} ,$$

la série y converge.

Remarque. - Si l'on prend $F(x , y) = y - 1$, l'équation différentielle $y' = y - 1$ admet à l'origine une solution analytique unique (nulle à l'origine). Nous pouvons prendre $\alpha = \beta = \gamma = 0$, alors $C = 1$, et nous retrouvons exactement le rayon R_0 de l'exponentielle.

Maintenant, nous allons placer un pôle au point x_0, et nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. - Si $F(x , y)$ est analytique au point (x_0 , y_0) et telle que $F(x_0 , y_0) = 0$, $F'_y(x_0 , y_0) = \alpha$, l'équation différentielle :

$$(x - x_0)y' = F(x , y)$$

- admet une solution unique f , analytique au point x_0 , telle que $y_0 = f(x_0)$ si $\alpha \notin Z_p$.
- admet soit une infinité de solutions, soit aucune (analytique au point x_0 , telle que $y_0 = f(x_0)$) si α est entier naturel.

Si $\alpha \in Z_p$ et n'est pas entier naturel, on ne peut rien dire.

Par translation sur les variables x et y , nous pouvons supposer que

$$x_0 = y_0 = 0 .$$

Nous écrivons l'équation différentielle sous la forme :

$$xy' - \alpha y = a_{10}\, x + a_{20}\, x^2 + a_{11}\, xy + \dots + a_{nm}\, x^n y^m + \dots \qquad \text{pour} \begin{cases} |x| < r \\ |y| < R \end{cases} .$$

S'il existe une fonction analytique à l'origine, telle que $f(0) = 0$, cette fonction est la somme d'une série entière dont les coefficients sont déterminés par le système :

$$y = \sum_{n \geq 1} \alpha_n x^n ,$$

$$\begin{cases} \alpha_1[1 - \alpha] = a_{10} \\ \alpha_2[2 - \alpha] = a_{20} + a_{11}\alpha_1 + a_{02}\alpha_1^2 \\ \dots \\ \alpha_n[n - \alpha] = \sum_{i_1 + \dots + i_k = n-i} a_{ik}\, \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k} , \end{cases}$$

avec $i_1, \dots, i_k$ entiers inférieurs ou égaux à $n - 1$.

1° Si $\alpha \notin Z_p$, quel que soit n, $n - \alpha \neq 0$, ce système détermine les coefficients α_n de manière unique.

Reste à démontrer que la série obtenue $\sum_{n \geq 1} \alpha_n x^n$ a un rayon de convergence non nul.

Soit $d = \inf_n |n - \alpha|$,

$$\alpha \notin Z_p \implies d > 0 .$$

Soit alors :

$$0 < r_1 < r ,$$

$$0 < R_1 < R .$$

La série double converge, et il existe donc M tel que

$$|a_{nm}| \leq \frac{M}{r_1^n R_1^m} \quad \text{quels que soient } m \text{ et } n .$$

Considérons l'équation en y :

$$y.d = \frac{M}{(1 - \frac{x}{r_1})(1 - \frac{y}{R_1})} - M - \frac{M}{R_1} y .$$

Cette équation du second degré admet la solution :

$$y = dR_1^2 \frac{[1 - \sqrt{1 - 4 \frac{Mx}{r_1 - x} [\frac{dR_1 + M}{d^2 R_1^2}]}]}{2[dR_1 + M]}$$

qui s'annule pour $x = 0$ et qui est analytique, son rayon de convergence étant supérieur ou égal à

$$\frac{r_1}{1 + 4M\left[\dfrac{dR_1 + M}{d^2\ R_1^2}\right]} \text{ .}$$

Si nous cherchons directement les coefficients β_n de cette solution, nous obtenons le système :

$$\left\{\begin{array}{l} d.\beta_1 = \dfrac{M}{r_1} \\ d.\beta_2 = \dfrac{M}{r_1^2} + \dfrac{M}{r_1\ R_1}\,\beta_1 + \dfrac{M}{R_1^2}\,\beta_1^2 \\ \dots \\ d.\beta_n = \displaystyle\sum_{i_1,\dots,i_k} \frac{M}{r_1^i\ R_1^k}\,\beta_{i_1} \cdots \beta_{i_k} \text{ , } \quad i_1 \text{ , } \dots \text{ , } i_k \text{ entiers } \leqslant n - 1 \text{ .} \end{array}\right.$$

Par récurrence, il est évident que $|\alpha_n| \leqslant \beta_n$, ce qui démontre que la série $\sum \alpha_n\, x^n$ a un rayon de convergence non nul.

2° $\alpha \in Z_p$.

(a) α est entier naturel : $\alpha = k$.

Le premier membre de la k-ième équation est nul.
Si le second ne l'est pas, il n'y a pas de solution.
Si le second est nul, α_k est arbitraire.

Dans ce dernier cas, une démonstration analogue à celle du premier théorème du § 2 (majoration directe des α_n) permet encore de démontrer la convergence de la série $\sum \alpha_n\, x^n$.

(b) α n'est pas entier naturel : on ne peut rien dire, la convergence de la série $\sum \alpha_n\, x^n$ dépend de α et de la nature de la série du deuxième membre de l'équation différentielle.

<u>1er exemple</u>.

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = 1 + p + p^2 + \dots + p^n + \dots \\ F(x\ ,\ y) = \dfrac{x}{1 - x} + \alpha y \quad \text{au point} \quad x_0 = y_0 = 0 \text{ ,} \end{array}\right.$$

$$xy' - \alpha y = x + x^2 + \dots + x^n + \dots \qquad \text{pour} \quad |x| < 1 \text{ .}$$

Les coefficients α_n sont déterminés par :

$$\begin{cases} \alpha_1[1 - \alpha] = 1 \\ \cdots \\ \alpha_n[n - \alpha] = 1 \\ \cdots \end{cases} .$$

$|n - \alpha| \geqslant \frac{1}{p^n}$, donc $|\alpha_n| \leqslant p^n$.

Le rayon de la série $\sum \alpha_n x^n$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{p}$.

2e exemple. - Soit un entier i_1 quelconque, et soit la suite i_n définie par récurrence :

$$i_n = [1 + p^{i_1} + \dots + p^{i_{n-1}}]^2 \qquad i_n \in N .$$

Posons :

$$\alpha = 1 + p^{i_1} + \dots + p^{i_n} + \dots \qquad \alpha \in Z_p ,$$

$$F(x , y) = \frac{x}{1 - x} + \alpha y \qquad \text{au point} \quad x_0 = y_0 = 0 ,$$

$$xy' - \alpha y = x + x^2 + \dots + x^n + \dots \qquad \text{pour} \quad |x| < 1 .$$

Les coefficients α_n sont déterminés par les relations :

$$\begin{cases} \alpha_1[1 - \alpha] = 1 \\ \cdots \\ \alpha_n[n - \alpha] = 1 \\ \cdots \end{cases} .$$

Pour les entiers $n = 1 + p^{i_1} + \dots + p^{i_h}$, on a $|n - \alpha| = p^{-i_{h+1}}$ et

$$|\alpha_n| = p^{i_{h+1}} \implies |\alpha_n|^{1/n} = p^{(i_{h+1})/(1+p^{i_1}+\dots+p^{i_h})} = p^{1+p^{i_1}+\dots+p^{i_h}} = p .$$

La série $\sum \alpha_n x^n$ a un rayon de convergence nul.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DIEUDONNÉ (Jean). - Sur les fonctions continues p-adiques, Bull. Sc. math., 2e série, t. 68, 1944, 1re partie, p. 79-95.