Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Jean Chauvineau

C-équirépartition modulo 1 en p-adique

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 7, n° 1 (1965-1966), exp. n° 2, p. 1-21

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1965-1966__7_1_A1_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
7e année, 1965/66, n° 2

22 novembre 1965

C-ÉQUIRÉPARTITION MODULO 1 EN p-ADIQUE

par Jean CHAUVINEAU

1. Notations.

$\underset{\sim}{N}$, $\underset{\sim}{Z}$, $\underset{\sim}{Q}$, $\underset{\sim}{R}$, $\underset{\sim}{C}$ sont les ensembles numériques couramment désignés par ces lettres ($0 \notin \underset{\sim}{N}$, $\underset{\sim}{Z}^+ = \underset{\sim}{N} \cup \{0\}$) ; $\underset{\sim}{T}$ désigne le cercle unité. p est un nombre premier. $\underset{\sim}{r}_p^{(h)}$, où $h \in \underset{\sim}{N}$, désigne l'ensemble des rationnels de $]0 , 1[$ qui, après réduction, ont pour dénominateur p^h ; on pose

$$\underset{\sim}{r}_p^{(0)} = \{0\} , \quad \underset{\sim}{r}_p^{k} = \bigcup_{0 \leqslant h \leqslant k} \underset{\sim}{r}_p^{(h)} \quad \text{pour tout } k \in \underset{\sim}{Z}^+ , \quad \underset{\sim}{r}_p = \bigcup_{h \geqslant 0} \underset{\sim}{r}_p^{(h)} = \lim_{k \to \infty} \underset{\sim}{r}_p^{k} .$$

$\underset{\sim}{Q}_p$, $\underset{\sim}{Z}_p$, $\underset{\sim}{U}_p$ désignent respectivement le corps des nombres p-adiques, l'anneau des entiers de $\underset{\sim}{Q}_p$, le groupe des unités de $\underset{\sim}{Q}_p$, et μ désigne la mesure de Haar sur $\underset{\sim}{Q}_p$ normalisée sur $\underset{\sim}{Z}_p$. Si $0 \in E$, on pose

$$E^* = \complement_E\{0\} = E - \{0\} \qquad (E \subset \underset{\sim}{C} \text{ ou } E \subset \underset{\sim}{Q}_p) .$$

Si $x \in \underset{\sim}{Q}_p^*$, sa valuation p-adique est notée $v(x)$, où l'indice p est sous-entendu. ψ_E est la fonction caractéristique de E ($E \subset \underset{\sim}{C}$ ou $E \subset \underset{\sim}{Q}_p$). Enfin $\mathrm{Isom}(E , F)$ désigne la classe des applications isométriques de $E \subset \underset{\sim}{Q}_p$ dans $F \subset \underset{\sim}{Q}_p$.

$\underset{\sim}{r}_p$ est un système de représentants du groupe additif $\underset{\sim}{Q}_p/\underset{\sim}{Z}_p$ des p-adiques modulo 1 . Tout $x \in \underset{\sim}{Q}_p$ admet une décomposition unique

$$x = [x]_p + \langle x \rangle_p \qquad \text{où } [x]_p \in \underset{\sim}{Z}_p , \ \langle x \rangle_p \in \underset{\sim}{r}_p ;$$

$[x]_p$, $\langle x \rangle_p$ sont dits respectivement <u>partie entière</u>, <u>partie principale</u> de x . On a, pour x_1 , x_2 , y dans $\underset{\sim}{Q}_p$:

$$\langle (x_1 + x_2)y \rangle_p \equiv \langle x_1 \, y \rangle_p + \langle x_2 \, y \rangle_p \pmod 1 ,$$

et $x \longrightarrow \langle xy \rangle_p$, où $y \in \underset{\sim}{Q}_p$, est un homomorphisme continu du groupe additif $\underset{\sim}{Q}_p$ dans le groupe additif $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$ des réels modulo 1 ; de plus

$$(x_1 - x_2)y \in \underset{\sim}{Z}_p \implies \langle x_1 \, y \rangle_p = \langle x_2 \, y \rangle_p \qquad \text{pour } x_1 , x_2 , y \in \underset{\sim}{Q}_p$$

et

$$\langle xy \rangle_p = \langle x \langle y \rangle_p \rangle_p \qquad \text{pour } x \in \underset{\sim}{Z}_p , \ y \in \underset{\sim}{Q}_p .$$

On pose, pour tout $x \in \underset{\sim}{R}$:

$$e(x) = \exp 2i\pi x \ ,$$

et, pour tout $x \in \underset{\sim}{Q}_p$:

$$e_p(x) = \exp 2i\pi \langle x \rangle_p \ ,$$

de sorte que $e_p(x) = e(x)$ pour tout $x \in \underset{\sim}{r}_p + \underset{\sim}{Z}$.

2. Définition.

Soit Δ une partie μ-mesurable de $\underset{\sim}{Q}_p$ telle que $\mu(\Delta) > 0$, et soit F une application μ-mesurable de Δ dans $\underset{\sim}{Q}_p$, de sorte que l'ensemble

$$\{x \in \Delta \mid F(x) \in \alpha + p^k \underset{\sim}{Z}_p\}$$

est μ-mesurable quels que soient $\alpha \in \underset{\sim}{Q}_p$, $k \in \underset{\sim}{Z}$. Pour tout $T \in \underset{\sim}{Z}$, on pose

$$\Delta_T = \Delta \cap p^{-T} \underset{\sim}{Z}_p \ ,$$

et, pour tout couple réel (a , b) tel que $0 \leqslant a < b \leqslant 1$:

$$(T , a , b)_F^{\Delta} = \mu(\{x \in \Delta_T \mid a \leqslant \langle F(x) \rangle_p < b\}) \ ,$$

de sorte que

$$(T , a , b)_F^{\Delta} = \sum_{\substack{r \in \underset{\sim}{r}_p \\ a \leqslant r < b}} \mu(\{x \in \Delta_T \mid F(x) \in r + \underset{\sim}{Z}_p\}) \ .$$

La fonction F est dite C-équirépartie (mod 1) [C-e. r. (mod 1)] si et seulement si, pour tout couple réel (a , b) tel que $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, on a

$$\lim_{T \to \infty} \frac{(T , a , b)_F^{\Delta}}{\mu(\Delta_T)} = b - a \qquad (1)$$

Cette définition n'est effective que si $\mu(\Delta) = \infty$. En effet, si $0 < \mu(\Delta) < \infty$, alors (1) exige que l'on ait, pour tout $x \in \underset{\sim}{r}_p$ et pour tout $\alpha \in]0 , 1 - r]$:

$$\mu(\{x \in \Delta \mid r \leqslant \langle F(x) \rangle_p < r + \alpha\}) = \alpha \mu(\Delta) \ ,$$

d'où, quand $0 < \alpha \to 0$:

$$m(r) = \mu(\{x \in \Delta \mid \langle F(x) \rangle_p = r\}) = 0 \ ,$$

où $m(r)$ désigne la masse de répartition (mod 1) de F au point r , en contradiction avec $\sum_{r \in \underset{\sim}{r}_p} m(r) = \mu(\Delta) > 0$.

Si $\Delta = \underset{\sim}{Q}_p$, d'où $\Delta_T = p^{-T} \underset{\sim}{Z}_p$, l'indice supérieur $\underset{\sim}{Q}_p$ sera sous-entendu dans

la notation $(T\ ,\ a\ ,\ b)_F$, et la définition (1) s'écrira

$$(1') \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{(T\ ,\ a\ ,\ b)_F}{p^T} = b - a \quad .$$

Rappelons que tout ouvert Δ de $\underset{\sim}{Q}_p$, c'est-à-dire toute réunion, finie ou infinie, de boules ouvertes de $\underset{\sim}{Q}_p$, est μ-mesurable, avec $\mu(\Delta) > 0$, et que toute fonction F continue sur un ouvert Δ de $\underset{\sim}{Q}_p$ est μ-mesurable sur Δ . La définition (1) intéresse donc notamment toute fonction F continue sur un ouvert Δ de $\underset{\sim}{Q}_p$.

3. Critères de C-équirépartition (mod 1) .

3.1. - Soit $\mathcal{C}(\underset{\sim}{T}\ ,\ \underset{\sim}{C})$ la classe des fonctions à valeurs complexes continues sur $\underset{\sim}{T}$.

THÉORÈME 1. - Pour que F , μ-mesurable sur une partie μ-mesurable Δ de $\underset{\sim}{Q}_p$ telle que $\mu(\Delta) > 0$, soit C-e. r. (mod 1) , il faut et il suffit que, pour toute $f \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{T}\ ,\ \underset{\sim}{C})$, on ait

$$(2) \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} f(\langle F(x)\rangle_p)\ dx = \int_0^1 f(t)\ dt \quad .$$

Dans les conditions précisées, l'intégrale de Haar qui figure au premier membre existe ; en effet, d'une part Δ_T est borné et μ-mesurable, d'autre part l'application $f \circ \langle F\rangle_p$ de Δ_T dans $f(\underset{\sim}{r}_p) \subset \underset{\sim}{C}$ est bornée sur Δ_T , puisque f est bornée sur $\underset{\sim}{T}$, et elle est aussi μ-mesurable sur Δ_T , car, si $\alpha \in f(\underset{\sim}{r}_p)$ et si l'on pose $f^{-1}(\alpha) = \{r \in \underset{\sim}{r}_p \mid f(r) = \alpha\}$, on a

$$\mu(\{x \in \Delta_T \mid f(\langle F(x)\rangle_p) = \alpha\}) = \mu(\{x \in \Delta_T \mid F(x) \in f^{-1}(\alpha) + \underset{\sim}{Z}_p\})$$
$$= \sum_{r \in f^{-1}(\alpha)} \mu(\{x \in \Delta_T \mid F(x) \in r + \underset{\sim}{Z}_p\}) \quad .$$

Le procédé de Lebesgue fournit alors l'intégrale de Haar.

Il suffit d'établir le théorème pour les $f \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{T}\ ,\ \underset{\sim}{R})$.

Nécessité. - Partageons $[0\ ,\ 1[$ en n intervalles égaux $[a_k\ ,\ b_k[$, $k = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ n$, et soit M_k [resp. m_k] la borne supérieure [resp. inférieure] de f sur $[a_k\ ,\ b_k[$. On a, pour tout $x \in \Delta_T$:

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} m_k\, \psi_{[a_k,b_k[}(\langle F(x)\rangle_p) \leqslant f(\langle F(x)\rangle_p) \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant n} M_k\, \psi_{[a_k,b_k[}(\langle F(x)\rangle_p) \quad .$$

Divisons par $\mu(\Delta_T)$ et intégrons sur Δ_T , en remarquant que

$$\int_{\Delta_T} \psi_{[a_k,b_k[}(\langle F(x)\rangle_p)\ dx = (T\ ,\ a_k\ ,\ b_k)_F^{\Delta}\ ;$$

il vient :

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} m_k \frac{(T\ ,\ a_k\ ,\ b_k)_F^{\Delta}}{\mu(\Delta_T)} \leqslant \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} f(\langle F(x)\rangle_p)\ dx \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant n} M_k \frac{(T\ ,\ a_k\ ,\ b_k)_F^{\Delta}}{\mu(\Delta_T)}\ .$$

Quand $T \to \infty$, le 1er et le 3e membre tendent respectivement vers $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} m_k(b_k - a_k)$ et $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} M_k(b_k - a_k)$, et ces sommes, quand $n \to \infty$, tendent l'une et l'autre vers $\int_0^1 f(t)\ dt$; il en résulte qu'on a (2).

Suffisance. - Soit $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$; il existe deux suites de fonctions ℓ_k , L_k de $\mathcal{C}(\underset{\sim}{T}\ ,\ \underset{\sim}{R})$ qui encadrent $\psi_{[a,b[}$ sur $\underset{\sim}{T}$ et dont les intégrales sur $\underset{\sim}{T}$ tendent l'une et l'autre vers $\int_0^1 \psi_{[a,b[}(t)\ dt = b - a$ quand $k \to \infty$. On a, pour tout $x \in \Delta_T$:

$$\ell_k(\langle F(x)\rangle_p) \leqslant \psi_{[a,b[}(\langle F(x)\rangle_p) \leqslant L_k(\langle F(x)\rangle_p)\ .$$

Divisons par $\mu(\Delta_T)$ et intégrons sur Δ_T ; il vient :

$$\frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} \ell_k(\langle F(x)\rangle_p)\ dx \leqslant \frac{(T\ ,\ a\ ,\ b)_F^{\Delta}}{\mu(\Delta_T)} \leqslant \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} L_k(\langle F(x)\rangle_p)\ dx\ .$$

Quand $T \to \infty$, le 1er et le 3e membre tendent respectivement vers $\int_0^1 \ell_k(t)\ dt$ et $\int_0^1 L_k(t)\ dt$, et ces intégrales, quand $k \to \infty$, tendent l'une et l'autre vers $b - a$; il en résulte qu'on a (1).

3.2. - On en déduit un critère de Weyl :

THÉORÈME 2. - Pour que F , μ-mesurable sur une partie μ-mesurable Δ de $\underset{\sim}{Q}_p$ telle que $\mu(\Delta) > 0$, soit C-e. r. (mod 1) , il faut et il suffit que, pour tout $h \in \underset{\sim}{N}$, on ait

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} e_p(hF(x))\ dx = 0\ . \tag{3}$$

Nécessité. - Prenant $f(t) = e(ht)$, où $h \in \underset{\sim}{Z}^*$, la condition (2) donne (3), puisque

$$e(h\langle F(x)\rangle_p) = e_p(hF(x)) \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 e(ht)\ dt = \left[\frac{e(ht)}{2i\pi h}\right]_0^1 = 0\ .$$

Suffisance. - $\mathcal{C}(\underset{\sim}{T}, \underset{\sim}{C})$ est un espace vectoriel sur le corps $\underset{\sim}{C}$, que nous munissons de la norme de la convergence uniforme $\|f\| = \sup_{t\in\underset{\sim}{T}} |f(t)|$. Soit $\mathcal{T}(\underset{\sim}{T})$ l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques, c'est-à-dire des combinaisons linéaires à coefficients complexes des fonctions $t \mapsto e(ht)$, où $h \in \underset{\sim}{Z}$. On sait que $\mathcal{T}(\underset{\sim}{T})$ est un sous-espace de $\mathcal{C}(\underset{\sim}{T}, \underset{\sim}{C})$ partout dense dans $\mathcal{C}(\underset{\sim}{T}, \underset{\sim}{C})$.

Soit $f \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{T}, \underset{\sim}{C})$; il existe une suite de fonctions $f_k \in \mathcal{T}(\underset{\sim}{T})$, soit

$$f_k(t) = \sum_{-H\leq h\leq H} \gamma_h\, e(ht) \quad ,$$

qui converge uniformément vers f sur $\underset{\sim}{T}$ quand $k \to \infty$. On a

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} f_k(\langle F(x)\rangle_p)\, dx = \sum_{-H\leq h\leq H} \gamma_h \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} e_p(hF(x))\, dx = \gamma_0 \quad ,$$

et d'autre part

$$\int_0^1 f_k(t)\, dt = \sum_{-H\leq h\leq H} \gamma_h \int_0^1 e(ht)\, dt = \gamma_0 \quad ,$$

de sorte que f_k vérifie la condition (2).

Soit $\varepsilon > 0$; il existe un entier K_ε tel que, pour $k > K_\varepsilon$, on ait

$$f_k(\langle F(x)\rangle_p) - \varepsilon < f(\langle F(x)\rangle_p) < f_k(\langle F(x)\rangle_p) + \varepsilon \qquad \text{pour tout } x \in \Delta_T \ .$$

Divisant par $\mu(\Delta_T)$, et intégrant sur Δ_T, il vient

$$\frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} f_k(\langle F(x)\rangle_p)\, dx - \varepsilon \leq \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} f(\langle F(x)\rangle_p)\, dx \leq \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} f_k(\langle F(x)\rangle_p)\, dx + \varepsilon .$$

Quand $T \to \infty$, le 1er membre et le 3e membre tendent respectivement vers

$$\int_0^1 f_k(t)\, dt - \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 f_k(t)\, dt + \varepsilon \quad ,$$

et ces quantités, quand $k \to \infty$, tendent respectivement vers

$$\int_0^1 f(t)\, dt - \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 f(t)\, dt + \varepsilon \quad ;$$

puisque $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, il en résulte que f vérifie la condition (2). Dès lors, la suffisance de (2) entraîne celle de (3).

Si $\Delta = \underset{\sim}{Q}_p$, la condition (3) s'écrit

$$\lim_{T\to\infty} p^{-T} \int_{p^{-T}\underset{\sim}{Z}_p} e_p(hF(x))\, dx = 0 \quad . \tag{3'}$$

On remarquera que, si $\mu(\Delta) < \infty$, on sait que la condition

$$\int_{\Delta} e_p(hF(x))\, dx = 0 \qquad \text{pour tout } h \in \underset{\sim}{N}$$

n'est vérifiée par aucune fonction F .

Pour l'application du critère de Weyl, on posera dans tout ce qui suit

$$\sigma_T^{\Delta}(F\ ,\ h) = \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} e_p(hF(x))\, dx \ ,$$

et si $\Delta = \underset{\sim}{Q}_p$:

$$\sigma_T(F\ ,\ h) = p^{-T} \int_{p^{-T}\underset{\sim}{Z}_p} e_p(hF(x))\, dx \ .$$

Ce critère est applicable en particulier à toute fonction F <u>continue sur un ouvert</u> Δ <u>de</u> $\underset{\sim}{Q}_p$.

4. Quelques propriétés élémentaires.

4.1. - Il est immédiat que <u>si</u> F , <u>μ-mesurable sur une partie μ-mesurable</u> Δ <u>de</u> $\underset{\sim}{Q}_p$, <u>est C-e. r.</u> (mod 1) , <u>alors</u> $F + \alpha$, <u>où</u> $\alpha \in \underset{\sim}{Q}_p$, <u>est C-e. r.</u> (mod 1) .

4.2. - <u>Si</u> G , <u>μ-mesurable sur une partie μ-mesurable</u> Δ <u>de</u> $\underset{\sim}{Q}_p$, <u>est C-e.r.</u> (mod 1) <u>et si</u> $|F(x) - G(x) - \alpha|_p \leqslant 1$, <u>où</u> $\alpha \in \underset{\sim}{Q}_p$, <u>quand</u> $x \in \Delta$, $|x|_p \to \infty$, <u>alors</u> F <u>est C-e. r.</u> (mod 1) .

G , définie sur Δ , est C-e. r. (mod 1) , ce qui exige d'abord $\mu(\Delta) = \infty$. D'après 4.1, il suffit d'établir la propriété pour $\alpha = 0$. Il existe T_0 tel qu'on ait $|F(x) - G(x)|_p \leqslant 1$ pour $x \in \Delta - \Delta_{T_0}$. Dès lors, on a, pour $T > T_0$, $h \in \underset{\sim}{N}$:

$$\sigma_T^{\Delta}(F, h) = \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_{T_0}} e_p(hF(x))\, dx + \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T - \Delta_{T_0}} e_p(hG(x))\, dx = A_T + \sigma_T^{\Delta}(G, h) \ ,$$

en posant

$$A_T = \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_{T_0}} (e_p(hF(x)) - e_p(hG(x)))\, dx \ .$$

Comme $\sigma_T^{\Delta}(G\ ,\ h) \to 0$ et $|A_T| \leqslant \dfrac{2\mu(\Delta_{T_0})}{\mu(\Delta_T)} \to 0$ quand $T \to \infty$, on voit que $\lim_{T\to\infty} \sigma_T^{\Delta}(F\ ,\ h) = 0$ pour tout $h \in \underset{\sim}{N}$.

5. Intégrales remarquables sur $\underset{\sim}{Z}_p$ et sur $\underset{\sim}{U}_p$.

5.1. - Rappelons deux résultats de F. BERTRANDIAS [1] ;

(a) Soit $I(y) = \int_{\underset{\sim}{Z}_p} e_p(yx)\,dx$, où $v(y) = -k$, $k \geqslant 1$. On a alors,

si $y \in \frac{h}{p^k} + \underset{\sim}{Z}_p$:

$$I(y) = \frac{1}{p^k} \sum_{0 \leqslant n \leqslant p^k - 1} e_p(ny) = \frac{1}{p^k} \sum_{0 \leqslant n \leqslant p^k - 1} e\left(\frac{nh}{p^k}\right) = \frac{1}{p^k} \frac{e(h) - 1}{e(hp^{-k}) - 1} = 0 \quad .$$

Donc, <u>si</u> $y \in \underset{\sim}{Q}_p - \underset{\sim}{Z}_p$, <u>alors</u> $I(y) = 0$.

(b) Soit $I_\varphi(y) = \int_{\underset{\sim}{Z}_p} e_p(y\varphi(x))\,dx$, où $v(y) = -k$, $k \geqslant 1$, et $\varphi \in \mathrm{Isom}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{Q}_p)$, de sorte qu'il existe $r \in \underset{\sim}{r}_p$ tel que φ soit une application isométrique de $\underset{\sim}{Z}_p$ sur la boule $r + \underset{\sim}{Z}_p$, donc de chacune des boules $B(h , k)$ de $\underset{\sim}{Z}_p$ sur chacune des boules $B(r + \ell , k)$ de $r + \underset{\sim}{Z}_p$, avec $\varphi(h) = r + \alpha_\ell$, où $\alpha_\ell \in B(\ell , k)$. On a alors

$$I_\varphi(y) = \frac{1}{p^k} \sum_{0 \leqslant h \leqslant p^k - 1} e_p(y\varphi(h)) = \frac{1}{p^k} \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant p^k - 1} e_p(yr + y\alpha_\ell)$$

$$= \frac{e_p(yr)}{p^k} \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant p^k - 1} e_p(y\ell) = 0 \quad .$$

Donc, <u>si</u> $y \in \underset{\sim}{Q}_p - \underset{\sim}{Z}_p$ <u>et</u> $\varphi \in \mathrm{Isom}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{Q}_p)$, <u>alors</u> $I_\varphi(y) = 0$.

5.2.

(a) Soit $J(y) = \int_{\underset{\sim}{U}_p} e_p(yx)\,dx$, où $v(y) \leqslant -2$. On a, d'après 5.1 (a):

$$J(y) = \int_{\underset{\sim}{Z}_p} e_p(yx)\,dx - \int_{p\underset{\sim}{Z}_p} e_p(yx)\,dx = \int_{\underset{\sim}{Z}_p} e_p(yx)\,dx - p^{-1} \int_{\underset{\sim}{Z}_p} e_p(pyz)\,dz = 0 \quad .$$

Donc, <u>si</u> $y \in \underset{\sim}{Q}_p - p^{-1}\,\underset{\sim}{Z}_p$, <u>alors</u> $J(y) = 0$.

(b) Soit $J_\varphi(y) = \int_{\underset{\sim}{U}_p} e_p(y\varphi(x))\,dx$, où $v(y) \leqslant -2$ et $\varphi \in \mathrm{Isom}(\underset{\sim}{U}_p , \underset{\sim}{Q}_p)$. Soit φ^* un prolongement de φ sur $\underset{\sim}{Z}_p$ tel que $\varphi^* \in \mathrm{Isom}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{Q}_p)$; alors $x \longrightarrow \frac{\varphi^*(px)}{p}$ est une application isométrique de $\underset{\sim}{Z}_p$ dans $\underset{\sim}{Q}_p$. On a, d'après 5.1 (b) :

$$J_\varphi(y) = \int_{\underset{\sim}{Z}_p} e_p(y\varphi^*(x))\,dx - \int_{p\underset{\sim}{Z}_p} e_p(y\varphi^*(x))\,dx$$

$$= \int_{\underset{\sim}{Z}_p} e_p(y\varphi^*(x))\,dx - p^{-1} \int_{\underset{\sim}{Z}_p} e_p\left(py\,\frac{\varphi^*(pz)}{p}\right) dz = 0 .$$

Donc, <u>si</u> $y \in \underset{\sim}{Q}_p - p^{-1}\,\underset{\sim}{Z}_p$ <u>et</u> $\varphi \in \mathrm{Isom}(\underset{\sim}{U}_p , \underset{\sim}{Q}_p)$, <u>alors</u> $J_\varphi(y) = 0$.

6. Exemples.

6.1. - Posons $F(x) = \alpha x$, où $\alpha \in \mathbb{Q}_p^*$, pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$; on a, pour $h \in \mathbb{N}$, en posant $x = p^{-T} y$:

$$\sigma_T(F , h) = p^{-T} \int_{p^{-T}\mathbb{Z}_p} e_p(h\alpha x)\, dx = \int_{\mathbb{Z}_p} e_p(h\alpha p^{-T} y)\, dy ,$$

et cette intégrale est nulle si $v(h\alpha) - T \leqslant -1$, c'est-à-dire si $T \geqslant v(h\alpha) + 1$; il en résulte que $\lim_{T\to\infty} \sigma_T(F , h) = 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}$. On voit finalement que la fonction $x \longrightarrow \alpha_1 x + \alpha_0$, où $\alpha_1 \in \mathbb{Q}_p^*$, $\alpha_0 \in \mathbb{Q}_p$, est C-e. r. (mod 1) .

6.2. - Soit f une application μ-mesurable de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Q}_p$, et posons

$$F_\alpha(x) = \alpha x + f([x]_p) , \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{Z}_p , \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{Q}_p .$$

Si $\alpha = 0$, la fonction F_0 n'est pas C-e. r. (mod 1) ; en effet, en posant

$$(a , b)_f^{\mathbb{Z}_p} = \mu(\{x \in \mathbb{Z}_p \mid a \leqslant \langle f(x)\rangle_p < b\}) ,$$

on a $(T , a , b)_{F_0} = p^T (a , b)_f^{\mathbb{Z}_p}$ pour $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, $T \geqslant 0$; si F_0 , définie sur $\mathbb{Q}_p$, était C-e. r. (mod 1) , alors f , définie sur $\mathbb{Z}_p$, le serait elle aussi, et cela est impossible, puisque $\mu(\mathbb{Z}_p) = 1$.

Si $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$, formons, pour $h \in \mathbb{N}$, $T \geqslant 0$:

$$\sigma_T(F_\alpha , h) = p^{-T} \sum_{r \in r^T \mathbb{Z}_p} \int_{r+\mathbb{Z}_p} e_p(h\alpha x)\, e_p(hf([x]_p))\, dx ,$$

d'où, en posant $x = r + y$:

$$\sigma_T(F_\alpha , h) = p^{-T} \int_{\mathbb{Z}_p} e_p(hF_\alpha(y))\, dy \sum_{r \in r^T \mathbb{Z}_p} e_p(h\alpha r) .$$

Ce dernier Σ , qui s'écrit $\sum_{0 \leqslant k \leqslant p^T - 1} e_p(h\alpha k p^{-T})$, est égal, si $T > v(h\alpha)$, à $\dfrac{e_p(h\alpha) - 1}{e_p(h\alpha p^{-T}) - 1} = 0$, de sorte que $\sigma_T(F_\alpha , h) = 0$ pour $T > v(h\alpha)$; donc $\lim_{T\to\infty} \sigma_T(F_\alpha , h) = 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}$. Ainsi, la fonction F_α , où $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$, est C-e. r. (mod 1) .

En particulier, la fonction $x \longrightarrow \alpha_1 \langle x\rangle_p + \alpha_0$, où $\alpha_1 \in \mathbb{Z}_p^*$, $\alpha_0 \in \mathbb{Q}_p$, est C-e. r. (mod 1) .

6.3. - Comme $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{x} - \frac{x}{\alpha}$ et $\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{x} - \frac{x}{\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{Q}_p^*$, continues en x sur l'ouvert $\mathbb{Q}_p - p^{v(\alpha)}\mathbb{Z}_p$ de $\mathbb{Q}_p$, tendent vers 0 quand $|x|_p \to \infty$, il résulte de 4.2 que <u>les fonctions</u> $x \longmapsto \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{x}$, $x \longmapsto \operatorname{cosec}\frac{\alpha}{x}$, <u>où</u> $\alpha \in \mathbb{Q}_p^*$, <u>sont</u> C-<u>e. r.</u> (mod 1).

On notera que $x \longmapsto \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{x}$, $x \longmapsto \operatorname{cosec}\frac{\alpha}{x}$, où $\alpha \in \mathbb{Q}_p^*$, sont deux applications homométriques de $\mathbb{Q}_p - p^{v(\alpha)}\mathbb{Z}_p$ sur $\mathbb{Q}_p - \mathbb{Z}_p$.

6.4. - Soit $E_p = \{k \in \mathbb{Z}^* \mid (k, p) = (k, p-1) = 1\}$. Si $n \in E_p$, tout $x \in U_p$ admet une seule racine n-ième dans U_p, donc tout $x \in V_p(n) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} p^{kn} U_p$ admet une seule racine n-ième dans $\mathbb{Q}_p$, notée $x^{1/n}$.

Soit alors $E_p^+ = E_p \cap \mathbb{N}$, et posons $F(x) = \alpha x^{1/n}$, où $\alpha \in \mathbb{Q}_p^*$, $n \in E_p^+$, pour tout $x \in V_p(n)$; la fonction F est continue sur l'ouvert $\Delta = V_p(n)$ de $\mathbb{Q}_p$. Posons $x = p^{-nt} y$, de sorte que y décrit U_p quand x décrit $p^{-nt} U_p$. Calculons, pour $h \in \mathbb{N}$:

$$I_t = \int_{p^{-nt}U_p} e_p(hF(x))\, dx = p^{nt} \int_{U_p} e_p(h\alpha p^{-t} y^{1/n})\, dy \quad .$$

Comme $x \longmapsto x^{1/n}$ est une isométrie de U_p (cf. [2]), on sait, d'après 5.2 (b), que cette dernière intégrale est nulle si $v(h\alpha) - t \leqslant -2$, c'est-à-dire si $t \geqslant v(h\alpha) + 2$. Posant $t_1 = v(h\alpha) + 1$, on voit que $I_t = 0$ pour $t > t_1$.

Cela étant, pour $T \geqslant n(t_1 + 1)$, $h \in \mathbb{N}$, on a $\sigma_T^{\Delta}(F, h) = A_T + B_T$, en posant

$$\left|\begin{array}{l} A_T = \dfrac{1}{\mu(\Delta_T)} \displaystyle\int_{\Delta_{nt_1}} e_p(hF(x))\, dx \\[2ex] B_T = \dfrac{1}{\mu(\Delta_T)} \displaystyle\sum_{t_1+1 \leqslant t \leqslant [T/n]} I_t \end{array}\right. \quad .$$

D'après ce qui précède, on a $B_T = 0$; d'autre part $|A_T| \leqslant \dfrac{p^{nt_1}}{\mu(\Delta_T)}$ qui tend vers 0 quand $T \to \infty$, car $\mu(\Delta) = \infty$. Finalement donc $\lim_{T\to\infty} \sigma_T^{\Delta}(F, h) = 0$, et cela pour tout $h \in \mathbb{N}$, d'où :

THÉORÈME 3. - <u>La fonction</u> F, <u>définie sur</u> $V_p(n)$ <u>par</u> $F(x) = \alpha x^{1/n}$, <u>où</u> $\alpha \in \mathbb{Q}_p^*$, $n \in E_p^+$, <u>est</u> C-<u>e. r.</u> (mod 1).

6.5. - Posons $F(x) = \frac{\alpha}{x}$, où $\alpha \in U_p$, pour tout $x \in \mathbb{Z}_p^*$; on sait que F n'est pas C-e. r. (mod 1). Soit $m(r)$ la masse de répartition (mod 1) de F au point $r \in \mathbb{r}_p$.

Pour que $\frac{\alpha}{x} \in \underset{\sim}{Z}_p$, il faut et il suffit que $x \in \underset{\sim}{U}_p$; donc $m(0) = \mu(\underset{\sim}{U}_p) = \frac{p-1}{p}$. Soit $r \neq 0$; pour que $\frac{\alpha}{x} \in r + \underset{\sim}{Z}_p$, il faut et il suffit que $v(x) = -v(r)$ et que $\alpha \in rx + p^{-v(r)} \underset{\sim}{Z}_p$, c'est-à-dire que $x \in \frac{\alpha}{r} + p^{-2v(r)} \underset{\sim}{Z}_p$; donc $m(r) = p^{2v(r)}$.

Finalement, on obtient

$$m(r) = |r|_p^{-2} \quad \text{si} \quad r \in \underset{\sim}{r}_p^* , \qquad m(0) = (p-1)p^{-1} ,$$

et on vérifie aussitôt que

$$\sum_{r \in \underset{\sim}{r}_p} m(r) = (p-1) \sum_{k \in \underset{\sim}{N}} p^{-k} = 1 .$$

7. Condition suffisante de C-équirépartition (mod 1) .

7.1. - Soit F une application de $\underset{\sim}{Q}_p$ dans $\underset{\sim}{Q}_p$, et soit B une boule ouverte de $\underset{\sim}{Q}_p$. La fonction F est dite homométrique sur B si et seulement si

$$\left| \frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} \right|_p$$

est constant quels que soient $x_1 \in B$, $x_2 \in B$, $x_1 \neq x_2$; cette constante, dite rapport d'homométrie de F sur B , est notée $|F , B|_p$. Si $0 \notin B$, tous les points de B ont une même valeur absolue p-adique > 0 , notée $|B|_p$.

THÉORÈME 4. - Soit une partition de $\underset{\sim}{Q}_p^*$ en boules ouvertes B , et soit F une fonction μ-mesurable sur une partie μ-mesurable Δ de $\underset{\sim}{Q}_p$ telle que $B \subset \Delta$ quand $|B|_p \to \infty$; si F est homométrique sur B quand $|B|_p \to \infty$ et si

$$\lim_{|B|_p \to \infty} \mu(B) \, |F , B|_p = \infty , \tag{4}$$

alors F est C-e. r. (mod 1) .

Il existe t_1 tel que, pour $t > t_1$, la fonction F soit homométrique sur toute boule B de la couronne $p^{-t} \underset{\sim}{U}_p$; or cette couronne, étant fermée, contient un nombre fini de boules B (on le voit aussitôt par l'absurde), disons K_t boules

$$B_{k,t} = a_{k,t} \, p^{-t} + p^{-\ell_{k,t}} \underset{\sim}{Z}_p ,$$

où $k = 1 , \ldots , K_t$, avec $a_{k,t} \in \underset{\sim}{U}_p$ et $\ell_{k,t} \leqslant t - 1$ pour $k = 1 , \ldots , K_t$. On pose

$$x = a_{k,t}\, p^{-t} + p^{-\ell_{k,t}}\, y \quad ,$$

de sorte que y décrit $\underset{\sim}{Z}_p$ quand x décrit $B_{k,t}$. Posons d'autre part

$$|F\ ,\ B_{k,t}|_p = p^{\lambda_{k,t}} \qquad \text{pour} \quad t > t_1\ , \quad k = 1\ ,\ \dots\ ,\ K_t\ ,$$

et soit φ l'application de $\underset{\sim}{Z}_p$ dans $\underset{\sim}{Q}_p$ définie par

$$\varphi(y) = p^{\lambda_{k,t}+\ell_{k,t}}\, F(x) \quad .$$

Prenant $y_1 \in \underset{\sim}{Z}_p$, $y_2 \in \underset{\sim}{Z}_p$, auxquels correspondent $x_1 \in B_{k,t}$, $x_2 \in B_{k,t}$, on a

$$\varphi(y_1) - \varphi(y_2) = p^{\lambda_{k,t}+\ell_{k,t}}(F(x_1) - F(x_2)) \quad ,$$

d'où

$$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)|_p = p^{-\ell_{k,t}}|x_1 - x_2|_p = |y_1 - y_2|_p \quad ,$$

ce qui montre que φ est une application isométrique de $\underset{\sim}{Z}_p$ dans $\underset{\sim}{Q}_p$.

Dès lors, calculons, pour $t > t_1$, $h \in \underset{\sim}{N}$:

$$I_{k,t} = \int_{B_{k,t}} e_p(hF(x))\ dx = p^{\ell_{k,t}} \int_{\underset{\sim}{Z}_p} e_p(hp^{-\lambda_{k,t}-\ell_{k,t}}\, \varphi(y))\ dy \quad .$$

On sait, d'après 5.1 (b), que cette dernière intégrale est nulle si

$$v(h) - \lambda_{k,t} - \ell_{k,t} \leqslant -1 \qquad \text{c'est-à-dire si} \qquad \lambda_{k,t} + \ell_{k,t} \geqslant v(h) + 1 \quad .$$

Comme par hypothèse $\lim\limits_{t\to\infty} (\lambda_{k,t} + \ell_{k,t}) = \infty$ quel que soit $k = 1\ ,\ \dots\ ,\ K_t$, on voit que, h étant fixé, il existe $t_2 \geqslant t_1$ tel que, pour $t > t_2$, cette condition soit vérifiée, et alors $I_{k,t} = 0$ pour $t > t_2$, $k = 1\ ,\ \dots\ ,\ K_t$.

Cela étant, pour $T > t_2$, $h \in \underset{\sim}{N}$, on a $\sigma_T^{\Delta}(F\ ,\ h) = A_T + B_T$, en posant

$$\left|\begin{array}{l} A_T = \dfrac{1}{\mu(\Delta_T)} \displaystyle\int_{\Delta_{t_2}} e_p(hF(x))\ dx \\[2ex] B_T = \dfrac{1}{\mu(\Delta_T)} \displaystyle\sum_{t_2+1\leqslant t\leqslant T}\ \sum_{1\leqslant k\leqslant K_t} I_{k,t} \quad . \end{array}\right.$$

D'après ce qui précède, on a $B_T = 0$; d'autre part, $|A_T| \leqslant \dfrac{p^{t_2}}{\mu(\Delta_T)}$ qui tend vers 0 quand $T \to \infty$. Finalement donc $\lim\limits_{T\to\infty} \sigma_T(F\ ,\ h) = 0$, et cela pour tout $h \in \underset{\sim}{N}$, ce qui établit le théorème 4.

Soit m entier $\geqslant 0$; si la partition envisagée de $\underset{\sim}{Q}_p^*$ est la réunion des partitions de toutes les couronnes $p^{-t}\,\underset{\sim}{U}_p$ en $K_t = (p-1)p^m$ boules égales $B_{k,t}$ (en particulier, la réunion de toutes les boules maximales de $\underset{\sim}{Q}_p^*$), alors $\ell_{k,t} = t - m - 1$, $\mu(B) = p^{t-m-1} = p^{-m-1}|B|_p$, et la condition (4) s'écrit

$$\lim_{|B|_p \to \infty} |B|_p \, |F\,,\, B|_p = \infty \quad . \tag{4'}$$

7.2. - Soit F une application de $\underset{\sim}{Q}_p$ dans $\underset{\sim}{Q}_p$, et soit $x \in \underset{\sim}{Q}_p$. Si F est <u>strictement dérivable</u> et <u>régulière</u> au point x (cf. [4]), c'est-à-dire si

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(x,x)} \frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} = F'(x) \neq 0 \quad ,$$

alors il existe une boule ouverte $B(x)$ telle que, pour $x_1 \in B(x)$, $x_2 \in B(x)$, $x_1 \neq x_2$, on ait

$$\left|\frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2}\right|_p = |F'(x)|_p \quad ,$$

c'est-à-dire que F est homométrique au voisinage de x . Soit $B_0(x)$ la boule maximale d'homométrie de F au voisinage de $x \in \underset{\sim}{Q}_p^*$ qui ne contient pas 0 ; son rayon sera noté $\rho_F(x)$, de sorte que $\rho_F(x) \leqslant p^{-1}|x|_p$. Dès lors, on a :

COROLLAIRE 1. - <u>Soit</u> F <u>une fonction</u> μ-<u>mesurable sur une partie</u> μ-<u>mesurable</u> Δ <u>de</u> $\underset{\sim}{Q}_p$ <u>telle que</u> $x \in \Delta$ <u>quand</u> $|x|_p \to \infty$; <u>si</u> F <u>est strictement dérivable et régulière quand</u> $|x|_p \to \infty$ <u>et si</u>

$$\lim_{|x|_p \to \infty} \rho_F(x)|F'(x)|_p = \infty \quad , \tag{5}$$

<u>alors</u> F <u>est</u> C-<u>e. r.</u> (mod 1) .

En effet, pour $|x|_p > p^{t_1}$, l'ensemble des boules $B_0(x)$ distinctes constitue une partition de $\underset{\sim}{Q}_p - p^{-t_1}\,\underset{\sim}{Z}_p$ en boules ouvertes ; F est homométrique sur $B_0(x)$ quand $|x|_p \to \infty$, et l'on a

$$\mu(B_0(x)) = \rho_F(x) \qquad \text{et} \qquad |F\,,\, B_0(x)|_p = |F'(x)|_p \quad ;$$

La condition (4) donne alors (5).

Soit $m \in \underset{\sim}{N}$; si $\rho_F(x) \geqslant p^{-m}|x|_p$ quand $|x|_p \to \infty$, la condition (5) est vérifiée dès qu'on a

(5') $$\lim_{|x|_p \to \infty} |xF'(x)|_p = \infty \quad ,$$

ce qui fournit un analogue p-adique d'un théorème de L. KUIPERS [3].

Le théorème 4 et le corollaire 1 sont applicables en particulier à toute fonction F continue sur un voisinage ouvert Δ du point à l'infini de $\mathbb{Q}_p$.

8. Applications.

8.1. - C-équirépartition (mod 1) des polynômes P(x) non constants.

Posons

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad ,$$

où $\alpha_k \in \mathbb{Q}_p$ pour $k = 0, 1, \dots, n$, avec $\alpha_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$: la fonction P est continue sur $\mathbb{Q}_p$.

Montrons d'abord que P est homométrique sur $B_{k,t} = \nu_k p^{-t} + p^{-t+2} \mathbb{Z}_p$ quand $t \to \infty$, où ν_k désigne le k-ième entier naturel non divisible par p, avec $k = 1, 2, \dots, p(p-1)$. Prenons x_1, x_2 dans $B_{k,t}$, et posons

$$x_1 - x_2 = p^{-t+2} y \quad , \qquad \text{où } y \in \mathbb{Z}_p \ .$$

On a alors, quel que soit $m \subset \mathbb{N}$:

$$x_1^m - x_2^m = \sum_{1 \leqslant h \leqslant m} \binom{m}{h} x_2^{m-h} p^{h(-t+2)} y^h = (x_1 - x_2) \sum_{1 \leqslant h \leqslant m} \binom{m}{h} x_2^{m-h} p^{(h-1)(-t+2)} y^{h-1} \ .$$

De $\binom{m}{h} = \frac{m}{h}\binom{m-1}{h-1}$, on déduit $v(\binom{m}{h}) \geqslant v(m) - v(h) \geqslant v(m) - h + 1$ pour $1 \leqslant h \leqslant m$. Dès lors, on a, pour $1 \leqslant h \leqslant m$:

$$v(\binom{m}{h} x_2^{m-h} p^{(h-1)(-t+2)} y^{h-1}) \geqslant v(m) - (m-h)t + (h-1)(-t+1+v(y))$$
$$= v(m) - (m-1)t + (h-1)(1+v(y)) \quad ,$$

et pour $h = 1$:

$$v(\binom{m}{1} x_2^{m-1}) = v(m) - (m-1)t \ .$$

Comme $v(y) \geqslant 0$, on voit que $(h-1)(1+v(y)) \geqslant 1$ pour $h \geqslant 2$, de sorte que

$$v(\binom{m}{h} x_2^{m-h} p^{(h-1)(-t+2)} y^{h-1}) > v(\binom{m}{1} x_2^{m-1}) \qquad \text{pour } 2 \leqslant h \leqslant m \ .$$

Il en résulte qu'on a, pour $x_1 \in B_{k,t}$, $x_2 \in B_{k,t}$, $x_1 \neq x_2$, quel que soit $m \in \underset{\sim}{N}$:

$$v\left(\frac{x_1^m - x_2^m}{x_1 - x_2}\right) = v(m) - (m-1)t \quad .$$

Formons

$$\frac{P(x_1) - P(x_2)}{x_1 - x_2} = \sum_{1 \leqslant h \leqslant n} \alpha_h \frac{x_1^h - x_2^h}{x_1 - x_2} \quad .$$

Puisque

$$v\left(\alpha_h \frac{x_1^h - x_2^h}{x_1 - x_2}\right) = v(\alpha_h) + v(h) - (h-1)t \quad ,$$

il existe t_1 tel que, pour $t > t_1$, la valuation du dernier terme soit strictement inférieure à celles des termes précédents, donc tel qu'on ait

$$v\left(\frac{P(x_1) - P(x_2)}{x_1 - x_2}\right) = v(\alpha_n) + v(n) - (n-1)t$$

quels que soient $x_1 \in B_{k,t}$, $x_2 \in B_{k,t}$, $x_1 \neq x_2$; ainsi P est homométrique sur $B_{k,t}$ pour $t > t_1$, quel que soit $k = 1 , 2 , \ldots , p(p-1)$.

Il en résulte que la condition (4') est applicable à P , avec ici $m = 1$. Or $|B_{k,t}|_p \, |P , B_{k,t}|_p = |n\alpha_n|_p \, p^{nt} \to \infty$ quand $t \to \infty$, puisque $n \geqslant 1$; on a donc :

THÉORÈME 5. - Toute fonction polynomiale non constante définie sur $\underset{\sim}{Q}_p$ et à coefficients dans $\underset{\sim}{Q}_p$ est C-e. r. (mod 1) .

8.2. - C-équirépartition (mod 1) des fractions rationnelles $F(x)$ telles que $\lim_{|x|_p \to \infty} |F(x)|_p = \infty$.

Soit $F(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ irréductible, où $A(x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \alpha_k x^k$, $B(x) = \sum_{0 \leqslant h \leqslant m} \beta_h x^h$, $\alpha_k , \beta_h \in \underset{\sim}{Q}_p$ pour $k = 0 , \ldots , n$ et $h = 0 , \ldots , m$, avec $\alpha_n \neq 0$, $\beta_m \neq 0$, $n > m \geqslant 0$; F est définie et continue sur l'ouvert $\Delta = \{x \in \underset{\sim}{Q}_p \mid B(x) \neq 0\}$ de $\underset{\sim}{Q}_p$, et $\mu(\underset{\sim}{Q}_p - \Delta) = 0$.

Si $m = 0$, alors F , définie sur $\underset{\sim}{Q}_p$, est C-e. r. (mod 1) (théorème 5).

Si $m \geqslant 1$, la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ donne, pour $x \in \underset{\sim}{Q}_p$:

$$A(x) - B(x)\,Q(x) = R(x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant r} \gamma_k x^k \qquad \text{où} \quad 0 \leqslant r < m \, , \ \gamma_r \neq 0 \, ,$$

d'où, pour $x \in \Delta$:

$$F(x) - Q(x) = \frac{R(x)}{B(x)} \quad \text{irréductible .}$$

Pour $x \in \Delta$, $|x|_p$ assez grand, on a

$$|F(x) - Q(x)|_p = |\frac{\gamma_r}{\beta_m} x^{r-m}|_p$$

qui tend vers 0 quand $|x|_p \to \infty$, de sorte que $|F(x) - Q(x)|_p \leqslant 1$ pour $x \in \Delta$, $|x|_p \to \infty$. Comme $\deg Q = n - m \geqslant 1$, la fonction Q définie sur $\underset{\sim}{Q}_p$, donc aussi sa restriction à Δ , sont C-e. r. (mod 1) ; dès lors, d'après 4.2, on obtient :

COROLLAIRE 2. - Toute fonction fraction rationnelle irréductible F définie sur $\underset{\sim}{Q}_p$ sauf en ses pôles dans $\underset{\sim}{Q}_p$ et à coefficients dans $\underset{\sim}{Q}_p$, telle que

$$\lim_{|x|_p \to \infty} |F(x)|_p = \infty \ ,$$

est C-e. r. (mod 1) .

8.3. - A tout $x \in \underset{\sim}{U}_p$ est associée une racine $(p-1)$-ième de 1 , soit ζ_x , telle que $\zeta_x x \in 1 + p\underset{\sim}{Z}_p$; rappelons (cf. [2]) qu'alors la fonction

$$x \longmapsto \log \zeta_{x|x|_p} x|x|_p \ ,$$

définie sur $\underset{\sim}{Q}_p^*$, fournit un prolongement continu du logarithme sur $\underset{\sim}{Q}_p^*$; c'est cette fonction prolongée qui sera notée log dans ce qui suit.

Soit

$$P(x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \alpha_k x^k \ , \quad \text{où } \alpha_k \in \underset{\sim}{Q}_p \text{ pour } k = 0, \dots, n, \text{ avec } \alpha_n \neq 0, \ n \in \underset{\sim}{N} \ ,$$

et posons

$$F(x) = P(x) \log x \qquad \text{pour tout } x \in \underset{\sim}{Q}_p^* \ ;$$

F est définie et continue sur l'ouvert $\Delta = \underset{\sim}{Q}_p^*$ de $\underset{\sim}{Q}_p$, voisinage du pcint à l'infini.

Montrons d'abord que F est homométrique sur $B_{k,t} = kp^{-t} + p^{-t+1}\underset{\sim}{Z}_p$ quand $t \to \infty$, quel que soit $k = 1, \dots, p-1$. On sait (cf. [2]) que $x \longmapsto x \exp x$ est une isométrie de $p\underset{\sim}{Z}_p$; on a donc, pour $x_1 \in \underset{\sim}{Q}_p^*$, $x_2 \in \underset{\sim}{Q}_p^*$ et pour tout $h \in \underset{\sim}{Z}$:

$$v(\log x_1^h \exp \log x_1^h - \log x_2^h \exp \log x_2^h) = v(\log x_1^h - \log x_2^h) \ ,$$

d'où

$$v(\log x_1 \exp \log x_1^h - \log x_2 \exp \log x_2^h) = v(\log x_1 - \log x_2) \quad .$$

Prenons x_1 , x_2 dans $B_{k,t}$; le 1er membre vaut alors

$$v(\zeta_{x_1^h|x_1|_p^h} x_1^h |x_1|_p^h \log x_1 - \zeta_{x_2^h|x_2|_p^h} x_2^h |x_2|_p^h \log x_2)$$

$$= v(\zeta_k^h x_1^h p^{ht} \log x_1 - \zeta_k^h x_2^h p^{ht} \log x_2) = v(x_1^h \log x_1 - x_2^h \log x_2) + ht \quad ,$$

et le 2e membre vaut

$$v(\log \frac{x_1}{x_2}) = v(\frac{x_1}{x_2} - 1) = v(x_1 - x_2) + t \quad ;$$

on a donc, pour $x_1 \in B_{k,t}$, $x_2 \in B_{k,t}$, $x_1 \neq x_2$, quel que soit $h \in \underset{\sim}{Z}$:

$$v(\frac{x_1^h \log x_1 - x_2^h \log x_2}{x_1 - x_2}) = - (h - 1)t \quad .$$

Formons

$$\frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} = \sum_{1 \leqslant h \leqslant n} \alpha_h \frac{x_1^h \log x_1 - x_2^h \log x_2}{x_1 - x_2} \quad .$$

Puisque

$$v(\alpha_h \frac{x_1^h \log x_1 - x_2^h \log x_2}{x_1 - x_2}) = v(\alpha_h) - (h - 1)t \quad ,$$

il existe t_1 tel que, pour $t > t_1$, la valuation du dernier terme soit strictement inférieure à celles des termes précédents, donc tel qu'on ait

$$v(\frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2}) = v(\alpha_n) - (n - 1)t$$

quels que soient $x_1 \in B_{k,t}$, $x_2 \in B_{k,t}$, $x_1 \neq x_2$; ainsi F est homométrique sur $B_{k,t}$ pour $t > t_1$, quel que soit $k = 1 , 2 , \ldots , p - 1$.

Il en résulte que la condition (4') est applicable à F , avec ici $m = 0$. Or $|B_{k,t}|_p \, |F , B_{k,t}|_p = |\alpha_n|_p \, p^{nt} \to \infty$ quand $t \to \infty$, puisque $n \geqslant 1$; on a donc :

THÉORÈME 6. - Si P est une fonction polynomiale non constante à coefficients dans $\underset{\sim}{Q}_p$, alors la fonction F définie sur $\underset{\sim}{Q}_p^*$ par $F(x) = P(x) \log x$ est C-e. r. (mod 1) .

8.4. - C-équirépartition (mod 1) de certaines fonctions entières.

On va démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 7. - Soit F la fonction définie sur $\mathbb{Q}_p$ par

$$F(x) = \sum_{n \geqslant n_0} \frac{a_n}{kn + h} x^{kn+h}$$

où $n_0 \in \mathbb{N}$, k entier $\geqslant 2$, h entier $\geqslant 1 - kn_0$, $a_n \in \mathbb{Q}_p^*$ pour $n \geqslant n_0$, avec $\lim_{n\to\infty} |a_n|_p^{-1/n} = \infty$; si l'on a, pour $n \geqslant n_0$:

$$v\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \notin k\mathbb{Z}, \qquad v\left(\frac{a_n a_{n+2}}{a_{n+1}^2}\right) \geqslant 1 ,$$

alors γF, où $\gamma \in \mathbb{Q}_p^*$, est C-e. r. (mod 1).

F est définie et continue sur $\mathbb{Q}_p$. Prenons x_1, x_2 dans

$$B_{\ell,t} = \nu_\ell\, p^{-t} + p^{-t+2}\,\mathbb{Z}_p ,$$

où $t \in \mathbb{Z}$, $\ell = 1, 2, \ldots, p(p-1)$, et formons, pour $x_1 \neq x_2$:

$$\frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} = \sum_{n \geqslant n_0} \frac{a_n}{kn + h} \frac{x_1^{kn+h} - x_2^{kn+h}}{x_1 - x_2} , \quad \text{soit} \quad \sum_{n \geqslant n_0} A_n .$$

On a (cf. 8.1)

$$v(A_n) = v(a_n) - (kn + h - 1)t ,$$

d'où les différences première et seconde

$$\Delta_1 v(A_n) = v(A_{n+1}) - v(A_n) = v\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - kt$$

$$\Delta_2 v(A_n) = \Delta_1 v(A_{n+1}) - \Delta_1 v(A_n) = v\left(\frac{a_n a_{n+2}}{a_{n+1}^2}\right) .$$

Puisque $\Delta_2 v(A_n) \geqslant 1$, on voit d'abord que, t étant fixé, $\Delta_1 v(A_n)$ est strictement croissant en n pour $n \geqslant n_0$; d'autre part on a $\Delta_1 v(A_n) \notin k\mathbb{Z}$, ce qui entraîne $\Delta_1 v(A_n) \neq 0$ pour $n \geqslant n_0$, quel que soit $t \in \mathbb{Z}$. Ainsi, quel que soit $t \in \mathbb{Z}$, la suite $(\Delta_1 v(A_n))_{n \geqslant n_0}$ est une suite strictement croissante de $\mathbb{Z}^*$, et il existe $n_t \geqslant n_0$ tel que $\Delta_1 v(A_{n_t})$ soit son premier terme > 0 ; on a alors :

$$\left|\begin{array}{ll} v(A_{n_t}) < v(A_{n_t+1}) < v(A_{n_t+2}) < \dots & \text{si } n_t = n_0 \\ v(A_{n_0}) > v(A_{n_0+1}) > \dots > v(A_{n_t-1}) > v(A_{n_t}) < v(A_{n_t+1}) < \dots & \text{si } n_t > n_0 \ , \end{array}\right.$$

ce qui entraîne

$$v\left(\frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2}\right) = v(A_{n_t}) \leqslant (A_{n_0}) = v(a_{n_0}) - (kn_0 + h - 1)t$$

quels que soient $x_1 \in B_{\ell,t}$, $x_2 \in B_{\ell,t}$, $x_1 \neq x_2$, et F est homométrique sur $B_{\ell,t}$ pour $t \in \underset{\sim}{Z}$, $\ell = 1 , 2 , \dots , p(p-1)$.

Il en résulte que la condition (4') est applicable à F , avec ici $m = 1$. Or.

$$|B_{\ell,t}|_p \, |F , B_{\ell,t}|_p = p^t |A_{n_t}|_p \geqslant p^t |A_{n_0}|_p = |a_{n_0}|_p \, p^{(kn_0+h)t} \to \infty \quad \text{quand } t \to \infty \ ,$$

puisque $kn_0 + h \geqslant 1$; donc F est C-e. r. (mod 1) , et il en est de même de γF , où $\gamma \in \underset{\sim}{Q}_p^*$, car les conditions imposées à F sont invariantes par homothétie de rapport non nul sur les a_n .

Exemples.

(a) Prenant $k = 2\ell$, où $\ell \in \underset{\sim}{N}$, et $a_n = \alpha^{n^r}$, où $\alpha \in p\underset{\sim}{Z}_p^*$, $v(\alpha) \in 2\underset{\sim}{N} - 1$, $r \in \underset{\sim}{N} + 1$, on a

$$\frac{v(a_n)}{n} = n^{r-1} \, v(\alpha) \to \infty \quad \text{quand } n \to \infty \ , \qquad v\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = ((n+1)^r - n^r) \, v(\alpha) \notin 2\underset{\sim}{Z} \ ,$$

$$v\left(\frac{a_n a_{n+2}}{a_{n+1}^2}\right) = (n^r + (n+2)^r - 2(n+1)^r) \, v(\alpha) \geqslant 1 + 3^r - 2^{r+1} \geqslant 1 + 3^2 - 2^3 = 2 \ .$$

Donc, si l'on pose sur $\underset{\sim}{Q}_p$

$$F(x) = \sum_{n \geqslant n_0} \frac{\alpha^{n^r}}{2\ell n + h} \, x^{2\ell n + h} \ ,$$

où $n_0 , \ell \in \underset{\sim}{N}$, $h \in \underset{\sim}{N} - 2\ell n_0$, $v(\alpha) \in 2\underset{\sim}{N} - 1$, $r \in \underset{\sim}{N} + 1$, alors γF , où $\gamma \in \underset{\sim}{Q}_p^*$, est C-e. r. (mod 1) .

(b) Prenant $k = 2\ell$, où $\ell \in \underset{\sim}{N}$, et $a_n = \alpha^{n^n}$, où $\alpha \in p\underset{\sim}{Z}_p^*$, $v(\alpha) \in 2\underset{\sim}{N} - 1$, on a

$$\frac{v(a_n)}{n} = n^{n-1} \, v(\alpha) \to \infty \quad \text{quand } n \to \infty \ , \qquad v\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = ((n+1)^{n+1} - n^n) \, v(\alpha) \notin 2\underset{\sim}{Z} \ ,$$

$$v\left(\frac{a_n\, a_{n+2}}{a_{n+1}^2}\right) = (n^n + (n+2)^{n+2} - 2(n+1)^{n+1})\, v(\alpha) \geqslant 1 + 3^3 - 2^3 = 20 \quad .$$

Donc, si l'on pose sur $\underset{\sim}{Q}_p$

$$F(x) = \sum_{n \geqslant n_0} \frac{\alpha^{n^n}}{2\ell n + h}\, x^{2\ell n + h} \quad ,$$

où n_0 , $\ell \in \underset{\sim}{N}$, $h \in \underset{\sim}{N} - 2\ell n_0$, $v(\alpha) \in 2\underset{\sim}{N} - 1$, alors γF , où $\gamma \in \underset{\sim}{Q}_p^*$, est C-e. r. (mod 1) .

(c) Prenant $k = \ell p_0$, où $\ell \in \underset{\sim}{N}$, p_0 premier, et $a_n = \alpha^{n^{p_0^r}}$, où $\alpha \in p\underset{\sim}{Z}_p^*$, $p_0 \nmid v(\alpha)$, $r \in \underset{\sim}{N}$, on a

$$\frac{v(a_n)}{n} = n^{p_0^r - 1}\, v(\alpha) \to \infty \qquad \text{quand} \qquad n \to \infty \quad ,$$

puis par application répétée de Fermat

$$v\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = ((n+1)^{p_0^r} - n^{p_0^r})\, v(\alpha) \equiv v(\alpha) \pmod{p_0} \quad ,$$

de sorte que $v\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \notin p_0\, \underset{\sim}{Z}$, enfin $v\left(\frac{a_n\, a_{n+2}}{a_{n+1}^2}\right) \geqslant 2$ comme dans l'exemple (a). Donc, si l'on pose sur $\underset{\sim}{Q}_p$

$$F(x) = \sum_{n \geqslant n_0} \frac{\alpha^{n^{p_0^r}}}{\ell p_0\, n + h}\, x^{\ell p_0 n + h} \quad ,$$

où p_0 premier, n_0 , ℓ , $r \in \underset{\sim}{N}$, $h \in \underset{\sim}{N} - \ell p_0\, n_0$, $\alpha \in p\underset{\sim}{Z}_p^*$, $p_0 \nmid v(\alpha)$, alors γF , où $\gamma \in \underset{\sim}{Q}_p^*$, est C-e. r. (mod 1) .

(d) Prenant $v(h) = 0$, $k = 2\ell p$, où $\ell \in \underset{\sim}{N}$, et $a_n = \alpha^{n^r (2\ell p n + h)}$, où $\alpha \in p\underset{\sim}{Z}_p^*$, $v(\alpha) \in 2\underset{\sim}{N} - 1$, $r \in \underset{\sim}{N} + 1$, toutes les conditions du théorème 7 sont satisfaites, comme dans l'exemple (a), puisque $v(2\ell p n + h) = 0$. Donc, si l'on pose sur $\underset{\sim}{Q}_p$

$$F(x) = \sum_{n \geqslant n_0} \alpha^{n^r}\, x^{2\ell p n + h} \quad ,$$

où n_0 , $\ell \in \underset{\sim}{N}$, $h \in \underset{\sim}{N} - 2\ell p n_0$, $p \nmid h$, $v(\alpha) \in 2\underset{\sim}{N} - 1$, $r \in \underset{\sim}{N} + 1$, alors γF , où $\gamma \in \underset{\sim}{Q}_p^*$, est C-e. r. (mod 1) .

(e) Soit $\alpha \in p\underset{\sim}{Z}_p^*$, et posons $P(\alpha , x) = \prod_{s \geqslant 0} (1 + \alpha^{2s+1} x)$, produit infini

convergent sur $\underset{\sim}{Q}_p$. De la relation fonctionnelle $P(\alpha , x) = (1 + \alpha x)\, P(\alpha , \alpha^2 x)$, on déduit aisément

$$\prod_{s\geqslant 0} (1 + \alpha^{2s+1} x) = 1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{\alpha^{n^2} x^n}{(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^4)\dots(1 - \alpha^{2n})} ,$$

d'où encore, en y remplaçant x par $\alpha^{2s_0} x$, où $s_0 \in \underset{\sim}{Z}^+$:

$$\prod_{s\geqslant s_0} (1 + \alpha^{2s+1} x) = 1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{\alpha^{n(n+2s_0)} x^n}{(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^4)\dots(1 - \alpha^{2n})} .$$

Dès lors, posons sur $\underset{\sim}{Q}_p^*$

$$F(x) = x^{-h} \prod_{s\geqslant s_0} (1 + \alpha^{2s+1} x^{2\ell p}) ,$$

où $s_0 \in \underset{\sim}{Z}^+$, $\ell \in \underset{\sim}{N}$, $v(\alpha) \in 2\underset{\sim}{N} - 1$, $1 \leqslant h \leqslant 2\ell p - 1$, $p \nmid h$, de sorte que

$$F(x) = x^{-h} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{\alpha^{n(n+2s_0)} x^{2\ell pn-h}}{(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^4)\dots(1 - \alpha^{2n})} , \quad \text{soit} \quad x^{-h} + G(x) .$$

Pour la fonction G , avec ici $n_0 = 1$, $k = 2\ell p$, compte tenu de $v(2\ell pn - h) = 0$, on a

$$\frac{v(a_n)}{n} = (n + 2s_0)\, v(\alpha) \to \infty \qquad \text{quand} \qquad n \to \infty ,$$

$$v\left(\frac{a_{n+1}}{n}\right) = ((n+1)(n+1+2s_0) - n(n+2s_0))\, v(\alpha) \notin 2\underset{\sim}{Z} , \qquad v\left(\frac{a_n a_{n+2}}{a_{n+1}^2}\right) = 2v(\alpha) \geqslant 2 ;$$

donc γG , où $\gamma \in \underset{\sim}{Q}_p^*$, est C-e. r. (mod 1) . Mais

$$|\gamma F(x) - \gamma G(x)|_p = |\gamma|_p\, |x|_p^{-h} \to 0 \qquad \text{quand} \qquad |x|_p \to \infty ,$$

puisque $h \geqslant 1$; il en résulte, d'après 4.2, que γF , où $\gamma \in \underset{\sim}{Q}_p^*$, est C-e. r. (mod 1) .

8.5. - Utilisant le prolongement du logarithme sur $\underset{\sim}{Q}_p^*$ introduit dans 8.3, on obtient de même :

THÉORÈME 8. - Sous toutes les conditions énoncées dans le théorème 7, si F désigne maintenant la fonction définie sur $\underset{\sim}{Q}_p^*$ par

$$F(x) = \sum_{n \geqslant n_0} a_n x^{kn+h} \log x \ ,$$

<u>alors</u> γF , <u>où</u> $\gamma \in \mathbb{Q}_p^*$, <u>est</u> C-<u>e. r.</u> (mod 1) .

F est définie et continue sur $\mathbb{Q}_p^*$, et il est clair qu'on peut répéter ici la démonstration du théorème 7, car, en prenant cette fois x_1 , x_2 dans

$$B_{\ell,t} = \ell p^{-t} + p^{-t+1} \mathbb{Z}_p \ ,$$

où $t \in \mathbb{Z}$, $\ell = 1 , 2 , \ldots , p - 1$, et en formant, pour $x_1 \neq x_2$:

$$\frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} = \sum_{n \geqslant n_0} a_n \frac{x_1^{kn+h} \log x_1 - x_2^{kn+h} \log x_2}{x_1 - x_2} \ , \quad \text{soit} \quad \sum_{n \geqslant n_0} A_n \ ,$$

on a encore (cf. 8.3)

$$v(A_n) = v(a_n) - (kn + h - 1)t \ .$$

<u>Exemple</u>. - Posons sur $\mathbb{Q}_p^*$

$$F(x) = (\log x) \prod_{s \geqslant s_0} (1 + \alpha^{2s+1} x^{2\ell}) \ ,$$

où $s_0 \in \mathbb{Z}^+$, $\ell \in \mathbb{N}$, $v(\alpha) \in 2\mathbb{N} - 1$. On voit comme plus haut que la fonction $\gamma(F - \log)$, où $\gamma \in \mathbb{Q}_p^*$, est C-e. r. (mod 1) ; comme $v(\gamma \log x) \geqslant 0$ si $v(\gamma) \geqslant -1$, il en résulte que γF , où $\gamma \in p^{-1} \mathbb{Z}_p^*$, est C-e. r. (mod 1) .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTRANDIAS (Françoise). - Théorème de Koksma en p-adique, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 6, 1964/65, n° 3, 16 p.

[2] CHAUVINEAU (Jean). - Quelques remarques sur les applications isométriques et la répartition dans un corps p-adique, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 6, 1964/65, n° 12, 13 p.

[3] KUIPERS (Lauwerens). - De asymptotische verdeling modulo 1 van de waarden van meetbare functies, Thèse Sc. math. Amsterdam, 1947.

[4] TISON (Françoise). - Comportement local d'une fonction d'une variable p-adique à valeurs p-adiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 259, 1964, p. 3154-3157.