

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MICHEL MENDÈS FRANCE

Quelques remarques sur la répartition modulo 1 de la suite $x\theta^p$

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 6, n° 2 (1964-1965),
exp. n° 11, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1964-1965__6_2_A2_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES REMARQUES

SUR LA RÉPARTITION MODULO 1 DE LA SUITE $x\theta^p$

par Michel MENDÈS FRANCE

1. Généralités.

On connaît divers types de résultats sur la répartition modulo 1 de la suite $x\theta^p$ ($p = 1, 2, \dots$). Le théorème de Koksma-Weyl affirme que, pour presque tous les couples (x, θ) ($\theta > 1$), la suite $x\theta^p$ est équirépartie modulo 1. En sens inverse, on sait que si θ est un nombre de Pisot et si x appartient au corps algébrique de θ , la suite $x\theta^p$ n'est pas équirépartie modulo 1 : on dira qu'elle est mal répartie. Le but de cet exposé est de donner quelques renseignements sur la répartition de la suite $x\theta^p$ lorsque x est un élément de l'ensemble de Cantor $C(\theta)$ construit sur l'intervalle $[0, 1]$ et à dissection $\frac{1}{\theta}$. On considèrera deux cas selon que θ est ou non un nombre de Pisot.

Dans tout ce qui suit, S désigne l'ensemble des entiers algébriques plus grands que 1 dont tous les conjugués sont à l'intérieur du cercle unité (nombres de Pisot) [3], [5], [6].

2. Résultats obtenus.

Soit $\theta > 2$ un nombre réel, et soit $C(\theta)$ l'ensemble de Cantor à dissection $1/\theta$, construit sur l'intervalle $[0, 1]$. En d'autres termes, $C(\theta)$ est l'ensemble de tous les nombres x de la forme

$$x = (\theta - 1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_p}{\theta^p},$$

où les ε_p sont égaux soit à 0, soit à 1.

Considérons le groupe abélien $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$. A chaque élément $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots) \in G$ ($\varepsilon_n = 0$ ou 1), on peut faire correspondre un élément $x(\varepsilon) \in C(\theta)$ par la formule

$$x(\varepsilon) = (\theta - 1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_p}{\theta^p}.$$

On munit le groupe G de la topologie discrète, ce qui en fait un groupe compact. La mesure de Haar, normalisée sur G , induit une mesure μ sur l'ensemble de Cantor $C(\theta)$. Appelons alors $\mathcal{P}(\theta)$ l'implication

$x \in C(\theta) \implies x\theta^p$ équirépartie (mod 1) μ -presque partout.

Nous démontrerons le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Presque tous les $\theta > 2$ vérifient $\mathcal{P}(\theta)$.

D'une façon plus précise, on verra d'une part, que si $\theta > 2$ est un nombre réel et si, pour tout entier $k \neq 0$, la série

$$(1) \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left| \prod_{m=0}^p \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m \right|$$

est convergente, alors l'implication $\mathcal{P}(\theta)$ est vraie.

D'autre part, on démontrera que la série précédente est convergente pour presque tous les $\theta > 1$.

Remarque. - On sait qu'une caractérisation de l'ensemble S est la suivante :

$$(2) \quad \theta \in S \iff \prod_{m=0}^{\infty} \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m$$

est un produit infini convergent [5]. Cela montre que si θ est un élément de S , alors la série (1) est divergente. Cela nous amène à étudier la répartition de la suite $x\theta^p$ (mod 1) lorsque $\theta \in S$.

THÉORÈME 2. - Si $\theta > 2$ est un nombre de l'ensemble S , l'implication $\mathcal{P}(\theta)$ n'a pas lieu.

Ce résultat est précisé par les théorèmes 3 et 4.

THÉORÈME 3 (SALEM, ZYGMUND). - Il existe un entier $\lambda \neq 0$ du corps de θ ($\theta \in S$, $\theta > 2$) tel que, pour tout x de $C(\theta)$, la suite $\lambda x\theta^p$ ($p = 1, 2, \dots$) ne soit pas équirépartie (mod 1).

On pourra trouver une démonstration de ce théorème dans [3], p. 75-78, ou [8] (voir aussi [1]).

Avant d'énoncer le théorème 4, nous devons introduire de nouvelles notations. On désigne par $[t]$ (resp. $\{t\}$) la partie entière (resp. fractionnaire) du nombre réel t . Appelons $E(\theta)$ l'ensemble des nombres x de la forme

$$x = x_{\varphi} = (\theta - 1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{[2\{\varphi(p)\}]}{\theta^p},$$

où φ est un polynôme réel. Il est bien évident que $E(\theta) \subset C(\theta)$, que $E(\theta)$ est dense dans $C(\theta)$ et qu'enfin l'intersection de toute portion non vide de $C(\theta)$ avec $E(\theta)$ a la puissance du continu. Toutefois, on peut démontrer que la dimen-

sion de Hausdorff de $E(\theta)$ est nulle, alors qu'il est connu que celle de $C(\theta)$ est positive.

THÉOREME 4. - θ étant un nombre de la classe S (non nécessairement supérieur à 2), la suite $x\theta^p$ ($p = 1, 2, \dots$) est mal répartie modulo 1 pour tous les nombres x de l'ensemble $E(\theta)$. De plus, la fermeture $A(x)$ de l'ensemble des points $x\theta^p$ modulo 1 ($p \in \mathbb{N}$) a une dimension de Hausdorff nulle.

Ce théorème et les remarques qui précèdent, généralisent les résultats obtenus dans [4].

Remarque. - En modifiant légèrement la démonstration du théorème 4, on peut facilement démontrer que si $\theta \in S$ a tous ses conjugués dans le cercle $|z| < \frac{1}{2}$, l'implication $\{x \in C(\theta) \Rightarrow x\theta^p \text{ mal répartie}\}$ est vraie. En particulier si $\theta > 2$ est une unité quadratique de S , le résultat précédent a lieu (cf. [7], p. 598).

3. Démonstration du théorème 1.

Nous nous appuyons sur quatre lemmes.

LEMME 1. - α_j et ν_j ($j = 1, 2, \dots, t$) étant des nombres réels, l'inégalité suivante

$$\left| \prod_{j=1}^t (\nu_j + \cos \alpha_j) \right| \leq \left| \prod_{j=1}^t \cos \alpha_j \right| + \prod_{j=1}^t (1 + |\beta_j|) - 1$$

a lieu.

(Démonstration évidente.)

Faisons

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N \exp 2i\pi x \theta^p$$

et

$$I_N(k) = \int_0^1 |\sigma_N(kx)|^2 d\mu(x),$$

où k est un entier rationnel non nul.

LEMME 2. - Si pour tout entier $k \neq 0$, la série $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} I_N(k)$ est convergente, alors la suite $x\theta^p$ est équirépartie modulo 1 pour μ -presque tous les x .

Nous ne rétablirons pas ce résultat dû à DAVENPORT, ERDÖS et LEVEQUE [2].

Remarque. - Supposons que l'on ait mis $I_N(k)$ sous la forme

$$I_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N A_n(k) \quad \text{où } A_n(k) \geq 0 .$$

Les égalités

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} I_N(k) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(k) \sum_{N=n}^{\infty} \frac{1}{N^2}$$

et

$$\sum_{N=n}^{\infty} \frac{1}{N^2} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

montrent que la condition du lemme 2 s'écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} A_n(k) < \infty \quad \text{pour tout entier } k \neq 0 .$$

$$\text{LEMME 3. - } \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left| \prod_{m=0}^p \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m \right| < \infty \implies \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} I_N(k) < \infty .$$

En effet, la formule classique [3] :

$$(3) \quad \int_0^1 e^{2i\pi ux} d\mu(x) = e^{i\pi u} \prod_{j=1}^{\infty} \cos \pi \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \frac{u}{\theta^{j-1}}$$

montre que l'on a :

$$I_N(k) = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{1 \leq q < p \leq N} \cos \pi k(\theta^p - \theta^q) \prod_{j=0}^{\infty} \cos \pi k(\theta^p - \theta^q) \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \frac{1}{\theta^j} .$$

Appelons $L_N(k)$ la somme $\frac{2}{N^2} \sum_{1 \leq q < p \leq N}$ qui apparaît au second membre de l'équation. Les deux séries $\sum \frac{1}{N} I_N(k)$ et $\sum \frac{1}{N} L_N(k)$ étant de même nature, il suffit de montrer que, sous l'hypothèse du lemme 3, la série $\sum \frac{1}{N} L_N(k)$ converge.

De l'égalité

$$\sum_{1 \leq q < p \leq N} = \sum_{t=1}^{N-1} \sum_{q=1}^{N-t} ,$$

on déduit les inégalités

$$\begin{aligned} |L_N(k)| &\leq \frac{2}{N^2} \sum_{t=1}^N \sum_{q=1}^N \left| \prod_{j=0}^{\infty} \cos \pi k \theta^{q-j} \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) (\theta^t - 1) \right| \\ &\leq \frac{2}{N^2} \sum_{t=1}^N N \left| \prod_{j=0}^{\infty} \cos \pi k \theta^{1-j} \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) (\theta^t - 1) \right| . \end{aligned}$$

Afin d'alléger l'écriture, on pose $\lambda = \pi k(\theta - 1)$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} |L_N(k)| &\leq \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \left| \prod_{j=0}^{\infty} \cos \lambda \theta^{-j} (\theta^t - 1) \right| \\ &\leq \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \left| \prod_{\sqrt{t} \leq j \leq t} \cos \lambda (\theta^{t-j} - \theta^{-j}) \right| . \end{aligned}$$

Il est pratique d'effectuer le changement de notation $t - j = m$, de sorte que

$$|L_N(k)| \leq \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \left| \prod_{0 \leq m \leq t-\sqrt{t}} \cos \lambda \left(\theta^m - \frac{1}{\theta^{t-m}} \right) \right|.$$

Posons

$$A_t(k) = \left| \prod_{0 \leq m \leq t-\sqrt{t}} \cos \lambda \left(\theta^m - \frac{1}{\theta^{t-m}} \right) \right|.$$

La remarque qui suit le lemme 2 montre que la convergence de la série $\sum_t \frac{1}{t} A_t(k)$ entraîne celle de la série $\sum_N \frac{1}{N} |L_N(k)|$. On est ainsi ramené à l'étude de la série $\sum_t \frac{1}{t} A_t(k)$. Or

$$\left| \cos \lambda \left(\theta^m - \frac{1}{\theta^{t-m}} \right) \right| \leq |\cos \lambda \theta^m| + \frac{\lambda}{\theta^{t-m}}.$$

Le lemme 1 nous permet alors d'écrire :

$$A_t(k) \leq \left| \prod_{0 \leq m \leq t-\sqrt{t}} \cos \lambda \theta^m \right| + y(t)$$

où $y(t) = \left(1 + \frac{\lambda}{\theta^{\sqrt{t}}} \right)^{t-\sqrt{t}} - 1$. La série $\sum_t \frac{1}{t} y(t)$ étant évidemment convergente, on est conduit à l'étude de la convergence de la série

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t} \left| \prod_{0 \leq m \leq t-\sqrt{t}} \cos \lambda \theta^m \right|,$$

c'est-à-dire (après changement de variable) de la série

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left| \prod_{m=0}^p \cos \lambda \theta^m \right|.$$

Ceci démontre le lemme.

En associant les lemmes 2 et 3, on aboutit à l'énoncé suivant :

Soit $\theta > 2$ un nombre réel. Si, pour tout k entier non nul, la série

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left| \prod_{m=0}^p \cos \pi k (\theta - 1) \theta^m \right|$$

est convergente, alors l'implication $\mathcal{P}(\theta)$ est vraie.

Le théorème 1 découle alors du lemme suivant :

LEMME 4. - Soit $k \neq 0$ un entier fixé. Presque tous les nombres $\theta > 1$ sont tels que la série

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left| \prod_{m=0}^p \cos \pi k (\theta - 1) \theta^m \right|$$

est convergente.

En effet, soit $\theta > 1$ un nombre tel que la suite $(\theta - 1)\theta^m$ ($m = 1, 2, \dots$) soit équirépartie modulo 1. ε représentant un nombre de l'intervalle $]0, 1[$, on considère l'ensemble

$$H_{p,\varepsilon} = \{m \in \mathbb{N} \mid \frac{\varepsilon}{2} \leq \{(\theta - 1)\theta^m\} < 1 - \frac{\varepsilon}{2}; m \leq p\}.$$

Il contient $(1 - \varepsilon)p + o(p)$ éléments. Posons $1 - \eta = \cos \frac{\varepsilon\pi}{2}$ de sorte que $0 < 1 - \eta < 1$. On a alors l'inégalité

$$\begin{aligned} \left| \prod_{m=0}^p \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m \right| &\leq \left| \prod_{m \in H_{p,\varepsilon}} \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m \right| \\ &\leq (1 - \eta)^{(1-\varepsilon)p + o(p)}. \end{aligned}$$

La série $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left| \prod_{m=0}^p \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m \right|$ est alors évidemment convergente. Nous sommes ainsi arrivé à la conclusion que, si la suite $(\theta - 1)\theta^m$ est équirépartie (mod 1), alors la série précédente converge. Le théorème de Koksma permet alors de conclure.

4. Démonstration du théorème 2.

Considérons à nouveau la somme

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N \exp 2i\pi x \theta^p,$$

et définissons l'intégrale

$$J_N = \int_0^1 \sigma_N(2x) d\mu(x).$$

On suppose que $\theta > 2$ est un nombre de l'ensemble S . Pour montrer que l'implication $\rho(\theta)$ n'a pas lieu, il suffit de montrer que, pour N infini, J_N ne tend pas vers 0.

Or l'égalité (3) montre que

$$J_N = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N \exp 2i\pi \theta^p \prod_{j=1}^{\infty} \cos 2\pi(\theta - 1)\theta^{p-j}.$$

Comme $\theta \in S$,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \exp 2i\pi \theta^p = 1.$$

D'autre part,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{\infty} \cos 2\pi(\theta - 1)\theta^{p-j} = \prod_{j=-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi(\theta - 1)\theta^j.$$

Le produit infini $\prod_{-\infty}^{+\infty}$ est convergent (caractérisation de l'ensemble S).

Ainsi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_N = \prod_{j=-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi(\theta - 1)\theta^j \neq 0.$$

C. Q. F. D.

5. Démonstration du théorème 4.

Soit φ un polynôme réel de degré ν . On considère la suite de p éléments

$$[\varphi(m+1)], [\varphi(m+2)], \dots, [\varphi(m+p)] \pmod{2}.$$

Appelons $N_\nu(p)$ le nombre de positions distinctes que prend la suite quand m parcourt \mathbb{N} .

LEMME 5. - Quand p croit indéfiniment, on a

$$N_\nu(p) = O(p^{(\nu+1)^2}).$$

En effet, désignons par P_ν l'ensemble des polynômes réels de degré ν et à coefficients dans $\{0, 2[$. On considère la suite de p éléments

$$[\psi(1)], [\psi(2)], \dots, [\psi(p)] \pmod{2}.$$

Représentons par $N_\nu^*(p)$ le nombre de positions distinctes que prend la suite quand ψ parcourt P_ν . Il est clair que $N_\nu(p) \leq N_\nu^*(p)$. On va montrer que $N_\nu^*(p) = O(p^{(\nu+1)^2})$ et cela démontrera le lemme.

Posons

$$\psi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_\nu x^\nu; \quad \alpha_j \in \{0, 2[.$$

Soit q_1, q_2, \dots, q_p une suite d'entiers vérifiant les p inégalités

$$0 \leq q_n < 2(1 + n + \dots + n^\nu) \quad n = 1, 2, \dots, p,$$

de sorte que $q_n = O(p^\nu)$. Lorsque le point $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\nu) \in \{0, 2[^{\nu+1}$ parcourt le volume défini par

$$q_n \leq \alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_\nu n^\nu < q_n + 1 \quad n = 1, 2, \dots, p,$$

la suite $[\psi(1)], [\psi(2)], \dots, [\psi(p)]$ reste invariante. Or le nombre $N_\nu^{**}(p)$ de tels volumes est majoré par le nombre maximum de régions que l'on peut obtenir en découpant l'espace euclidien $\mathbb{R}^{\nu+1}$ par les hyperplans

$$\alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_\nu n^\nu = q_n,$$

lesquels sont au nombre de $M = pO(p^\nu) = O(p^{\nu+1})$. Il est par ailleurs connu que l'espace $\mathbb{R}^{\nu+1}$ est partagé en $O(M^{\nu+1})$ régions par M hyperplans. Par suite,

$N_{\nu}^{**}(p) = O(p^{(\nu+1)^2})$. Le lemme découle alors de l'inégalité évidente

$$N_{\nu}^*(p) \leq N_{\nu}^{**}(p) .$$

LEMME 6. - Soit φ un polynôme réel de degré ν . La suite de p éléments
 $[2\{\varphi(m+1)\}] , [2\{\varphi(m+2)\}] , \dots , [2\{\varphi(m+p)\}]$
prend $O(p^{2(\nu+1)^2})$ positions distinctes lorsque m parcourt l'ensemble \mathbb{N} des entiers.

La démonstration découle immédiatement du lemme 5 et de l'égalité

$$[2\{\varphi(p)\}] = [2\varphi(p)] - 2[\varphi(p)] .$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 4. Soit $\theta > 1$ un nombre de la classe S , et soit x un élément de $E(\theta)$. Il existe donc un polynôme réel φ tel que

$$x = (\theta - 1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{[2\{\varphi(p)\}]}{\theta^p} .$$

Appelons ν le degré de φ et, pour simplifier l'écriture, posons

$$\varepsilon_p = [2\{\varphi(p)\}] \quad (p = 1, 2, \dots) .$$

Nous voulons montrer que la suite $x\theta^n$ ($n = 1, 2, \dots$) est mal répartie (mod 1) . On définit les deux quantités

$$R_p(n) = (\theta - 1) \left(\frac{\varepsilon_{n+p+1}}{\theta^{p+1}} + \frac{\varepsilon_{n+p+2}}{\theta^{p+2}} + \dots \right)$$

$$Q_p(n) = (\theta - 1) (\varepsilon_1 \theta^{n-1} + \dots + \varepsilon_{n-p-1} \theta^{p+1})$$

de sorte que

$$x\theta^n = R_p(n) + Q_p(n) + (\theta - 1) \left(\varepsilon_{n-p} \theta^p + \dots + \frac{\varepsilon_{n+p}}{\theta^p} \right) .$$

Il est clair que $|R_p(n)| \leq \frac{1}{\theta^p}$. Par ailleurs, soit s le degré du nombre algébrique θ , et soit τ ($\tau \neq \theta$) le conjugué de θ dont le module est le plus grand. Comme θ appartient à S , on a $|\tau| < 1$ et $|\theta|^q \leq (s-1)|\tau|^q \pmod{1}$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |Q_p(n)| &\leq \theta^{p+1} + 2(\theta^{p+2} + \theta^{p+3} + \dots) \\ &\leq 2(s-1) \frac{|\tau|}{1-|\tau|} |\tau|^p \pmod{1} . \end{aligned}$$

Par suite

$$|x\theta^n - (\theta - 1)\left(\varepsilon_{n-p} \theta^p + \dots + \frac{\varepsilon_{n+p}}{\theta^p}\right)| \leq \frac{1}{\theta^p} + 2(s-1) \frac{|\tau|}{1-|\tau|} |\tau|^p$$

$$|x\theta^n - (\theta - 1)\left(\varepsilon_{n-p} \theta^p + \dots + \frac{\varepsilon_{n+p}}{\theta^p}\right)| = o(|\tau|^p).$$

Ainsi, le point $x\theta^n$ se trouve à l'intérieur d'un intervalle centré au point $T_{n,p} = (\theta - 1) \left(\varepsilon_{n-p} \theta^p + \dots + \frac{\varepsilon_{n+p}}{\theta^p} \right)$ et de longueur $o(|\tau|^p)$. Or d'après le lemme 6, les points $T_{n,p}$ sont au nombre de $o\left((2p+1)^{2(v+1)^2}\right)$. Les points $x\theta^n$ sont donc enfermés dans une réunion d'intervalles dont la mesure totale est $o\left(|\tau|^p p^{2(v+1)^2}\right)$. Pour p suffisamment grand, cette mesure est inférieure à 1. La suite $x\theta^n \pmod{1}$ n'est donc pas dense sur $(0, 1)$ et cela démontre la première partie du théorème 4.

La seconde partie découle du fait que la mesure dans la dimension h ($0 < h \leq 1$) de la réunion d'intervalles considérée précédemment est

$$o\left(|\tau|^{ph} p^{2(v+1)^2}\right) = o(1).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARY (N. K.) [BARI (Nina)]. - A treatise on trigonometric series, Vol. 1 and 2. Translated by Margaret F. Mullins. - Oxford, London, Pergamon Press, 1964.
- [2] DAVENPORT (H.), ERDÖS (P.) and LEVEQUE (W. J.). - On Weyl's criterion for uniform distribution, Mich. math. J., t. 10, 1963, p. 311-314.
- [3] KAHANE (J.-P.) et SALEM (R.). - Ensembles parfaits et séries trigonométriques. - Paris, Hermann, 1963 (Act. scient. et ind., 1301).
- [4] MENDES FRANCE (Michel). - A set of nonnormal numbers, Pacific J. Math. (à paraître).
- [5] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Scuola norm. sup. di Pisa, Série 2, t. 7, 1938, p. 205-248.
- [6] PISOT (Charles). - Répartition (mod 1) des puissances successives des nombres réels, Comment. math. Helvet., t. 19, 1946-47, p. 153-160.
- [7] SALEM (Raphaël). - Rectifications to the papers : Sets of uniqueness and sets of multiplicity, Trans. Amer. math. Soc., t. 63, 1948, p. 595-598.
- [8] SALEM (R.) et ZYGMUND (A.). - Sur un théorème de Piatetçki-Shapiro, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 240, 1955, p. 2040-2042.