Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

EMIL GROSSWALD

Une propriété des racines complexes des fonctions $L(s,\chi)$

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 6, n° 2 (1964-1965), exp. n° 15, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1964-1965__6_2_A6_0>

UNE PROPRIÉTÉ DES RACINES COMPLEXES DES FONCTIONS $L(s , \chi)$

par Emil GROSSWALD

1. - Dans l'étude de la fonction $\pi(x ; k , a) - \pi(x ; k , a')$ (différence entre le nombre des nombres premiers dans différentes progressions arithmétiques de même module k), par la méthode basée sur les théorèmes de Landau et Pólya, on est tenté d'utiliser l'équation

$$(1) \qquad \Psi(s) = \frac{1}{s\varphi(k)} \sum_{\chi \in K} (\overline{\chi}(a) - \overline{\chi}(a')) \log L(s , \chi) = \int_2^\infty \frac{f(x , a) - f(x , a')}{x^{s+1}} dx .$$

Ici, et dans tout ce qui suit, $(a , k) = (a' , k) = 1$, $a \not\equiv a'$,

$$f(x , a) = f_k(x , a) = \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m} \pi(x^{1/m} ; k , a^{1/m}) = \sum_{\substack{p^m \leq x \\ p^m \equiv a}}{}' \frac{1}{m}$$

et

$$L(s , \chi) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \quad \text{pour} \quad s = \sigma + it \quad \text{avec} \quad \sigma > 1 ;$$

$\chi(n)$ est un caractère (mod k) , $\chi_0(n)$ le caractère principal. Toute congruence sans indication de module s'entend, et s'entendra, modulo k , l'accent de la somme veut dire que s'il y a un dernier terme $a \equiv p^m = x$, alors, dans la somme, on compte le terme correspondant pour moitié et $K = \{\chi \mid \chi(a) \neq \chi(a')\}$; bien entendu, $\chi_0 \notin K$. Enfin, $\varphi(k)$ est l'indicateur d'Euler.

La méthode pour établir l'équation (1) est bien connue ; la relation ci-après est également classique (*) :

$$f(x , a) = \pi(x , a) + \frac{1}{2} \sum_{b^2 \equiv a} \pi(x^{1/2} , b) + \sum_{m \geq 3} \frac{1}{m} \pi(x^{1/m} , a^{1/m})$$

$$= \pi(x , a) + \frac{1}{2} \sum_{b^2 \equiv a} \pi(x^{1/2}) + O(x^{1/2} \exp(- c\sqrt{\log x})) ,$$

de sorte que $f(x , a)$ est une approximation de $\pi(x , a)$ suffisante pour que l'on puisse se servir de (1) dans le but indiqué.

(*) Ici, et dans la suite, on supprime la référence à k (lequel est fixe) pour alléger les notations.

Les difficultés que l'on rencontre dans cette étude proviennent surtout de l'incertitude dans laquelle on se trouve, en ce qui concerne les positions des zéros non triviaux des fonctions $L(s, \chi)$.

Supposons d'abord que toutes les $\varphi(k)$ fonctions $L(s, \chi)$ soient telles que $L(s, \chi) \neq 0$ pour s réel, $0 < s < 1$. Alors $\Psi(s)$ aussi est holomorphe pour $0 < s < 1$. Supposons encore que $\Psi(s)$ ait des singularités complexes $\rho = \sigma + it$ $(0 \leqslant \sigma < 1, \ t \neq 0)$, formant un ensemble dénombrable non vide Σ, et soit $\theta = \theta_k = \limsup_{\rho=\sigma+it\in\Sigma} \sigma$. Alors on constate que $\Psi(s)$ a les propriétés suivantes :

(a) $\Psi(s)$ est holomorphe pour $\sigma > \theta$;

(b) $\Psi(s)$ n'est holomorphe dans aucun demi-plan $\sigma > \theta - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$;

(c) $\Psi(s)$ est holomorphe en $s = \theta$.

Un théorème bien connu de LANDAU [1] nous permettra alors de conclure que la différence $f(x, a) - f(x, a')$ change de signe pour une suite $\{x_n\}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.
Sous certaines conditions, cela nous permet de conclure que $\pi(x; k, a) - \pi(x; k, a')$ $(a \neq a')$ aussi change de signe pour des valeurs arbitrairement grandes de x.

2. - Pour pouvoir obtenir cette conclusion, nous venon de faire deux suppositions. On vérifie sans peine, que les deux conditions suivantes, bien moins fortes, suffisent déjà pour garantir que la fonction $\Psi(s)$ possède les propriétés (a), (b), (c) requises pour l'utilisation du théorème de Landau :

1° La fonction définie par

$$\log L(s) = \log L(s ; a, a') = \sum_{\chi\in K} (\overline{\chi}(a) - \overline{\chi}(a')) \log L(s, \chi),$$

soit

$$L(s) = \prod_{\chi\in K} \{L(s, \chi)\}^{\overline{\chi}(a)-\overline{\chi}(a')}$$

est telle que l'ensemble

$$\Sigma = \{\rho = \sigma + it \mid L(\rho) = 0 \ \text{ou} \ L(\rho)^{-1} = 0, \ \sigma \geqslant 0, \ t \neq 0\}$$

n'est pas vide.

2° Si $\theta = \theta(k, a, a') = \limsup_{\sigma+it\in\Sigma} \sigma$, alors $L(s) \neq 0$, $L^{-1}(s) \neq 0$ pour $s \geqslant \theta$ $(s \in \mathbb{R})$.

Si l'on vérifie que la condition 1° est satisfaite, on peut modifier, le cas échéant, la fonction $\Psi(s)$, de sorte que la condition 2° soit aussi satisfaite.

En effet, si $\operatorname{Re} z > 0$,

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^{z+1} \log z} = \log \frac{1}{z} + \varphi(z) \ ,$$

où $\varphi(z)$ est une fonction entière. Donc, en choisissant convenablement les constantes c_j , et avec $\varphi_0(s)$ fonction entière,

$$\begin{aligned} \Psi_1(s) &= \Psi(s) - \sum_{j=1}^{r} \frac{c_j}{\sigma_j} \log \frac{1}{s - \sigma_j} - \varphi_0(s) \\ &= \int_2^\infty \Big(f(x\ ,\ a) - f(x\ ,\ a') - \sum_{j=1}^{r} \frac{c_j}{\sigma_j} \frac{x^{\sigma_j}}{\log x} \Big) x^{-s-1}\, dx \end{aligned}$$

sera holomorphe pour $s \geqslant \theta$ $(s \in \underset{\sim}{R})$.

3. - Il nous reste toujours à montrer que la première condition est satisfaite, quels que soient k , a et a' . Cette condition 1° peut être formulée aussi de la manière suivante : Soit $m_\rho(\chi)$ la multiplicité de ρ , considérée comme zéro de $L(s\ ,\ \chi)$. Alors

$$m(\rho) = m(\rho\ ,\ a\ ,\ a') = \sum_{\chi \in K} (\overline{\chi}(a) - \overline{\chi}(a'))\, m_\rho(\chi)$$

sera appelée la multiplicité de ρ comme zéro (ou pôle) de $L(s)$. Evidemment, pour $m(\rho)$, il y a les trois possibilités $m(\rho) > 0$, $m(\rho) < 0$, $m(\rho) = 0$, et les $m(\rho)$ $(\in \underset{\sim}{R})$ ne sont pas nécessairement des entiers.

Ce qu'il faut montrer, c'est que, pour tout triplet k , a , a' donné, on ne peut avoir $m(\rho) = 0$ pour tous les ρ . En effet, nous allons prouver le résultat suivant un peu plus fort.

THÉORÈME. - <u>Quels que soient les entiers positifs</u> k , a , a' , $(k\ ,a) = (k\ ,a') = 1$, $a \not\equiv a'$, <u>il y a une infinité dénombrable de nombres complexes</u> $\rho_\nu = \sigma_\nu + it_\nu$, $0 \leqslant \sigma_\nu < 1$, $t_\nu \neq 0$, <u>tels que</u>

$$m(\rho_\nu) = \sum_{\chi \in K} (\overline{\chi}(a) - \overline{\chi}(a'))\, m_{\rho_\nu}(\chi) \neq 0 \ .$$

Pour démontrer le théorème, nous n'avons qu'à imiter l'une des démonstrations de l'existence des zéros non triviaux de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, et faire une construction analogue pour la fonction $L(s)$.

4. - Afin d'éviter certaines difficultés techniques, dues au fait que les fonctions précédemment considérées ne sont pas uniformes, il convient de prendre comme point de départ plutôt la fonction

$$\Phi(s) = \frac{1}{s\varphi(k)} \sum_{\chi \in K} (\overline{\chi}(a) - \overline{\chi}(a')) \frac{L'}{L}(s, \chi) = \int_1^\infty \frac{\psi(x, a') - \psi(x, a)}{x} x^{-s} dx ,$$

avec $\psi(x, a) = \psi_k(x, a) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a}}' \Lambda(x)$.

$\Phi(s)$ est une fonction méromorphe. Elle a comme pôles de premier ordre, les zéros $\rho = \sigma + it$ $(0 < \sigma < 1)$ des fonctions $L(s, \chi)$, pour lesquels $m(\rho) \neq 0$; en effet, $m(\rho)$ est le résidu correspondant au pôle ρ . En $s = 0$, $\Phi(s)$ peut avoir un pôle d'ordre 2 au plus (car $L(0, \chi) = 0$ si $\chi(-1) = 1$). Enfin, $\Phi(s)$ aura peut-être des pôles simples, provenant des zéros triviaux des $L(s, \chi)$, aux entiers négatifs.

Comme on a déjà vu, on ne peut pas exclure la possibilité que $L(\sigma, \chi) = 0$, pour un σ vérifiant $0 < \sigma < 1$. Pour nous débarrasser de ces zéros réels, observons que $\int_1^\infty x^{-s+\sigma_j-1} dx = \frac{1}{s - \sigma_j}$. Donc, en choisissant convenablement les constantes c_j $(1 \leq j \leq r < \infty)$,

$$\Phi_1(s) = \Phi(s) - \sum_{j=1}^{r} \frac{c_j}{s - \sigma_j} = \int_1^\infty \Big(\psi(x, a) - \psi(x, a') - \sum_{j=1}^{r} c_j x^{\sigma_j}\Big) x^{-s-1} dx$$

sera holomorphe pour $s \in \underset{\sim}{R}$, $s > 0$.

En ce qui concerne l'origine, $s = 0$ est un zéro des $L(s, \chi)$ avec $\chi(-1) = 1$. Si $\nu_2(\chi)$ est sa multiplicité, alors dans un voisinage de $s = 0$, $\frac{L'}{L}(x, \chi)$ possède le développement en série de Laurent

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = \frac{\nu_2(\chi)}{s} + \nu_1(\chi) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n .$$

Par conséquent,

$$\Phi_1(s) = \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_1}{s} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n \quad \text{avec} \quad A_\lambda = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \in K} \nu_\lambda(\chi)(\overline{\chi}(a) - \overline{\chi}(a')) ,$$

la série étant convergente pour $|s|$ suffisamment petit. Comme $\int_1^\infty x^{-s-1} \log x \, dx = \frac{1}{s^2}$,

$$\Phi_1(s) - \frac{A_2}{s^2} - \frac{A_1}{s} = \int_1^\infty \Big(\psi(x - a') - \psi(x, a) - \sum_{j=1}^{r} c_j x^{\sigma_j} - A_2 \log x - A_1\Big) x^{-s-1} dx$$

n'a plus de pôle en $s = 0$. Compte tenu des propriétés de $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$ n'a donc aucun pôle réel > -1 .

5. - L'inversion de l'intégrale de Mellin-Laplace donne :

(2) $$F(x) \underset{\text{déf}}{=} \psi(x\ ,\ a') - \psi(x\ ,\ a) - \sum_{j=1}^{r} c_j\, x^{\sigma_j} - A_2 \log x - A_1$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{c-iT}^{c+iT} \Phi_2(s)\, x^s\, ds \qquad (c > 1)\ .$$

Supposons maintenant, contrairement à l'énoncé du théorème, que l'ensemble Σ soit fini, constitué par N éléments ρ_i $(1 \leqslant i \leqslant N\ ,\ 0 \leqslant N < \infty)$. La fonction $\Phi_2(s)$ est une fonction méromorphe, ayant comme pôles, dans $\sigma > -1$, précisément l'ensemble Σ , supposé fini. De cette supposition, nous allons déduire une contradiction, en montrant qu'il en résulterait

(3) $$F(x) = g(x) + o(x^{-\frac{1}{2}})$$

où $g(x)$ est une fonction continue. En effet, en combinant ceci avec (2), on obtient $\psi(x\ ,\ a') - \psi(x\ ,\ a) = G(x) + o(x^{-\frac{1}{2}})$, où $G(x)$ est une fonction continue. Pourtant, ceci n'est pas possible, car $\psi(x\ ,\ a') - \psi(x\ ,\ a)$ a des discontinuités égales à $\log x$ chaque fois que $x = p \equiv a$ ou $x = p \equiv a'$, tandis que les discontinuités du second membre sont $o(x^{-\frac{1}{2}})$. La démonstration du théorème se réduit donc à l'évaluation de l'intégrale dans (2).

Pour effectuer cette évaluation, considérons le rectangle $\mathcal{R}$ de côtés parallèles aux axes des coordonnées, d'abscisses $c = 1 + \frac{1}{\log x}$ et $c' = -\frac{3}{4}$ et d'ordonnées $\pm\ T$.

Par le théorème des résidus, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{R}} \Phi_2(s)\, x^s\, ds = \sum_{i=1}^{N} r_i\, x^{\rho_i}$, où les ρ_i sont les N $(< \infty)$ éléments de Σ et $r_i = \{\text{Res}\ \Phi_2(s)\}_{s=\rho_i}$. Nous allons démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION. - <u>A tout</u> x <u>donné, nous pouvons associer un</u> T , <u>tel que</u> :

(i) $$F(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \Phi_2(s)\, x^s\, ds = R(x\ ,\ T) = O(x^{-1} \log^2 x)$$

(ii) $$\left| \int_{c+iT}^{c'+iT} + \int_{c'+iT}^{c'-iT} + \int_{c'-iT}^{c-iT} \Phi_2(s)\, x^s\, ds \right| \leqslant 2I + J\ ,$$ <u>avec</u>

$$I = \left| \int_{c+iT}^{c'+iT} \Phi_2(s)\, x^s\, ds \right| = \left| \int_{c'-iT}^{c-iT} \Phi_2(s)\, x^s\, ds \right| = O(x^{-1} \log x)$$

<u>et</u>

$$J = \left| \int_{c'-iT}^{c'+iT} \Phi_2(s)\, x^s\, ds \right| = O(x^{-3/4} \log^2 x)\ .$$

Il en résulte que

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \Phi_2(s)\ x^s\ ds + O(x^{-1}\ \log^2 x)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{R}} \Phi_2(s)\ x^s\ ds + O(x^{-3/4}\ \log^2 x) + O(x^{-1}\ \log^2 x) = \sum_{i=1}^{N} r_i\ x^{\rho_i} + o(x^{-\frac{1}{2}})\ ,$$

soit (3) avec $g(x) = \sum_{i=1}^{N} r_i\ x^{\rho_i}$.

La démonstration du théorème sera donc complète, dès que nous aurons démontré la proposition.

6. - La fonction $\Phi_2(s)$ est une somme finie de fonctions appartenant aux types suivants :

$$f_1(s) = \frac{1}{s}\frac{L'}{L}(s\ ,\ \chi)\quad (\chi \neq \chi_0)\ ;\quad f_2(s) = \frac{1}{s - \sigma_j}\quad \text{et}\quad f_3(s) = s^{-2}$$

(la fonction s^{-1} qui intervient aussi, peut être considérée comme cas particulier de $f_2(s)$ avec $\sigma_j = 0$). Pour chacun de ces types $f_n(s)$, il faut trouver des bornes supérieures pour

$$R_n = R_n(x\ ,\ T) = \left|\lim_{U\to\infty}\int_{c-iU}^{c+iU} f_n(s)\ x^s\ ds - \int_{c-iT}^{c+iT} f_n(s)\ x^s\ ds\right|\ ,$$

et pour

$$I_n = \left|\int_{c+iT}^{c'+iT} f_n(s)\ x^s\ ds\right| \quad \text{et} \quad J = \left|\int_{c'-iT}^{c'+iT} f_n(s)\ x^s\ ds\right|\ .$$

Pour R_1 , on sait (voir [2], p. 229) que, pour un x donné,

$$R_1 = O(\tfrac{x}{T}(\log^2 x + \log^2 T))\ ,$$

la constante sous-entendue par le symbole O dépendant du caractère arithmétique de x (entier ou non), mais pas de sa grandeur.

Ensuite,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}(s - \sigma_j)^{-1}\ x^s\ ds = \frac{x^{\sigma_j}}{2\pi i}\int_{c-\sigma_j-iT}^{c-\sigma_j+iT} s^{-1}\ x^s\ ds = x^{\sigma_j}\Big(1 + O(\frac{x^{c-\sigma_j}}{T\ \log x})\Big)\ ,$$

de sorte que $R_2 = O(\frac{x^c}{T\ \log x}) = O(\frac{x}{T\ \log x})$, car $c = 1 + \frac{1}{\log x}$, et de même $R_3 = O(\frac{x}{T})$. Par conséquent, $R = O(\max_n R_n) = O(x^{-1}\ \log^2 x)$ pourvu que l'on choisisse (comme nous le ferons) $T > [x^2]$. Ceci achève la démonstration de (i).

Pour estimer I_n , nous avons besoin du lemme suivant :

LEMME. - A tout entier $m \geqslant 2$ et à tout entier $k \geqslant 1$ correspond un $T_m = T_m(k)$ avec $m < T_m < m + 1$, tel que

$$\left|\frac{L'}{L}(\sigma \pm iT_m , \chi)\right| < c(k) \log^2 T_m$$

uniformément dans $-1 \leqslant \sigma \leqslant 2$, quel que soit le caractère $\chi(n)$ modulo k , la constante $c(k)$ étant indépendante de χ et de m .

Pour démontrer ce lemme, on procède essentiellement comme dans [2], p. 226. Pourtant, au lieu de considérer seulement deux fonctions $L(s , \chi)$, on considère à la fois toutes les $\varphi(k)$ fonctions. Le nombre $j = j(m)$ de tous les zéros $\rho = \sigma + it$, de toutes ces fonctions, avec $m \leqslant t \leqslant m + 1$, vérifie une inégalité de la forme $j \leqslant c_0 \varphi(k) \log km$, c_0 étant une constante absolue. Donc, si l'on divise l'intervalle $[m , m + 1]$ en $j + 1$ parties égales, il y a au moins un intervalle sans aucune racine. Choisissons T_m au centre d'un tel intervalle. Alors, si $\rho = \sigma + it$ est un zéro, avec $m \leqslant t \leqslant m + 1$,

$$|t - T_m| > \frac{c_1(k)}{\log km} , \qquad \frac{1}{|t - T_m|} < c_2(k) \log km$$

et, d'après un résultat classique,

$$\left|\frac{L'}{L}(\sigma + iT_m , \chi)\right| \leqslant \sum_{|t-T_m|\leqslant 1} \frac{1}{|\sigma + iT_m - \rho|} + O(\log kT_m)$$

$$\leqslant c_2(k) \log km \cdot c_0 \varphi(k) \log km + c_1 \log kT_m < c(k) \log^2 T_m ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

A l'aide du lemme, nous trouvons immédiatement que

$$I_1 \leqslant \int_{c'}^{c} T_m^{-1} \log^2 T_m \, x^\sigma \, d\sigma = O\left(\frac{x \log^2 T_m}{T_m \log x}\right) .$$

Pour tout x donné, soit $m = [x^2]$; alors $[x^2] < T_m < [x^2] + 1$ et $I_1 = O(x^{-1} \log x)$. Le calcul des autres I_n est classique et, pour le même choix de T_m , on trouve $I_n = O(I_1)$; donc, $I = O(\max_n I_n) = O(x^{-1} \log x)$.

Enfin,

$$J_1 = \left|\int_{-c'-iT_m}^{-c'+iT_m} \frac{1}{s} \frac{L'}{L}(s , \chi) x^s \, ds\right|$$

se calcule à l'aide de l'inégalité $\left|\frac{L'}{L}(s , \chi)\right| < c \log(k(|s| + 2))$ (voir [2], (4.12), p. 227) car $\sigma < -\frac{1}{2}$, $|s - n| > \frac{1}{4}$ $(n = 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ \ldots)$; on trouve que

$$J_1 = O\left\{\int_1^{T_m} \frac{\log t}{t}\, x^{-3/4}\, dt\right\} = O(x^{-3/4} \log^2 T_m) = O(x^{-3/4} \log^2 x)$$

avec le même choix de T_m comme avant. Des calculs élémentaires donnent

$$J_2 = O\left(\int_1^{T_m} x^{-3/4} \frac{dt}{t}\right) = O(x^{-3/4} \log T_m) = O(x^{-3/4} \log x)$$

et de même, $J_3 = O(x^{-3/4})$; donc,

$$J = O(\max_n J_n) = O(x^{-3/4} \log^2 x) \ .$$

Ainsi, $2I + J = O(x^{-3/4} \log^2 x)$ et **(ii)** est démontrée. Ceci termine la démonstration de la proposition, donc du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LANDAU (Edmund). - Über einen Satz von Tschebyschef, Math. Annalen, t. 61, 1905, p. 527-550.

[2] PRACHAR (Karl). - Primzahlverteilung. - Berlin, Springer-Verlag, 1957 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 91).