Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Yvette Amice

Mesures p-adiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 6, n° 2 (1964-1965), exp. n° 16, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1964-1965__6_2_A7_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
6e année, 1964/65, n° 16

17 mai 1965

MESURES p-ADIQUES

par Yvette AMICE

Soient K une extension non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$, s son degré et A son anneau de valuation. Nous noterons $\omega = (\omega_1 , \ldots , \omega_s)$ une base du $\mathbf{Z}_p$-module A . On sait qu'alors l'espace E des fonctions continues sur A à valeurs dans K , muni de la norme de la convergence uniforme, admet les fonctions

$$Q_{n_1,\ldots,n_s}(x) = \binom{x_1}{n_1} \cdots \binom{x_s}{n_s} \qquad (\text{où } x = \sum_{i=1}^{s} x_i\, \omega_i\,)$$

comme base normale [1].

1. Caractères.

DÉFINITION. - Nous appellerons caractère (p-adique) de A une représentation continue du groupe additif de A dans le groupe multiplicatif des unités de $\hat{\Omega}_p$ (complété de la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$).

Si V(A) désigne l'ensemble des caractères de A , il se munit de façon évidente d'une structure de groupe, la loi (notée multiplicativement) étant définie par

$$\theta\theta'(x) = \theta(x)\ \theta'(x)\ , \qquad \forall\ x \in A\ ,\ \theta \in V(A)\ ,\ \theta' \in V(A)\ .$$

Etant donnés une base ω de A , et $\theta \in V(A)$, soit

$$\theta_i = \theta(\omega_i)\ ,\quad i = 1\ ,\ \ldots\ ,\ s\ ;$$

il est clair que nécessairement $|\theta_i - 1| < 1$. Réciproquement, si

$$(\theta_1\ ,\ \ldots\ ,\ \theta_s) \in \hat{\Omega}_p^s$$

est tel que $|\theta_i - 1| < 1$ $(i = 1\ ,\ \ldots\ ,\ s)$, la fonction

$$\theta(x) = \theta_1^{x_1} \ldots \theta_s^{x_s}$$

est un caractère de A . Nous noterons $V = \{\theta \in \hat{\Omega}_p \mid |\theta - 1| < 1\}$.

On a d'ailleurs

$$\|\theta - 1\| = \sup_{x\in A} |\theta(x) - 1| = \max_i |\theta_i - 1|\ .$$

Soit $\theta_0(x) = 1$ le caractère unité et $d(\theta , \theta')$ la distance définie sur $V(A)$ par

$$\begin{cases} d(\theta , \theta_0) = \|\theta - 1\| \\ d(\theta , \theta') = \|\theta\theta' - 1\| , \end{cases}$$

on voit donc que : Le choix d'une base $\omega = (\omega_1 , \dots , \omega_s)$ du $\underset{\sim}{Z}_p$-module A définit un isomorphisme de $V(A)$ sur V^s par

$$\theta \to (\theta_1 , \dots , \theta_s) \qquad \text{où} \quad \theta_i = \theta(\omega_i) .$$

Soit $V_k(A)$ le sous-groupe de $V(A)$ constitué des éléments d'ordre p^k et $V_\infty(A) = \bigcup_{k\geqslant 0} V_k(A)$ le groupe de torsion de $V(A)$.

PROPOSITION 1. - Le sous-espace de E engendré par $V_\infty(A)$ est dense dans E .

C'est à peu près immédiat : il suffit en effet de le montrer pour $s = 1$, et de l'en déduire pour $s > 1$ par produit tensoriel complété. Or, pour $s = 1$ et $A = \underset{\sim}{Z}_p$, soit

$$\theta \in V_k(\underset{\sim}{Z}_p) , \quad \theta \notin V_{k-1}(\underset{\sim}{Z}_p)$$

et soit $\chi_{k,\alpha}(x)$ la fonction caractéristique de $\alpha + p^k \underset{\sim}{Z}_p$. On a

(1) $$\chi_{k,0}(x) = \frac{1}{p^k} [1 + \theta(x) + \theta(2x) + \dots + \theta((p^k - 1)x)]$$

et

(2) $$\chi_{k,\alpha}(x) = \chi_{k,0}(x - \alpha) .$$

Donc le sous-espace engendré par V_k est l'espace E_k des fonctions "constantes par classes mod p^k ", d'où la densité.

2. Algèbre des mesures.

Nous appellerons espace des mesures sur A l'espace E' des formes linéaires continues sur E .

Si $\mu \in E'$ et $f \in E$, nous noterons $(\mu|f)$ ou $\int_A f(x)\, d\mu(x)$ la valeur de μ sur f .

PRODUIT TENSORIEL. - Si μ et $\nu \in E'$, leur produit tensoriel $\mu \mathbin{\hat{\otimes}} \nu$ est une forme linéaire continue sur $E \otimes E \simeq \mathcal{C}(A \times A , K)$ définie selon l'habitude par

$$\int_{A\times A} f(x)\, g(y)\, d(\mu \otimes \nu)(x , y) = \int_A f(x)\, d\mu(x) \int_A g(y)\, d\mu(y) ,$$

et prolongée par continuité. Si $\varphi(x , y) \in \mathcal{C}(A \times A , K)$, nous noterons

$$(\mu \otimes \nu \mid \varphi) = \int_{A\times A} \varphi(x , y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) .$$

PRODUIT DE CONVOLUTION. - Soient μ et $\nu \in E'$, leur produit de convolution $\mu \star \nu \in E'$ est défini par

$$(\mu \star \nu \mid f) = \int_{A\times A} f(x + y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) .$$

Il est clair que ceci munit E' d'une structure d'algèbre de Banach commutative unitaire sur K .

Si $\alpha \in A$, soit $\delta_\alpha \in E'$ la "distribution de Dirac en α " définie par $(\delta_\alpha | f) = f(\alpha)$, $\forall f \in E$. L'unité du produit de convolution est δ_0 . On a aussi $\delta_\alpha \star \delta_\beta = \delta_{\alpha+\beta}$, et le sous-espace fermé Δ' de E' , admettant $(\delta_\alpha)_{\alpha\in A}$ comme base normale, espace des "distributions", est une sous-algèbre.

3. Convolution et caractères.

Soient $\theta \in V(A)$, μ et $\nu \in E'$, on a

$$(\mu \star \nu \mid \theta) = (\mu|\theta)(\nu|\theta) .$$

L'algèbre E' est ainsi une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{B}(V(A))$ des fonctions bornées sur $V(A)$ et à valeurs dans $\hat{\Omega}_p$.

Soient $X = (X_1 , \ldots , X_s)$ des indéterminées, et soit w_s le groupe analytique sur $\hat{\Omega}_p$ défini par la loi

$$(X , Y) \to (X_i + Y_i - X_i Y_i)_{i=1,\ldots,s} .$$

L'algèbre des séries entières restreintes (à coefficients bornés, dans $\hat{\Omega}_p$) définit une algèbre de fonctions analytiques sur w_s que nous appellerons l'algèbre $\mathcal{A}_s$ des fonctions strictement analytiques sur w_s . Il est clair qu'elle s'identifie à une sous-algèbre de $\mathcal{B}(V^s)$.

Si $\omega = (\omega_1 , \ldots , \omega_s)$ est une base de A et $\mu \in E'$, soit

$$\mu_{n_1,\ldots,n_s} = (\mu|Q_{n_1,\ldots,n_s}) .$$

Alors

$$(\mu|\theta) = \sum_{(n_1,\ldots,n_s)\geqslant 0} \mu_{n_1,\ldots,n_s} (\theta_1 - 1)^{n_1} \ \ldots \ (\theta_s - 1)^{n_s} .$$

Si nous appelons algèbre des fonctions analytiques sur $V(A)$ la sous-algèbre des $\mathcal{B}(V(A))$ image de $\mathcal{A}_s$ dans l'isomorphisme ci-dessus, défini entre $V(A)$ et V^s (il est immédiat que cette image est indépendante de l'isomorphisme choisi, c'est-à-dire de la base ω), nous voyons que <u>l'algèbre</u> E' <u>est l'algèbre des fonctions analytiques sur</u> $V(A)$.

Si $\alpha = \alpha_1 \omega_1 + \dots + \alpha_s \omega_s \in A$ $(\alpha_i \in \underset{\sim}{Z}_p)$, δ_α est l'image de

$$\varphi_\alpha(X) = \sum_{(n_1,\dots,n_s)\geqslant 0} \binom{\alpha_1}{n_1} \dots \binom{\alpha_s}{n_s} X_1^{n_1} \dots X_s^{n_s}$$

et la sous-algèbre Δ' de E' est isomorphe à la sous-algèbre ayant $(\varphi_\alpha(X))_{\alpha\in A}$ comme base normale.

Remarquons que tous les isomorphismes ci-dessus sont isométriques, étant entendu que les normes "naturelles" des algèbres envisagées sont :

- le sup des coefficients pour les séries formelles restreintes ;
- la norme de la convergence uniforme sur $V(A)$ (resp. V^s) pour les fonctions bornées sur $V(A)$ (resp. V^s) ;
- la norme habituelle $\|\mu\| = \sup\limits_{\|f\|\leqslant 1} |(\mu|f)|$ dans E' .

Soit $E'_0 = \{\mu \in E' \mid \|\mu\| \leqslant 1\}$, il résulte trivialement des isomorphismes ci-dessus que

(a) $\|\mu \star \nu\| = \|\mu\| \, \|\nu\|$;

(b) $\|\mu\| = \sup\limits_{\theta\in V(A)} |(\mu|\theta)|$;

(c) $\mu \star E'_0 = E'_0 \Leftrightarrow \inf\limits_{\theta\in V(A)} |(\mu|\theta)| > 0 \Leftrightarrow \|\mu\| = |(\mu|\theta_0)|$;

(d) $|(\mu|\theta_0)| < \|\mu\| \Rightarrow \exists!\ \lambda \in E'$ telle que $\lambda \star (\delta_0 - \mu) = \delta_0$, λ étant la limite faible de $\lambda_n = \delta_0 + \mu + \mu \star \mu + \dots + \star^n \mu$.

4. Sous-algèbres de convolution et prolongement analytique.

Dans ce paragraphe, nous nous limiterons à $s = 1$, $A = \underset{\sim}{Z}_p$, pour alléger les notations.

Si $\alpha \in \underset{\sim}{Z}_p$, soit $\chi_{k,\alpha}(x)$ la fonction caractéristique de $\alpha + p^k \underset{\sim}{Z}_p$. Soit $\mu \in E'$; si $\lim\limits_{n\to\infty} (\mu|\chi_{n,\alpha})$ existe, nous dirons que c'est <u>la masse de</u> μ <u>en</u> α , et nous la noterons $m_\mu(\alpha)$.

Nous noterons M' le sous-espace de E' constitué des mesures ayant une masse en tout point de $\underset{\sim}{Z}_p$.

Soit $\delta = \sum\limits_{\alpha\in \underset{\sim}{Z}_p} \lambda_\alpha \delta_\alpha \in \Delta'$ ($\lambda_\alpha \to 0$ suivant le filtre des complémentaires des parties finies de $\underset{\sim}{Z}_p$, ou encore λ_α sommable) : alors $\delta \in M'$ et

$$m_\delta(\alpha) = \lambda_\alpha \ .$$

Si $\mu \in M'$, elle définit une "fonction masse" $m_\mu(\alpha)$ qui est bornée : on voit aisément que cette application est un isomorphisme isométrique de M' sur un sous-espace fermé de l'espace des fonctions bornées muni de la norme de la convergence uniforme.

Si $\mu \in E'$, soient $Q_n(x) = \binom{x}{n}$, $\mu_n = (\mu | Q_n)$ et

$$\varphi_\mu(X) = \sum_{n \geq 0} \mu_n X^n \ .$$

Soit V_k le groupe des racines p^k-ièmes de l'unité. On a, d'après (1) et (2) :

(3)
$$(\mu | \chi_{k,0}) = \frac{1}{p^k} \sum_{u \in V_k} \varphi_\mu(u - 1)$$

(4)
$$(\mu | \chi_{k,\alpha}) = \frac{1}{p^k} \sum_{u \in V_k} (u - 1)^{-\alpha} \varphi_\mu(u - 1) \ .$$

Soit $\varphi_\mu^k(X)$ le polynôme de degré $p^k - 1$ défini par

$$\varphi_\mu^k(u - 1) = \varphi_\mu(u - 1) \qquad \text{pour } u \in V_k \ .$$

De (3) et (4), on déduit que

$$\varphi_\mu^{(k)}(X) = \sum_{j=0}^{p^k-1} (\mu | \chi_{k,j})(1 + X)^j \ .$$

Si $\alpha \in \underset{\sim}{Z}_p$, définissons l'entier α_j par $0 \leq \alpha_j < p^j$ et $\alpha - \alpha_j \in p^j \underset{\sim}{Z}_p$, et posons

$$T_\mu^{(k)}(Y) = \varphi_\mu^{(k)}(Y - 1) = \sum_{j=0}^{p^k-1} (\mu | \chi_{k,j}) Y^j \ .$$

Dire que $\mu \in M'$ équivaut donc à dire que

(a) la suite $T_\mu^{(k)}(Y)$ converge, coefficient par coefficient, vers une série

$$T_\mu(Y) = \sum_{n \geq 0} m_\mu(n) Y^n$$

(b) si $(\mu | \chi_{k,j}) = t_{k,j}$, soit

$$T_\mu^{(k)}(Y) = \sum_{j=0}^{p^k-1} t_{k,j} Y^j \ ,$$

pour tout $\alpha \in \underset{\sim}{Z}_p$

$$\lim_{j \to \infty} t_{k,\alpha_j} = m_\mu(\alpha) \ .$$

Il est clair qu'il s'agit là d'une propriété de "prolongeabilité" pour la série $\varphi_\mu(X)$, prolongeabilité simultanée pour plusieurs matrices de sommation au sens de J. HILY [2].

Questions.

1. M' est-il une sous-algèbre de E' ? Autrement dit, le produit de deux fonctions "prolongeables" au sens précédent est-il prolongeable ?

2. On trouve assez facilement, par des considérations directes sur la définition de M' , des propriétés de $m_\mu(\alpha)$ telles que : $m_\mu(\alpha)$ est presque partout nulle (pour la mesure de Haar), partout discontinue, etc. ; ces propriétés ont-elles une expression raisonnable en termes de prolongement analytique ?

3. Peut-on construire une base normale "relativement naturelle" de M' ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

[2] HILY (Jacques). - Papiers non publiés.