Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

LEE A. RUBEL

Séries trigonométriques spéciales et l'hypothèse de Riemann

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 7, nº 1 (1965-1966), exp. nº 6, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1965-1966__7_1_A5_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
7e année, 1965/66, n° 6

10 janvier 1966

SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES SPÉCIALES ET L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN

par Lee A. RUBEL

Nous donnons ici un exposé de quelques recherches de E. G. STRAUS et de l'auteur. Dans ce résumé, nous ne donnons pas de démonstrations. Une "série trigonométrique spéciale" est une série de la forme

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n x}{\lambda_n} \ , \qquad 0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \to \infty \ ,$$

que nous écrivons aussi

$$(2) \qquad \sum \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \ .$$

Nous appelons les nombres λ_n les fréquences de la série. Soit ζ la fonction zéta de Riemann,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \ ,$$

et soient $\rho = \beta + i\gamma$ les zéros non-triviaux de ζ .

RADEMACHER (*) a montré que si l'hypothèse $\beta = \frac{1}{2}$ de Riemann est vraie, alors la série

$$\sum \frac{\sin \gamma x}{\gamma}$$

a certaines discontinuités de première espèce, des sauts. Elle converge uniformément sur les intervalles fermés dans $x > 0$ qui ne contiennent pas les logarithmes des puissances des nombres premiers, vers une fonction qui a un saut de $-(\frac{1}{2})\, p^{-k/2}$ à chaque valeur $k \log p$, $k = 1 , 2 , \ldots$; p premier. Il a suggéré que ce comportement bizarre d'une série trigonométrique spéciale peut constituer une indication contre l'hypothèse de Riemann. En même temps, il a essayé, sans succès, de faire la synthèse d'une série trigonométrique spéciale ayant ces sauts, dans l'espoir que la répartition des fréquences synthétiques puisse éclairer la répartition des fréquences vraies γ . Nous commençons ici par compléter

---

(*) RADEMACHER (Hans). - Remarks concerning the Riemann - von Mangoldt formula, Report of the Institute in the theory of numbers, p. 31-37. - Boulder, University of Colorado, 1959.

son programme. De plus, nous construisons dans le théorème 1 une série trigonométrique spéciale avec des sauts donnés quelconques. Il existe beaucoup de liberté de choix pour la densité des fréquences dans une telle série. Nos méthodes sont élémentaires.

Puis nous faisons une extension de la démonstration originale de RADEMACHER. Nous démontrons que la série (2) a les sauts décrits, si l'hypothèse

(3) $$\sum_{\substack{\beta>1/2\\ \gamma>0}} \frac{(\beta-\frac{1}{2})^2}{\gamma} < \infty$$

est vraie. Mais (3) est beaucoup plus faible que l'hypothèse de Riemann, et c'est "presque connu". Nous terminons cet article en démontrant que

(4) $$\sum_{\substack{\beta>1/2\\ \gamma>0}} \frac{(\beta-\frac{1}{2})^{2+\varepsilon}}{\gamma} < \infty$$

pour chaque $\varepsilon > 0$.

En résumé : il apparaît que les considérations étudiées ici éclairent peu l'hypothèse de Riemann.

THÉORÈME 1. - Etant données une suite $\{\sigma_n\}$ de nombres réels arbitraires, et une suite $\{s_n\}$ de nombres réels positifs sans point d'accumulation fini, $1 \leqslant n \leqslant N$, $N \leqslant \infty$, arbitraires, il existe une série trigonométrique spéciale qui converge uniformément sur chaque sous-intervalle fermé de $x > 0$ qui ne contienne aucun s_n , et telle que la somme $H(x)$ de cette série a un saut de σ_n en s_n pour chaque n , et n'a pas d'autre saut.

En outre, il est possible de rendre les fréquences λ distinctes. De plus, étant donné n'importe quelle fonction $u(t)$, positive et continue sur $0 \leqslant t < \infty$, telle que $u(t) \to \infty$ quand $t \to \infty$, il est possible d'obtenir

$$\lambda(t) \leqslant t\, u(t) , \qquad \text{où} \quad \lambda(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1 .$$

THÉORÈME 2. - Si l'hypothèse (3) a lieu, alors la série (2) converge uniformément dans chaque intervalle fermé qui ne contient aucun nombre de la forme $k \log p$, $k = 1 , 2 , 3 , \dots ;$ p premier, vers une fonction qui a le saut

$$-\left(\tfrac{1}{2}\right) p^{-k/2} \log p$$

en chaque $k \log p$.

Notre démonstration dépend de la formule de Riemann - von Mangoldt qui dit que pour $t > 1$, $t \neq p^k$,

$$\sum_{n \leqslant t} \Lambda(n) = t - \sum_{\rho} \frac{t^\rho}{\rho} - \frac{1}{2} \log(1 - \frac{1}{t^2}) - \log 2\pi \quad ,$$

où

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad ,$$

et où les ρ sont ordonnés suivant l'ordre non-décroissant de $|\gamma|$.

THÉORÈME 3. - *Si* $q \geqslant 0$ *et* $p + q > 2$, *alors*

$$\sum_{\substack{\beta > 1/2 \\ \gamma > 0}} \frac{(\beta - \frac{1}{2})^q}{\gamma (\log \gamma)^p} < \infty \quad . \tag{5}$$

La démonstration dépend d'un résultat profond de A. SELBERG, à savoir que l'on a

$$N(\sigma , T) = \mathcal{O}(T^r \log T)$$

uniformément pour $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$, où $r = 1 - \frac{1}{4}(\sigma - \frac{1}{2})$, et où $N(\sigma , T)$ est le nombre des zéros $\rho = \beta + i\gamma$ de ζ qui satisfont à $\sigma \leqslant \beta$ et à $0 \leqslant \gamma \leqslant T$. Nous croyons que pour démontrer (3) il serait nécessaire de trouver des estimations bien meilleures que (5).