JEAN FRESNEL

Congruences entre les nombres de Bernoulli

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 6, n° 2 (1964-1965), exp. n° 14, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1964-1965__6_2_A5_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
6e année, 1964/65, n° 14

3 mai 1965

CONGRUENCES ENTRE LES NOMBRES DE BERNOULLI

par Jean FRESNEL

1. Introduction.

Les nombres de Bernoulli sont liés par la congruence de Kummer ([1], chapitre 14) suivante :

Si p est un nombre premier, si $n - 1 \geqslant k$, $n \not\equiv 0 \mod p - 1$,

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \frac{b_{n+j(p-1)}}{n + j(p-1)} \equiv 0 \mod p^k \quad .$$

Nous obtenons comme cas particulier :

$$\frac{b_n}{n} \equiv \frac{b_{n+(p-1)}}{n + (p-1)} \mod p \qquad \text{si} \quad n \not\equiv 0 \mod p - 1 \quad .$$

Nous avons généralisé (théorème 1 si $n \not\equiv 0 \mod p - 1$, et théorème 2 si $n \equiv 0 \mod p - 1$) cette relation en une congruence $\mod p^k$.

Il s'avère en fait que la recherche de congruences sur les nombres de Bernoulli B_χ^n , relatifs à un caractère χ , est plus aisée que celle sur les nombres de Bernoulli ordinaires. C'est pourquoi nous introduirons au paragraphe 2 un caractère θ de conducteur p (si $p \neq 2$, sinon de conducteur 4).

Alors les congruences entre les nombres de Bernoulli ordinaires s'obtiendront trivialement en remplaçant, dans les relations, χ par le caractère χ_0 de conducteur 1 (théorème 1' et théorème 2').

2. Le caractère θ .

(a) Définition des caractères. - Soient $\underset{\sim}{Z}$ l'anneau des entiers naturels, $\underset{\sim}{Q}_p$ le corps p-adique élémentaire, $\underset{\sim}{Z}_p$ son anneau de valuation, et Ω_p la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$.

Soit U le groupe des racines de l'unité, plongé dans Ω_p . Le corps Ω_p sera muni de la valuation ω , normalisée par $\omega(p) = 1$.

Soit $(\underset{\sim}{Z}/m)^*$ le groupe multiplicatif des entiers modulo m , premiers avec m . Un caractère χ de $(\underset{\sim}{Z}/m)^*$ est un homomorphisme de ce groupe dans U . En fait, χ sera considéré comme une application de $\underset{\sim}{Z}$ dans Ω_p définie par :

$$\chi(a) = 0 \qquad \text{si} \quad (a\,,\,m) \neq 1 \;,$$

$$\chi(a) = \chi(\bar{a}) \qquad \text{si} \quad (a\,,\,m) = 1 \;, \quad \bar{a} = \text{classe de } a \bmod m \;.$$

L'entier m est le conducteur de χ, et nous le noterons $f(\chi)$ ou f.

Nous noterons par $\operatorname{car}(\underset{\sim}{Z}/m)^*$ le groupe des caractères de $(\underset{\sim}{Z}/m)^*$, et par χ_0 l'élément neutre de ce groupe.

(b) Définition du caractère θ. - Si $p \neq 2$, posons $\theta(a) = \lim_{n\to\infty} a^{p^n}$ (limite p-adique), $\theta(a)$ est le représentant multiplicatif de $\bar{a}$ (classe de a mod p), ainsi $(\theta(a))^p = \theta(a)$. Le caractère θ est de conducteur p et engendre un groupe cyclique d'ordre $p - 1$.

Si $p = 2$, posons :

$$\theta(a) = 1 \qquad \text{si} \quad a \equiv 1 \mod 4 \;,$$

$$\theta(a) = -1 \qquad \text{si} \quad a \equiv -1 \mod 4 \;,$$

$$\theta(a) = 0 \qquad \text{si} \quad 2 \text{ divise } a \;.$$

θ est un caractère de conducteur 4 et engendre un groupe cyclique d'ordre 2. θ^2 est le caractère identique de conducteur 2.

3. Les nombres de Bernoulli relatifs à un caractère.

(a) Définition. - Les nombres de Bernoulli relatifs à un caractère χ sont définis comme les coefficients B_χ^n de la série formelle :

$$(1) \qquad \sum_{\mu=1}^{f(\chi)} \chi(\mu)\,\frac{te^{\mu t}}{e^{ft}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_\chi^n \frac{t^n}{n!} \;.$$

(b) Relation de récurrence. - Soit λ un entier positif :

$$\sum_{\mu=1}^{\lambda f} \chi(\mu)\,\frac{te^{\mu t}}{e^{\lambda ft}-1} = \sum_{\mu=1}^{f} \chi(\mu)\; te^{\mu t}\Big(\frac{1 + e^{ft} + \dots + e^{(\lambda-1)ft}}{e^{\lambda ft}-1}\Big) = \sum_{\mu=1}^{f} \chi(\mu)\,\frac{te^{\mu t}}{e^{ft}-1},$$

par conséquent :

$$(2) \qquad \sum_{\mu=1}^{\lambda f} \chi(\mu)\; te^{\mu t} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} B_\chi^n \frac{t^n}{n!}\Big)(e^{\lambda ft} - 1) \;,$$

$$(3) \qquad \frac{(B_\chi + \lambda f)^{n+1} - B_\chi^{n+1}}{n+1} = \sum_{\mu=1}^{\lambda f} \chi(\mu)\,\mu^n \;, \qquad \forall\, \lambda \text{ entier positif} \;.$$

La notation $(B_\chi + \lambda f)^{n+1}$ signifie

$$(B_\chi + \lambda f)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} B_\chi^i (\lambda f)^{n+1-i} .$$

(c) Parité.

$$\sum_{\mu=1}^{f} \frac{-\chi(\mu)\, te^{-\mu t}}{e^{-ft}-1} = \sum_{\mu'=0}^{f-1} \frac{\chi(f-\mu')\, te^{\mu' t}}{e^{ft}-1} = \sum_{\mu'=1}^{f} \frac{\chi(-\mu')\, te^{\mu' t}}{e^{ft}-1} \qquad \text{si } \chi \neq \chi_0 .$$

Si χ est pair ($\chi \neq \chi_0$ tel que $f(\chi_0) = 1$), $B_\chi^n = 0$ si n est impair.

Si χ est impair, $B_\chi^n = 0$ si n est pair.

Si $\chi = \chi_0$ et $f(\chi_0) = 1$, $B_\chi^n = 0$ si n est impair et $n > 1$.

Lorsqu'un nombre premier p figurera dans une relation, il sera implicite que le caractère θ utilisé sera celui relatif à ce nombre premier défini au paragraphe 2.

PROPOSITION 1. - Pour tout entier n non négatif,

$$B^n_{\chi\theta^0} = B_\chi^n (1 - \chi(p)\, p^{n-1}) .$$

Preuve.

Si p divise $f(\chi)$, $\chi\theta^0 = \chi$ et $\chi(p) = 0$, la proposition est triviale.

Si p ne divise pas $f(\chi)$, $\chi\theta^0$ a pour conducteur pf , et nous écrivons alors la relation (2) de définition des nombres de Bernoulli $B^n_{\chi\theta^0}$:

$$\sum_{\mu=1}^{pf} \chi\theta^0(\mu) \frac{te^{\mu t}}{e^{pft}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B^n_{\chi\theta^0} \frac{t^n}{n!} ,$$

or, $$\sum_{\mu=1}^{pf} \chi\theta^0(\mu) \frac{te^{\mu t}}{e^{pft}-1} = \sum_{\mu=1}^{pf} \frac{\chi(\mu)\, te^{\mu t}}{e^{pft}-1} - \frac{\chi(p)}{p} \sum_{\mu=1}^{f} \chi(\mu) \frac{(pt)\, e^{\mu(pt)}}{e^{f(pt)}-1} .$$

Utilisons les relations (1) et (2),

$$\sum_{n=0}^{\infty} B^n_{\chi\theta^0} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} B_\chi^n \frac{t^n}{n!} - \frac{\chi(p)}{p} \sum_{n=0}^{\infty} B_\chi^n \frac{p^n t^n}{n!} ,$$

Soit $B^n_{\chi\theta^0} = B_\chi^n (1 - \chi(p)\, p^{n-1})$.

4. Congruences entre les nombres de Bernoulli.

PROPOSITION 2. - Si p divise le conducteur du caractère χ , alors

$$\omega(fB_\chi^n) \geqslant 0 \quad .$$

Preuve. - La relation (3) se développe sous la forme

$$fB_\chi^n + \sum_{j=2}^{n+1} \binom{n}{j-1} \frac{f^{j-1}}{j} (fB_\chi^{n-j+1}) = \sum_{\mu=1}^{f} \chi(\mu)\, \mu^n \quad .$$

La démonstration par récurrence est immédiate, puisque $\omega(\frac{f^{j-1}}{j}) \geqslant 0$.

NOTATION. - Posons

$$S_\chi^n(fp^k) = \sum_{\mu=1}^{fp^k} \chi(\mu)\, \mu^n \quad .$$

k est un entier non négatif.

PROPOSITION 3. - Si p divise $f(\chi)$, si $\alpha = \omega(f)$, si $p > 3$, $k \geqslant 0$,

$$\frac{B_\chi^n}{n} \equiv \frac{S_\chi^n(fp^k)}{n.f.p^k} \mod p^{k+\alpha} \quad .$$

La relation reste vraie pour $p = 2$ et $p = 3$, si $k \geqslant 1$.

Preuve. - La relation (3) se développe sous la forme

$$\frac{B_\chi^n}{n} + \sum_{j=3}^{n+1} \binom{n-1}{j-2} \frac{f^{j-3}\, p^{(j-2)k}}{(j-1)j} (fB_\chi^{n-j+1})\ fp^k = \frac{S_\chi^n(fp^k)}{n.f.p^k} \quad .$$

Il suffit alors de remarquer que $\omega(\frac{f^{j-3}\, p^{(j-2)k}}{(j-1)j}) \geqslant 0$ pour $3 \leqslant j \leqslant n+1$, et d'utiliser la proposition 2.

PROPOSITION 4. - Si p divise $f(\chi)$, si m est entier et $(m , f) = 1$, si $k \geqslant 1$ et si $\alpha = \omega(f)$,

$$\text{pour } p \neq 2 : \quad (\chi(m)\, m^n - 1) \frac{B_\chi^n}{n} \equiv \sum_{a=1}^{fp^k} \chi(a)\, g_a\, a^{n-1} \mod p^{k+\alpha} \quad ,$$

$$\text{pour } p = 2 : \quad (\chi(m)\, m^n - 1) \frac{B_\chi^n}{n} \equiv \sum_{a=1}^{fp^k} \chi(a)\, g_a\, a^{n-1} \mod p^{k+\alpha-1} \quad ,$$

$g_a \equiv -\frac{a}{fp^k} \mod m$, g_a est entier et $0 \leqslant g_a < m$.

Preuve.

$$\{1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ fp^k\} = \{\frac{g_a\ fp^k + a}{m}\}_{1\leqslant a\leqslant fp^k}\ ;$$

en effet : $0 < \frac{g_a\ fp^k + a}{m} \leqslant fp^k$ et $\frac{g_a\ fp^k + a}{m} \in \mathbb{Z}$, et l'application $a \longrightarrow \frac{g_a\ fp^k + a}{m}$ est injective et par conséquent surjective.

$$S^n_\chi(fp^k) = \sum_{a=1}^{fp^k} \chi(a)\ a^n = \sum_{a=1}^{fp^k} \chi(\frac{g_a\ fp^k + a}{m})(\frac{g_a\ fp^k + a}{m})^n\ ,$$

soit

$$\chi(m)\ m^n\ S^n_\chi(fp^k) = \sum_{a=1}^{fp^k} \chi(a)(a + g_a\ fp^k)^n\ ,$$

et

$$(\chi(m)\ m^n - 1)\ \frac{S^n_\chi(fp^k)}{n.f.p^k} = \sum_{a=1}^{fp^k} \chi(a)\ a^{n-1}\ g_a + \sum_{j=2}^{n} \frac{\binom{n}{j}\ f^{j-1}\ p^{(j-1)k}}{n}\ (\sum_{a=1}^{fp^k} \chi(a)\ a^{n-j}\ g_a^j)\ ,$$

or,

$$\frac{\binom{n}{j}}{n}\ f^{j-1}\ p^{(j-1)k} = \binom{x-1}{j-1}\ \frac{f^{j-2}\ p^{(j-2)k}}{j}\ fp^k \equiv 0 \mod p^{\alpha+h} \quad \text{si}\ \ p \neq 2\ ,$$
$$\text{sinon}\ \mod p^{\alpha+k-1}\ ,$$

ainsi,

$$(\chi(m)\ m^n - 1)\ \frac{S^n_\chi(fp^k)}{n.f.p^k} \equiv \sum_{a=1}^{fp^k} \chi(a)\ a^{n-1}\ g_a \mod p^{\alpha+h} \quad \text{si}\ \ p \neq 2\ ,$$
$$\text{sinon}\ \mod p^{\alpha+k-1}\ .$$

En utilisant la proposition (3), la relation est démontrée.

THÉORÈME 1. - Si $n \equiv n' \mod p^k$, $k \geqslant 0$, si $\chi\theta^0 \neq \chi_0$:
(i) Si $p \neq 2$, et si l'ordre de $\chi\theta^0 \neq p^\varkappa$, alors

$$\frac{B^n_{\chi\theta^{-n}}}{n} \equiv \frac{B^{n'}_{\chi\theta^{-n'}}}{n'} \mod p^{k+1}\ .$$

(ii) Si $p \neq 2$ et 3 , si l'ordre de $\chi\theta^0 = p^\varkappa$, si $f(\chi\theta^0) = f_0\ p^r$, $(f_0\ ,p) = 1$, si $\chi\theta^0 = \chi_1 \cdot \chi_2$, où $\chi_1 \in \mathrm{car}(\mathbb{Z}/p^r)^*$ et $\chi_2 \in \mathrm{car}(\mathbb{Z}/f_0)^*$, si $\chi_2 \neq \chi_0$, alors

$$\frac{B^n_{\chi\theta^{-n}}}{n} \equiv \frac{B^{n'}_{\chi\theta^{-n'}}}{n'} \mod p^{k+1}\ .$$

(iii) Si $p \neq 2$, si l'ordre de $\chi\theta^0 = p^{\varkappa}$, si $\chi\theta^0 = \chi_1 \chi_0$, $\chi_1 \in \mathrm{car}(\underset{\sim}{Z}/p^r)^*$, $\chi_0 \in \mathrm{car}(\underset{\sim}{Z}/f_0)^*$, alors

$$\frac{B^n_{\chi\theta^{-n}}}{n} \equiv \frac{B^{n'}_{\chi\theta^{-n'}}}{n'} \mod p^{k+1-(2/\varphi(p^{\varkappa}))} .$$

(iv) Si $p = 2$,

$$\frac{B^n_{\chi\theta^{-n}}}{n} \equiv \frac{B^{n'}_{\chi\theta^{-n'}}}{n'} \mod p^k .$$

Preuve.

(i) Utilisons la proposition 4 pour n et n' , $\chi\theta^0$, mod p^{k+2} , et soustrayons membre à membre, il vient :

$$(4) \quad \begin{aligned} &(\chi\theta^0(m)(\tfrac{m}{\theta(m)})^n - 1)(\frac{B^n_{\chi\theta^{-n}}}{n} - \frac{B^{n'}_{\chi\theta^{-n'}}}{n'}) + \chi\theta^0(m)(\tfrac{m}{\theta(m)})^n (1 - (\tfrac{m}{\theta(m)})^{n'-n}) \frac{B^{n'}_{\chi\theta^{-n'}}}{n'} \\ &\equiv \sum_{a=1}^{fp^{k+2}} \chi\theta^{-1}(a)\ g_a(\tfrac{a}{\theta(a)})^{n-1}\ (1 - (\tfrac{a}{\theta(a)})^{n'-n}) \mod p^{k+2} . \end{aligned}$$

Puisque l'ordre de $\chi\theta^0 \neq p^{\varkappa}$, il existe m tel que $\omega(\chi\theta^0(m) - 1) = 0$, la proposition 4 montre alors que $\omega(\frac{B^{n'}_{\chi\theta^{-n'}}}{n'}) \geqslant 0$; d'autre part si $(a , p) = 1$, $1 - (\frac{a}{\theta(a)})^{n'-n} \equiv 0 \mod p^{k+1}$, et par conséquent

$$\frac{B^n_{\chi\theta^{-n}}}{n} - \frac{B^{n'}_{\chi\theta^{-n'}}}{n'} \equiv 0 \mod p^{k+1} .$$

(ii) Il existe m_0 , tel que $\chi_2(m_0) \neq 1$, pour tout k tel que

$$(m_0 + kf_0 , p) = 1 ,$$

$$\chi_1\ \chi_2(m_0 + kf_0) = \chi_1(m_0 + kf_0)\cdot\chi_2(m_0) \neq 1 .$$

Comme $(f_0 , p) = 1$, chaque classe modulo f_0 est dense dans $\underset{\sim}{Z}_p$; ainsi il existe k tel que $m_0 + kf_0$ soit aussi proche que l'on veut de $\theta(m_0)$. En posant $m = m_0 + kf_0$, $\omega(\frac{m}{\theta(m)} - 1)$ est aussi grande que l'on veut.

Par suite, la relation (4) peut s'écrire :

$$(\chi\theta^0(m)(\tfrac{m}{\theta(m)})^n - 1)(\frac{B^n_{\chi\theta^{-n}}}{n} - \frac{B^{n'}_{\chi\theta^{-n'}}}{n'}) \equiv \sum_{a=1}^{fp^{k+2}} \chi\theta^{-1}(a)\ g_a(\tfrac{a}{\theta(a)})^{n-1}\ (1 - (\tfrac{a}{\theta(a)})^{n'-n}) \mod p^{k+2} .$$

Posons $\frac{a}{\theta(a)} = 1 + p\psi(a)$, $\omega(\psi(a)) \geq 0$, $(a , p) = 1$,

$$(\chi\theta^0(m)(\frac{m}{\theta(m)})^n - 1)(\frac{B^n_{\chi\theta^{-n}}}{n} - \frac{B^{n'}_{\chi\theta^{-n'}}}{n'}) \equiv (n' - n) \sum_{a=1}^{fp^{k+2}} \chi\theta^{-1}(a)\ g_a\ p\psi(a) \mod p^{k+2} .$$

Utilisons cette même relation pour $n' = 2$ et $n = 1$,

$$(\chi\theta^0(m)\ \frac{m}{\theta(m)} - 1)(\frac{B^1_{\chi\theta^{-1}}}{1} - \frac{B^2_{\chi\theta^{-2}}}{2}) \equiv \sum_{u=1}^{fp^{k+2}} \chi\theta^{-1}(a)\ g_a\ p\psi(a) \mod p^{k+2} .$$

Utilisons la proposition 3 pour $n = 1$ et 2 , $k = 0$, et soustrayons membre à membre :

$$\frac{B^2_{\chi\theta^{-2}}}{2} - \frac{B^1_{\chi\theta^{-1}}}{1} \equiv p^2 \sum_{u=1}^{p^r f_0} \frac{\chi_1\ \chi_2(u)\ \psi^2(u)}{2f_0\ p^r} \mod p ,$$

or

$$p\ \frac{\chi_1\ \chi_2(u + \lambda f_0\ p^r)\ \psi^2(u + \lambda f_0\ p^r)}{2f_0\ p^r} \equiv p\ \frac{\chi_1\ \chi_2(u)\ \psi^2(u)}{2f_0\ p^r} \mod p^0 ,$$

par conséquent

$$p \sum_{u=1}^{f_0 p^r} \frac{\chi_1\ \chi_2(u)\ \psi^2(u)}{2f_0\ p^r} \equiv p \sum_{u\in(\mathbb{Z}/p)^*} \frac{\chi_1\ \chi_2(u)\ \psi^2(u)}{2f_0\ p^r}$$

$$\equiv p \sum_{u_1\in(\mathbb{Z}/p^r)^*} \chi_1(u_1)\ \frac{\psi^2(m)}{2f_0\ p^r} \sum_{u_2\in(\mathbb{Z}/f_0)^*} \chi_2(u_2) \equiv 0 \mod p^0 ,$$

car $\chi_2 \neq \chi_0$ implique $\sum_{u_2\in(\mathbb{Z}/f_0)^*} \chi_2(u_2) = 0$, ainsi $\frac{B^2_{\chi\theta^{-2}}}{2} - \frac{B^1_{\chi\theta^{-1}}}{1} \equiv 0 \mod p$, et alors

$$\sum_{u=1}^{fp^{k+2}} \frac{\chi\theta^{-1}(a)\ g_a\ p\psi(a)}{\chi\theta^0(m)(\frac{m}{\theta(m)})^n - 1} \equiv 0 \mod p$$

et

$$\frac{B^n_{\chi\theta^{-n}}}{n} - \frac{B^{n'}_{\chi\theta^{-n'}}}{n'} \equiv 0 \mod p^{k+1} .$$

(iii) Il existe m tel que $\chi\theta^0(m)$ soit une racine primitive $p^{\varkappa}$-ième de l'unité, alors

$$\omega(\chi\theta^0(m) - 1) = \frac{1}{\varphi(p^{\varkappa})} \quad , \qquad \varphi \text{ étant l'indicateur d'Euler} \quad .$$

La proposition 4 montre que $\omega\left(\frac{B^{n'}_{\chi\theta^{-n'}}}{n'}\right) \geqslant - \frac{1}{\varphi(p^{\varkappa})}$, et la relation (4) prouve que

$$\frac{B^{n}_{\chi\theta^{-n}}}{n} - \frac{B^{n'}_{\chi\theta^{-n'}}}{n'} \equiv 0 \mod p^{k+1-(2/\varphi(p^{\varkappa}))} \quad .$$

(iv) Il existe m tel que $\omega(\chi\theta^0(m) - 1) \geqslant - 1$, mais $\frac{a}{\theta(a)} \equiv 1 \mod 4$, par conséquent la relation (4) montre que

$$\frac{B^{n}_{\chi\theta^{-n}}}{n} \equiv \frac{B^{n'}_{\chi\theta^{-n'}}}{n'} \mod p^k \quad .$$

La proposition 1 va nous permettre de revenir aux nombres de Bernoulli B^n_χ sans faire usage du caractère auxiliaire θ . Le théorème 1 peut donc s'exprimer sous la forme suivante :

THÉORÈME 1'. - Si $\chi\theta^n \neq \chi_0$, si $n \equiv n' \mod p^k(p - 1)$, $k \geqslant 0$:

(i) Si $p \neq 2$, si l'ordre de $\chi\theta^n \neq p^{\varkappa}$, alors

$$\frac{B^n_\chi}{n}(1 - \chi(p)\, p^{n-1}) \equiv \frac{B^{n'}_\chi}{n'}(1 - \chi(p)\, p^{n'-1}) \mod p^{k+1} \quad .$$

(ii) Si $p \neq 2$ et 3 , si l'ordre de $\chi\theta^n = p^{\varkappa}$, si $f(\chi\theta^n) = f_0\, p^r$, $(f_0 , p) = 1$, si $\chi\theta^n = \chi_1 \cdot \chi_2$, où $\chi_1 \in \mathrm{car}(\underset{\sim}{Z}/p^r)^*$ et $\chi_2 \in \mathrm{car}(\underset{\sim}{Z}/f_0)^*$, si $\chi_2 \neq \chi_0$, alors

$$\frac{B^n_\chi}{n}(1 - \chi(p)\, p^{n-1}) \equiv \frac{B^{n'}_\chi}{n'}(1 - \chi(p)\, p^{n'-1}) \mod p^{k+1} \quad .$$

(iii) Si $p \neq 2$, si l'ordre de $\chi\theta^n = p^{\varkappa}$, si $\chi\theta^n = \chi_1 \cdot \chi_0$, $\chi_1 \in \mathrm{car}(\underset{\sim}{Z}/p^r)^*$, $\chi_0 \in \mathrm{car}(\underset{\sim}{Z}/f_0)^*$, alors

$$\frac{B^n_\chi}{n}(1 - \chi(p)\, p^{n-1}) \equiv \frac{B^{n'}_\chi}{n'}(1 - \chi(p)\, p^{n'-1}) \mod p^{k+1-(2/\varphi(p^{\varkappa}))} \quad .$$

(iv) Si $p = 2$, si $k \geqslant 1$,

$$\frac{B^n_\chi}{n}(1 - \chi(p)\, p^{n-1}) \equiv \frac{B^{n'}_\chi}{n'}(1 - \chi(p)\, p^{n'-1}) \mod p^k \quad .$$

Preuve. - Appliquons le théorème 1 pour $\chi\theta^n \neq \chi_0$, alors $\chi\theta^n\,\theta^{-n} = \chi\theta^0$ et $\chi\theta^n\,\theta^{-n'} = \chi\theta^0$, et nous utilisons la proposition 1.

Remarque. - En général, si $n' > n$, le terme $\frac{B^{n'}_{\chi}}{n'}\,\chi(p)\,p^{n'-1}$ disparaît.

Cherchons, maintenant, l'analogue du théorème 1 lorsque $\chi\theta^0 = \chi_0$. Remarquons que le conducteur f de χ_0 est sans facteurs carrés, ainsi $f = p.f_1$, $(f_1 , p) = 1$.

LEMME 1. - Si $p > 3$, si $n \equiv n' \mod p^k$, si $n < n'$ et si $3 \leqslant j \leqslant n$:

$$\frac{\binom{n'+1}{j}\,p^{j-2}}{(n'+1)n'} \equiv \frac{\binom{n+1}{j}\,p^{j-2}}{(n+1)n} \mod p^{k+1} \quad ;$$

pour $p = 2$ et $p = 3$, la relation reste vraie $\mod p^k$.

Preuve.

$$(n'-1)(n'-2)\ \ldots\ (n'-j+2)\,\frac{p.p^{j-3}}{j!} \equiv (n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-j+2)\,\frac{p.p^{j-3}}{j!}$$

$$= \frac{\binom{n+j}{j}}{(n+1)n}\,p^{j-2} \mod p^{k+1} \quad .$$

LEMME 2. - Si $p > 3$, $n' \equiv n \mod p^k$, $n < n'$, et $j > n+1$:

$$\frac{\binom{n'+1}{j}}{(n'+1)n'}\,p^{j-2} \equiv 0 \mod p^{k+1} \quad ;$$

pour $p = 2$ et $p = 3$, la relation reste vraie $\mod p^k$.

Preuve.

$$\frac{\binom{n'+1}{j}}{(n'+1)n'} = (n'-1)(n'-2)\ldots(n'-n+1)(n'-n-1)\ldots(n'-j+2)(n'-n)\frac{p.p^{j-3}}{j!} \equiv 0 \mod p^{k+1} \quad .$$

PROPOSITION 5. - Si $n > 0$, si $\chi\theta^0 = \chi_0$,

$$\omega\left(\frac{B^n_{\chi\theta^{-n}} + \frac{\varphi(f)}{f}}{n}\right) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad B^0_{\chi\theta^0} = \frac{\varphi(f)}{f} \quad .$$

Preuve. - $n = n_1\,p^k$, $(n_1 , p) = 1$. La relation (3) se développe sous la forme

$$B^n_{\chi\theta^{-n}} + \sum_{i=3}^{n+1} \frac{\binom{n+1}{i}}{n+1}\,f^{i-1}\,B^{n-i+1}_{\chi\theta^{-n}} = \sum_{u=1}^{f} \frac{\chi\theta^0(u)\left(\frac{u}{\theta(u)}\right)^n}{f} \quad ,$$

$$\frac{\binom{n+1}{i}}{n+1} f^{i-1} B^{n-i+1}_{\chi\theta^{-n}} = \frac{\binom{n-1}{i-2}}{(i-1)i} f^{i-2}(fB^{n-i+1}_{\chi\theta^{-n}})n \equiv 0 \mod p^k , \qquad \text{si} \quad 3 \leqslant i \leqslant n+1 \quad ,$$

$$\chi_0(u)\, \frac{u}{\theta(u)} \equiv \chi_0(u) \mod p \qquad \chi_0(u)\left(\frac{u}{\theta(u)}\right)^n \equiv \chi_0(u) \mod p^{k+1} \quad .$$

Par conséquent

$$B^n_{\chi\theta^{-n}} \equiv \frac{\varphi(f)}{f} \mod p^k \quad .$$

Si $p = 2$, la démonstration est identique, en remarquant que θ est un caractère de conducteur 4 et que $\chi_0(u)\, \frac{u}{\theta(u)} \equiv \chi_0(u) \mod 4$.

THÉORÈME 2. - Si $p > 3$, si $n' \equiv n \mod p^k$, $k \geqslant 0$, si $\chi\theta^0 = \chi_0$:

$$\frac{B^n_{\chi\theta^{-n}} + \frac{\varphi(f)}{f}}{n} \equiv \frac{B^{n'}_{\chi\theta^{-n'}} + \frac{\varphi(f)}{f}}{n'} \mod p^{k+1} \quad ;$$

si $p = 2$ et $p = 3$, la relation reste vraie $\mod p^k$.

<u>Preuve</u>. - Supposons $n < n'$, et posons $n = \alpha + \mu(p-1)$ et $n' = \alpha' + \mu'(p-1)$, $1 \leqslant \alpha \leqslant p-1$ et $1 \leqslant \alpha' \leqslant p-1$. Si $\mu > 0$, supposons que

$$\frac{B^{n-b(p-1)}_{\chi\theta^{-\alpha}} + \frac{\varphi(f)}{f}}{n - b(p-1)} \equiv \frac{B^{n-b(p-1)}_{\chi\theta^{-\alpha'}} + \frac{\varphi(f)}{f}}{n' - b(p-1)} \mod p^{k+1} , \qquad 1 \leqslant b \leqslant \mu \quad .$$

D'autre part, si $j \not\equiv 0 \mod p-1$, $n - j \not\equiv \alpha \mod p-1$, et le théorème 1 (i) est applicable,

$$\frac{B^{n-j}_{\chi\theta^{-\alpha}}}{n-j} \equiv \frac{B^{n'-j}_{\chi\theta^{-\alpha'}}}{n'-j} \mod p^{k+1} \quad ,$$

soit

(5) $$B^{n-j}_{\chi\theta^{-\alpha}} \equiv B^{n'-j}_{\chi\theta^{-\alpha'}} \mod p^k , \qquad 2 \leqslant j \leqslant n \quad .$$

Utilisant la relation (3) pour n et n' , et soustrayant membre à membre, en tenant compte des lemmes 1 et 2, nous obtenons :

$$\frac{B^{n'}_{\chi\theta^{-\alpha'}}}{n'} - \frac{B^n_{\chi\theta^{-\alpha}}}{n} + \sum_{j=3}^{n+1} \frac{\binom{n+1}{j}}{(n+1)n} f^{j-1}(B^{n'+1-j}_{\chi\theta^{-\alpha}} - B^{n+1-j}_{\chi\theta^{-\alpha}})$$

$$\equiv \sum_{u=1}^{f} \frac{\chi_0(u)\left(\frac{u}{\theta(u)}\right)^{n'}}{f.n'} - \frac{\chi_0(u)\left(\frac{u}{\theta(u)}\right)}{f.n} \mod p^{k+1} \quad .$$

D'autre part, utilisons la relation (5),

$$\frac{\binom{n+1}{j}}{(n+1)n} f^{j-1}(B^{n'+1-j}_{\chi\theta^{-\alpha}} - B^{n+1-j}_{\chi\theta^{-\alpha}}) = \frac{\binom{n-1}{j-2}}{(j-1)j} f^{j-1}(B^{n'+1-j}_{\chi\theta^{-\alpha'}} - B^{n+1-j}_{\chi\theta^{-\alpha}}) \equiv 0 \mod p^{k+1} ,$$

nous obtenons alors

$$\frac{B^{n'}_{\chi\theta^{-\alpha'}}}{n'} - \frac{B^{n}_{\chi\theta^{-\alpha}}}{n} \equiv \sum_{u=1}^{f} \frac{\chi_0(u)(\frac{u}{\theta(u)})^{n'}}{f.n'} - \frac{\chi_0(u)(\frac{u}{\theta(u)})^{n}}{f.n} \mod p^{k+1} .$$

Posons $\frac{u}{\theta(u)} = 1 + p\psi(u)$, si $(u , p) = 1$. Remarquons que

$$\frac{\binom{n'}{j} p^j}{f.n'} \equiv \frac{\binom{n}{j} p^j}{f.n} \mod p^{k+1} , \qquad 1 \leqslant j \leqslant n ,$$

$$\frac{\binom{n'}{j} p^j}{f.n'} \equiv 0 \mod p^{k+1} , \qquad \text{si} \quad j > n ,$$

alors

$$\frac{\chi_0(u)(\frac{u}{\theta(u)})^{n'}}{f.n'} - \frac{\chi_0(u)(\frac{u}{\theta(u)})^{n}}{f.n} \equiv \frac{\chi_0(u)}{f.n'} - \frac{\chi_0(u)}{f.n} \mod p^{k+1} .$$

Par conséquent,

$$\frac{B^{n'}_{\chi\theta^{-\alpha}}}{n'} - \frac{B^{n}_{\chi\theta^{-\alpha}}}{n} \equiv \frac{\varphi(f)}{f.n'} - \frac{\varphi(f)}{f.n} \mod p^{k+1} ,$$

et le théorème en découle immédiatement.

THÉORÈME 2'. - Si $p > 3$, si $\chi\theta^n = \chi_0$, si $n' \equiv n \mod p^k(p-1)$, alors

$$\frac{B^n_{\chi}(1 - \chi(p)\, p^{n-1}) + \frac{\varphi(f)}{f}}{n} \equiv \frac{B^{n'}_{\chi}(1 - \chi(p)\, p^{n'-1}) + \frac{\varphi(f)}{f}}{n'} \mod p^{k+1} .$$

Si $p = 3$, la relation est vraie $\mod p^k$; si $p = 2$ et $k \geqslant 1$, la relation est vraie $\mod p^k$.

<u>Preuve</u>. - Il suffit d'utiliser le théorème 2 et la proposition 1.

<u>Remarque</u>. - En général, le terme $\frac{B^{n'}_{\chi}}{n'} \chi(p)\, p^{n'-1}$ disparaît si $n' > n$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] NIELSEN (Niels). - Traité élémentaire des nombres de Bernoulli. - Paris, Gauthier-Villars, 1923.

[2] VANDIVER (H. S.). - On the developments in an arithmetic theory of the Bernoulli and allied numbers, Scripta matematica, New York, t. 25, 1960, p. 273-303.