Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

HUBERT DELANGE

Démonstration élémentaire du théorème des nombres premiers

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 6, nº 1 (1964-1965), exp. nº 6, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1964-1965__6_1_A5_0>

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME DES NOMBRES PREMIERS

par Hubert DELANGE

1. - On appelle "théorème des nombres premiers" le théorème suivant :

Si $\varpi(x)$ est le nombre des nombres premiers au plus égaux à x, on a pour x infini

$$\varpi(x) \sim \frac{x}{\log x} .$$

Ce résultat a été démontré pour la première fois, en 1896, par HADAMARD et de LA VALLÉE POUSSIN, indépendamment l'un de l'autre. Ces deux auteurs utilisaient les propriétés de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann dans le domaine complexe. Un bon nombre d'autres démonstrations utilisant aussi les propriétés de la fonction $\zeta(s)$ ont été données ultérieurement. Pendant plus de cinquante ans, on a cru impossible de donner une démonstration ne faisant pas appel à la fonction $\zeta(s)$ et à la théorie des fonctions de variable complexe. Ce n'est qu'en 1948 qu'une telle démonstration a été obtenue par Atle SELBERG. Cette démonstration "élémentaire" a été ensuite simplifiée et perfectionnée par un certain nombre d'auteurs.

Nous nous proposons ici d'exposer une méthode fort élégante due à E. WIRSING [1]. Elle fait appel à un lemme de caractère géométrique qui nous paraît intéressant par lui-même.

2. - On sait que le théorème des nombres premiers est équivalent à la proposition suivante :

On a, pour x infini, $\psi(x) \sim x$, où $\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)$, Λ étant la fonction de Čebyšev définie par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k \text{, avec } p \text{ premier et } k \text{ entier} > 0 , \\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas de cette forme.} \end{cases}$$

---

[1] WIRSING (Eduard). - Elementare Beweise des Primzahlsatzes mit Restglied, I., J. für die reine und angew. Math., t. 211, 1962, p. 205-214.

En fait, WIRSING établit un résultat légèrement plus fort.

Nous démontrerons en fait que la série $\sum_{1}^{+\infty} \frac{1 - \Lambda(n)}{n}$ est convergente avec pour somme 2γ , où γ est la constante d'Euler.

Ceci entraîne bien que l'on a, pour x infini, $\psi(x) \sim x$, car il est bien connu que la convergence de la série $\sum_{1}^{+\infty} u_n$ entraîne que $\sum_{n \leqslant x} nu_n = o[x]$ ([2]).

Nous définirons une suite $r_1 , r_2 , \dots , r_n , \dots$ par $r_1 = 1 - 2\gamma$ et, pour $n \geqslant 2$, $r_n = \frac{1 - \Lambda(n)}{n}$, et nous poserons $r(x) = \sum_{n \leqslant x} r_n$.

Ainsi, nous aurons à démontrer que $r(x)$ tend vers zéro quand x tend vers $+ \infty$.

3. - Nous établirons d'abord la formule suivante, analogue à la formule d'Atle Selberg :

(1) $$r(x) \log x - \sum_{n \leqslant x} r_n \, r(\tfrac{x}{n}) = O[1] .$$

3.1. - Nous utiliserons les deux formules suivantes :

f étant une fonction réelle ou complexe définie pour $x \geqslant 1$, définissons $g(x)$ pour $x \geqslant 1$ par

$$g(x) = \sum_{n \leqslant x} f(\tfrac{x}{n}) .$$

Alors, μ étant la fonction de Möbius, on a pour $x \geqslant 1$

(2) $$f(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) \, g(\tfrac{x}{n})$$

et

(3) $$f(x) \log x + \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \, f(\tfrac{x}{n}) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) \, g(\tfrac{x}{n}) \log \frac{x}{n} .$$

(2) est bien connue sous le nom de "formule d'inversion de Möbius". (3) s'établit simplement comme suit :

([2]) On peut le voir, par exemple, de la façon suivante :

Si l'on pose $R_n = \sum_{j=n}^{+\infty} u_j$, on a $u_n = R_n - R_{n+1}$, et par suite

$$\sum_{j=1}^{n} ju_j = \sum_{j=1}^{n} R_j - nR_{n+1} .$$

On a

$$\sum_{n\leqslant x} \mu(n)\ g(\frac{x}{n})\ \log\frac{x}{n} = \sum_{n\leqslant x} \mu(n)\ g(\frac{x}{n})\ \log x - \sum_{n\leqslant x} \mu(n)\ \log n\ g(\frac{x}{n}) .$$

D'après (2), la première somme au second membre est égale à $f(x) \log x$.

D'autre part,

$$\sum_{n\leqslant x} \mu(n)\ \log n\ g(\frac{x}{n}) = \sum_{d\leqslant x} \mu(d)\ \log d\ (\sum_{m\leqslant\frac{x}{d}} f(\frac{x}{md}))\ ,$$

$$= \sum_{md\leqslant x} \mu(d)\ \log d\ f(\frac{x}{md})\ ,$$

$$= \sum_{n\leqslant x} f(\frac{x}{n}) (\sum_{d/n} \mu(d)\ \log d) .$$

Mais $\sum_{d/n} \mu(d) \log d = - \Lambda(n)$ car, comme $\sum_{d/n} \Lambda(d) = \log n$, on a

$$\Lambda(n) = \sum_{d/n} \mu(d)\ \log\frac{n}{d} = \{\sum_{d/n} \mu(d)\}\log n - \sum_{d/n} \mu(d)\ \log d = - \sum_{d/n} \mu(d)\ \log d .$$

3.2. - Nous utiliserons aussi le fait que, pour x infini, on a les relations suivantes :

(4) $$\sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O[\frac{1}{x}] ;$$

(5) $$\sum_{n\leqslant x} \frac{\log n}{n} = \frac{1}{2}(\log x)^2 + \gamma_1 + O[\frac{\log x}{x}] ;$$

$d(n)$ étant le nombre des diviseurs de n ,

(6) $$\sum_{n\leqslant x} \frac{d(n)}{n} = \frac{1}{2}(\log x)^2 + 2\gamma \log x + \gamma^2 - 2\gamma_1 + O[\frac{\log x}{\sqrt{x}}] ;$$

(7) $$\sum_{n\leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} = O[1] ;$$

(8) $$\sum_{n\leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} \log\frac{x}{n} = O[1] ;$$

(9) $$\text{Si } k \geqslant 0 ,\quad \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{\sqrt{nx}} (\log\frac{x}{n})^k = O[1] .$$

(4) est bien connue. (4) et (5) peuvent s'obtenir aisément comme suit :

$E(u)$ désignant la partie entière de u , on a, pour $x \geqslant 1$,

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n} = \int_{1/2}^{x} \frac{1}{t}\, dE(t) = \frac{E(x)}{x} + \int_{1}^{x} \frac{E(t)}{t^2}\, dt ,$$

$$= \log x + 1 - \frac{x - E(x)}{x} - \int_{1}^{x} \frac{t - E(t)}{t^2}\, dt ,$$

$$= \log x + 1 - \int_{1}^{+\infty} \frac{t - E(t)}{t^2} dt - \frac{x - E(x)}{x} + \int_{x}^{+\infty} \frac{t - E(t)}{t^2} dt ,$$

et chacun des deux derniers termes est de module au plus égal à $\frac{1}{x}$.

De même,

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\log n}{n} = \int_{1/2}^{x} \frac{\log t}{t}\, dE(t) = \frac{E(x)\ \log x}{x} + \int_{1}^{x} \frac{\log t - 1}{t^2}\, E(t)\, dt ,$$

$$= \frac{1}{2}(\log x)^2 - \frac{x - E(x)}{x} \log x - \int_{1}^{x} \frac{\log t - 1}{t^2} [t - E(t)]\, dt ,$$

$$= \frac{1}{2}(\log x)^2 - \int_{1}^{\infty} \frac{\log t - 1}{t^2}[t - E(t)]dt - \frac{x - E(x)}{x} \log x + \int_{x}^{+\infty} \frac{\log t - 1}{t^2}[t - E(t)]dt .$$

On a évidemment $0 \leqslant \frac{x - E(x)}{x} \log x < \frac{\log x}{x}$ et, si $x \geqslant e$,

$$0 < \int_{x}^{+\infty} \frac{\log t - 1}{t^2} [t - E(t)]\, dt < \int_{x}^{+\infty} \frac{\log t - 1}{t^2}\, dt = \frac{\log x}{x} .$$

Pour établir (6), on peut écrire

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{d(n)}{n} = \sum_{mn \leqslant x} \frac{1}{mn} = \sum_{\substack{n \leqslant \sqrt{x} \\ m \leqslant \frac{x}{n}}} \frac{1}{mn} + \sum_{\substack{m \leqslant \sqrt{x} \\ n \leqslant \frac{x}{m}}} \frac{1}{mn} - \sum_{\substack{m \leqslant \sqrt{x} \\ n \leqslant \sqrt{x}}} \frac{1}{mn}$$

$$= 2 \sum_{n \leqslant \sqrt{x}} \frac{1}{n} \Big(\sum_{m \leqslant \frac{x}{n}} \frac{1}{m} \Big) - \Big(\sum_{n \leqslant \sqrt{x}} \frac{1}{n} \Big)^2 ,$$

et évaluer $\sum_{m \leqslant \frac{x}{n}} \frac{1}{m}$ et $\sum_{n \leqslant \sqrt{x}} \frac{1}{n}$ à l'aide de la formule (4).

(9) résulte de ce que, $\frac{1}{\sqrt{xt}} (\log \frac{x}{t})^k$ étant une fonction décroissante de t pour $1 \leqslant t \leqslant x$, on a

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\sqrt{nx}} (\log \frac{x}{n})^k \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} (\log x)^k + \int_1^x \frac{1}{\sqrt{xt}} (\log \frac{x}{t})^k \, dt ,$$

et le changement de variable $t = \frac{x}{u}$ donne

$$\int_1^x \frac{1}{\sqrt{xt}} (\log \frac{x}{t})^k \, dt = \int_1^x \frac{(\log u)^k}{u^{3/2}} \, du .$$

(7) et (8) s'obtiennent de la façon suivante :

En prenant $f(x) = 1$, la formule (2) donne $1 = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) \, E(\frac{x}{n})$, et par suite

$$|x \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n}| = |1 + \sum_{n \leqslant x} \mu(n)[\frac{x}{n} - E(\frac{x}{n})]| \leqslant 1 + x ,$$

d'où (7).

En prenant maintenant $f(x) = x$, on a

$$g(x) = xL(x) , \qquad \text{où} \quad L(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n} ,$$

et (2) donne, après division par x ,

$$1 = \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} L(\frac{x}{n}) ,$$

d'où, en tenant compte de (4) et (7),

$$1 = \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} \log \frac{x}{n} + \gamma \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} + O[1] ,$$

$$= \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} \log \frac{x}{n} + O[1] ,$$

d'où (8).

3.3. - Nous appliquerons les formules (2) et (3) avec $f(x) = xr(x)$.

On a alors $g(x) = xs(x)$, où $s(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n} r(\frac{x}{n})$, et (2) et (3) donnent, après division par x ,

(10) $$r(x) = \sum_{n\leqslant x} \frac{\mu(n)}{n}\, s(\tfrac{x}{n})$$

et

(11) $$r(x)\log x + \sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n}\, r(\tfrac{x}{n}) = \sum_{n\leqslant x} \frac{\mu(n)}{n}\, s(\tfrac{x}{n}) \log \frac{x}{n} \,.$$

On a pour $x \geqslant 1$

$$s(x) = \sum_{m\leqslant x} \frac{1}{m} \Big(\sum_{d\leqslant \frac{x}{m}} r_d\Big) = \sum_{md\leqslant x} \frac{dr_d}{md} = \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n} \Big(\sum_{d/n} dr_d\Big)$$

$$= \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n} [d(n) - \log n - 2\gamma] \,,$$

car

$$\sum_{d/n} dr_d = \sum_{d/n} [1 - \Lambda(d)] - 2\gamma \,,$$

puisque

$$dr_d = \begin{cases} 1 - \Lambda(d) & \text{pour } d > 1 \,, \\ 1 - \Lambda(1) - 2\gamma & \text{pour } d = 1 \,. \end{cases}$$

En tenant compte de (4) , (5) et (6), ceci donne

(12) $$s(x) = -\gamma^2 - 3\gamma_1 + O[\frac{\log x}{\sqrt{x}}] \,.$$

(10) et (11) donnent alors, en tenant compte de (7) , (8) et (9),

(13) $$r(x) = O[1]$$

et

(14) $$r(x)\log x + \sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n}\, r(\tfrac{x}{n}) = O[1] \,.$$

Comme $s(x) = \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n} r(\frac{x}{n})$, il résulte de (12) que

(15) $$\sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n} r(\tfrac{x}{n}) = O[1] \,.$$

En ajoutant à (14) les égalités (13) et (15) multipliées respectivement par 2γ et -1 , on obtient (1).

3.3.1. – Notons en passant que (13) redonne immédiatement les résultats bien connus suivants :

(16) $$\sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O[1] ,$$

(17) $$\psi(x) = O[x] .$$

(16) s'obtient en retranchant (13) de (4), et (17) en remarquant que, pour $n \geqslant 2$, la transformation d'Abel donne

$$n - 2\gamma - \psi(n) = \sum_{j=1}^{n} jr_j = - \sum_{j=1}^{n-1} r(j) + nr(n) .$$

4. - Il nous sera utile d'observer encore qu'il existe une constante positive K telle que, pour $1 \leqslant y < x$,

(18) $$|r(x) - r(y)| \leqslant \log \frac{x}{y} + \frac{K}{1 + \log y} .$$

Tout d'abord, d'après (13), il existe $M > 0$ tel que

(19) $$|r(x)| \leqslant M \qquad \text{pour } x \geqslant 1 .$$

Si $\lambda = e^{2M}$, il suffit évidemment que $K \geqslant 4M$ pour que (18) ait lieu pour $y < e$ et pour $x > \lambda y$.

Par ailleurs, on voit immédiatement que, pour $0 < y < x$,

$$r(x) - r(y) \leqslant \sum_{y<n\leqslant x} \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{y} + \int_y^x \frac{dt}{t} ,$$

ou

(20) $$r(x) - r(y) \leqslant \log \frac{x}{y} + \frac{1}{y} .$$

Ceci entraîne d'abord que, pour $1 \leqslant y < x$,

$$r(x) - r(y) \leqslant \log \frac{x}{y} + \frac{1}{1 + \log y} \qquad (\text{car } \log y \leqslant y - 1) .$$

D'autre part, en désignant par $\omega(x)$ le premier membre de (14), on a, pour $1 \leqslant y < x$,

$$[r(x) - r(y)] \log x = r(x) \log x - r(y) \log y - r(y) \log \frac{x}{y}$$

$$= - \sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} [r(\tfrac{x}{n}) - r(\tfrac{y}{n})] + \omega(x) - \omega(y) - r(y) \log \frac{x}{y} ,$$

d'où, en tenant compte de (19) et (20),

$$[r(x) - r(y)] \log x \geqslant - \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} [\log \frac{x}{y} + \frac{n}{y}] - |\omega(x)| - |\omega(y)| - M \log \frac{x}{y} .$$

Avec (14) , (16) et (17), ceci entraîne qu'il existe $A > 0$ tel que, pour $1 \leqslant y < x \leqslant \lambda y$,

$$[r(x) - r(y)] \log x \geqslant - (\log x) \log \frac{x}{y} - A .$$

Alors, pour $e \leqslant y < x \leqslant \lambda y$,

$$r(x) - r(y) \geqslant - \log \frac{x}{y} - \frac{A}{\log x} \geqslant - \log \frac{x}{y} - \frac{2A}{1 + \log y} ,$$

car $\log x > \log y \geqslant \frac{1 + \log y}{2}$.

5. - Nous allons maintenant introduire le résultat géométrique auquel nous avons fait allusion au début.

LEMME. - *Soit* P *un polygone sans point double dans* R^2 .
On désigne par S *l'aire intérieure à* P *et par* L *sa longueur quand* R^2 *est normé en prenant*

$$||(x , y)|| = \max[|x| , |y|] .$$

(Autrement dit, on prend la longueur du segment d'extrémités (x_1 , y_1) et (x_2 , y_2) égale à $\max[|x_2 - x_1| , |y_2 - y_1|]$.)
Si P *est contenu dans l'ensemble* R *des points* (x , y) *tels que* $|x| \leqslant A$ *et* $|y| \leqslant B$, *on a*

$$S \leqslant L(A + B - \sqrt{A^2 + B^2}) .$$

Démonstration. - Remarquons d'abord que l'on a

$$\max[|x_2 - x_1| , |y_2 - y_1|] = \frac{1}{2}[|(x_2 + y_2) - (x_1 + y_1)| + |(x_2 - y_2) - (x_1 - y_1)|] ,$$

car

$$\max(|x| , |y|) = \frac{1}{2}[|x + y| + |x - y|] .$$

Il en résulte que, si m_1 et M_1 sont le minimum et le maximum de $x + y$, et m_2 et M_2 le mihimum et le maximum de $x - y$ pour les points d'un polygone sans point double P contenu dans R , la longueur de P est au moins égale à

$$(M_1 - m_1) + (M_2 - m_2) .$$

Ceci est la longueur du polygone P' frontière de l'ensemble des points (x, y) tels que

$$|x| \leqslant A \ , \quad |y| \leqslant A \ , \quad m_1 \leqslant x + y \leqslant M_1 \quad \text{et} \quad m_2 \leqslant x - y \leqslant M_2 \ .$$

P' est encore un polygone sans point double contenu dans R .

De plus, il est clair que l'aire intérieure à P est au plus égale à l'aire intérieure à P' . Le rapport $\frac{S}{L}$ a donc, pour P' , une valeur au moins égale à celle qu'il a pour P .

Nous appellerons "opération O_1 " l'opération qui fait passer de P à P' .

Il faut noter que P' est convexe et a tous ses côtés parallèles aux axes ou à leurs bissectrices. Si P est symétrique par rapport à l'un des axes, P' l'est aussi.

Nous considérerons aussi l'opération sur les polygones convexes définie de la manière suivante :

a et b étant le minimum et le maximum des abscisses des points de P , soient pour $a \leqslant x \leqslant b$, $f_1(x)$ et $f_2(x)$ la plus petite et la plus grande ordonnée des points de P d'abscisse x (de sorte que les fonctions f_1 et f_2 sont linéaires par morceaux sur l'intervalle (a, b)).

On forme le polygone réunion des lignes brisées définies par

$$y = \frac{1}{2}\,[f_2(x) - f_1(x)] \ , \quad x \in (a \ , b) \ ,$$

et

$$y = -\frac{1}{2}\,[f_2(x) - f_1(x)] \ , \quad x \in (a \ , b) \ ,$$

et, s'il y a lieu, des segments parallèles à Oy joignant leurs extrémités gauches et leurs extrémités droites.

Ce nouveau polygone est encore convexe, et il est symétrique par rapport à Ox .

Nous appellerons cette opération "symétrisation par rapport à Ox ".

On définit de même une symétrisation par rapport à Oy .

On voit que chacune de ces deux opérations ne change pas l'aire intérieure au polygone, ni sa longueur si ses côtés sont tous parallèles aux axes ou à leurs bissectrices (3), et transforme un polygone contenu dans R en un polygone contenu dans R .

---

(3) De toute façon, la longueur ne peut être que diminuée.

Ceci dit, en effectuant successivement sur un polygone sans point double P contenu dans R l'opération O_1, puis la symétrisation par rapport à Ox, puis l'opération O_1, puis la symétrisation par rapport à Oy, puis encore l'opération O_1, on obtient un nouveau polygone sans point double contenu dans R, pour lequel le rapport $\frac{S}{L}$ a une valeur au moins égale à celle qu'il a pour P, et qui est convexe et symétrique par rapport à Ox et Oy, et a tous ses côtés parallèles aux axes ou à leurs bissectrices.

C'est la frontière d'un ensemble qui peut être défini comme ensemble des points de R tels que $|x| + |y| \leqslant \lambda$, où $0 < \lambda \leqslant A + B$.

Il est facile de calculer en fonction de λ le rapport $\frac{S}{L}$ pour ce polygone, et on voit que la plus grande valeur possible est $A + B - \sqrt{A^2 + B^2}$.

5.1. COROLLAIRE. - <u>Soient</u> u <u>et</u> v <u>deux fonctions linéaires par morceaux sur un intervalle</u> $[\alpha, \beta]$ <u>et soient</u>

$$I = \int_\alpha^\beta u(t)\, dv(t) \qquad \underline{\text{et}} \qquad L = \int_\alpha^\beta \max[|u'(t)|, |v'(t)|]\, dt .$$

<u>Si</u> $|u(t)| \leqslant A$ <u>et</u> $|v(t)| \leqslant B$ <u>pour tout</u> $t \in [\alpha, \beta]$, <u>on a</u>

$$|I| \leqslant (L + 2A + 2B)(A + B - \sqrt{A^2 + B^2}) .$$

En effet, quand t croît de α à β, le point $[u(t), v(t)]$ décrit une ligne brisée contenue dans l'ensemble R du lemme.

Si celle-ci est un polygone sans point double, $|I|$ est l'aire intérieure et L la longueur considérée dans le lemme. Celui-ci donne

$$|I| \leqslant L(A + B - \sqrt{A^2 + B^2}) .$$

On obtient la même inégalité dans le cas d'un polygone quelconque, en le décomposant en une réunion de polygones sans point double.

Pour une ligne brisée non fermée, on se ramène au cas d'un polygone en ajoutant un segment porté par Oy et deux segments parallèles à Ox.

6. - Nous allons maintenant transformer la formule (1) pour pouvoir appliquer le résultat précédent.

Tout d'abord, posons, pour $\xi \geqslant 0$, $\rho(\xi) = r(e^\xi)$.

D'après (18), on a, pour $0 \leqslant \xi < \xi'$,

$$|\rho(\xi') - \rho(\xi)| \leqslant \xi' - \xi + \frac{K}{1+\xi} .$$

En prenant $x = e^{\xi}$, la formule (1) s'écrit

(21) $$\xi\rho(\xi) = \sum_{\log n \leqslant \xi} r_n \, \rho(\xi - \log n) + O[1] .$$

Nous allons introduire maintenant une fonction σ définie comme suit pour $\xi \geqslant 0$.

Déterminons une suite de nombres réels $\xi_0 , \xi_1 , \dots , \xi_\nu , \dots$ par

$$\xi_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi_{\nu+1} = \xi_\nu + \frac{1}{\sqrt{1+\xi_\nu}} \quad \text{pour} \quad \nu = 0 , 1 , 2 , \dots .$$

Cette suite est strictement croissante et tend vers $+\infty$.

Prenons $\sigma(\xi_\nu) = \rho(\xi_\nu)$ pour $\nu = 0 , 1 , 2 , \dots$ et σ linéaire sur chaque intervalle $[\xi_\nu , \xi_{\nu+1}]$.

D'après (19), il est clair que $|\sigma(\xi)| \leqslant M$ pour $\xi \geqslant 0$.

Sur l'intervalle ouvert $]\xi_\nu , \xi_{\nu+1}[$,

$$|\sigma'(\xi)| = \frac{|\rho(\xi_{\nu+1}) - \rho(\xi_\nu)|}{\xi_{\nu+1} - \xi_\nu} \leqslant 1 + \frac{K}{(1+\xi_\nu)(\xi_{\nu+1} - \xi_\nu)} = 1 + \frac{K}{\sqrt{1+\xi_\nu}} .$$

Par suite, $|\sigma'(\xi)| \leqslant 1 + K$ pour $\xi > 0$ (et différent de tous les ξ_ν) et $\overline{\lim_{\xi\to+\infty}} |\sigma'(\xi)| \leqslant 1$.

De plus, on a sur $[\xi_\nu , \xi_{\nu+1}]$

$$\begin{aligned} |\sigma(\xi) - \rho(\xi)| &\leqslant |\sigma(\xi) - \rho(\xi_\nu)| + |\rho(\xi) - \rho(\xi_\nu)| , \\ &\leqslant |\rho(\xi_{\nu+1}) - \rho(\xi_\nu)| + |\rho(\xi) - \rho(\xi_\nu)| , \\ &\leqslant \xi_{\nu+1} - \xi_\nu + \frac{K}{1+\xi_\nu} + \xi - \xi_\nu + \frac{K}{1+\xi_\nu} , \\ &\leqslant 2[\xi_{\nu+1} - \xi_\nu + \frac{K}{1+\xi_\nu}] = 2[\frac{1}{\sqrt{1+\xi_\nu}} + \frac{K}{1+\xi_\nu}] . \end{aligned}$$

Donc, quand ξ tend vers $+\infty$,

(22) $$\sigma(\xi) - \rho(\xi) = o[1] .$$

Par suite, pour démontrer que $r(x)$ tend vers zéro pour x infini, on est ramené à démontrer que $\sigma(\xi)$ tend vers zéro pour ξ infini.

6.1. - On déduit de (22) et de $\sum_{n\leqslant x} |r_n| = O[\log x]$, qui résulte immédiatement de (16), que l'on a

$$\sum_{\log n\leqslant\xi} r_n[\rho(\xi - \log n) - \sigma(\xi - \log n)] = o[\xi] . \tag{23}$$

On a d'autre part

$$\sum_{\log n\leqslant\xi} r_n\,\sigma(\xi - \log n) = r_1\,\sigma(\xi) + \int_0^\xi \sigma(\xi - t)\,d\rho(t) ,$$

$$\int_0^\xi \sigma(\xi - t)\,d\rho(t) = \int_0^\xi \sigma(\xi - t)\,d\sigma(t) + \int_0^\xi \sigma(\xi - t)\,d[\rho(t) - \sigma(t)]$$

et

$$\int_0^\xi \sigma(\xi-t)\,d[\rho(t)-\sigma(t)] = \sigma(o)[\rho(\xi)-\sigma(\xi)] + \int_0^\xi [\rho(t)-\sigma(t)]\sigma'(\xi-t)\,dt$$
$$= o[\xi] ,$$

de sorte que

$$\sum_{\log n\leqslant\xi} r_n\,\sigma(\xi - \log n) = \int_0^\xi \sigma(\xi - t)\,d\sigma(t) + o[\xi] .$$

En ajoutant ceci à (23), on obtient

$$\sum_{\log n\leqslant\xi} r_n\,\rho(\xi - \log n) = \int_0^\xi \sigma(\xi - t)\,d\sigma(t) + o[\xi] ,$$

ce qui, avec (21) et (22), donne

$$\sigma(\xi) = \frac{1}{\xi}\int_0^\xi \sigma(\xi - t)\,d\sigma(t) + o[1] . \tag{24}$$

7. - Posons $U = \overline{\lim}_{\sigma\to+\infty} |\sigma(\xi)|$.

Nous devons montrer que $U = 0$.

On sait déjà que U est un nombre fini puisque $|\sigma(\xi)| \leqslant M$ pour $\xi \geqslant 0$.

Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\xi_0 > 0$ tel que, pour $\xi \geqslant \xi_0$,

$$|\sigma(\xi)| \leqslant U + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |\sigma'(\xi)| \leqslant 1 + \varepsilon .$$

Si $\xi > 2\xi_0$, on a pour $\xi_0 \leqslant t \leqslant \xi - \xi_0$

$$|\sigma(t)| \leqslant U + \varepsilon, \quad |\sigma(\xi - t)| \leqslant U + \varepsilon, \quad |\sigma'(t)| \leqslant 1 + \varepsilon \text{ et } |\sigma'(\xi - t)| \leqslant 1 + \varepsilon .$$

Par suite, si $u(t) = \sigma(\xi - t)$ et $v(t) = \sigma(t)$, de sorte que u et v sont linéaires par morceaux sur $[\xi_0 , \xi - \xi_0]$, on a

$$\int_{\xi_0}^{\xi-\xi_0} \max[|u'(t)| , |v'(t)|] \, dt \leqslant (1 + \varepsilon)(\xi - 2\xi_0)$$

et, d'après ce qui a été dit au § 5.1,

$$\left| \int_{\xi_0}^{\xi-\xi_0} \sigma(\xi - t) \, d\sigma(t) \right| \leqslant [(1 + \varepsilon)(\xi - 2\xi_0) + 4(U + \varepsilon)](U + \varepsilon)(2 - \sqrt{2}) .$$

Par ailleurs, on a évidemment

$$\left| \int_0^{\xi_0} \sigma(\xi - t) \, d\sigma(t) \right| \leqslant (1 + K)M\xi_0 \quad \text{et} \quad \left| \int_{\xi-\xi_0}^{\xi} \sigma(\xi - t) \, d\sigma(t) \right| \leqslant (1 + K)M\xi_0 .$$

Donc, pour $\xi > 2\xi_0$,

$$\left| \int_0^{\xi} \sigma(\xi - t) \, d\sigma(t) \right| \leqslant 2(1 + K)M\xi_0 + [(1 + \varepsilon)(\xi - 2\xi_0) + 4(U + \varepsilon)](U + \varepsilon)(2 - \sqrt{2}) .$$

Par suite,

$$\overline{\lim_{\xi \to +\infty}} \frac{1}{\xi} \left| \int_0^{\xi} \sigma(\xi - t) \, d\sigma(t) \right| \leqslant (1 + \varepsilon)(U + \varepsilon)(2 - \sqrt{2}) .$$

Ceci étant vrai quel que soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\overline{\lim_{\xi \to +\infty}} \frac{1}{\xi} \left| \int_0^{\xi} \sigma(\xi - t) \, d\sigma(t) \right| \leqslant (2 - \sqrt{2})U ,$$

ce qui donne avec (24)

$$U \leqslant (2 - \sqrt{2})U , \qquad \text{d'où } U = 0 .$$