SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU.
THÉORIE DES NOMBRES

EMIL GROSSWALD

Sur la fonction de Riesz

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 6, nº 1 (1964-1965), exp. nº 2, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1964-1965__6_1_A1_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
6e année, 1964/65, n° 2

16 novembre 1964

SUR LA FONCTION DE RIESZ

par Emil GROSSWALD

1. Les résultats de Marcel RIESZ.

En 1916, M. RIESZ (voir [8]) a trouvé de nouvelles conditions nécessaires et suffisantes pour la validité de l'hypothèse de Riemann (H R). Dans ce but, il a défini et étudié l'intégrale

$$- \frac{1}{2i} \int_{(\sigma)} \frac{z^s \, ds}{\zeta(2s)\, \Gamma(s)\, \sin \pi s} \tag{1.1}$$

prise le long de la parallèle à l'axe imaginaire d'abscisse σ .

Si $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta$ $(\delta > 0$, arbitrairement petit), alors l'intégrale converge uniformément dans la bande $\frac{1}{2} \leqslant \sigma < 1$, et y représente une fonction $F(z)$, holomorphe au moins pour $\Re z > 0$.

En prenant $\sigma = \frac{1}{2}$, le lemme de Riemann-Lebesgue montre que $F(x) = o(x^{1/2})$ lorsque $x \to +\infty$ le long de l'axe réel. D'autre part, en déplaçant la ligne d'intégration à droite, le théorème des résidus donne

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{\zeta(2n)\, \Gamma(n)} , \tag{1.2}$$

ce qui montre que $F(z)$ est une fonction entière. En remplaçant dans (1.2) $\frac{1}{\zeta(2n)}$ par sa série de Dirichlet, et en changeant l'ordre des sommations, on obtient

$$F(x) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^2}\, x \exp(- x/m^2) . \tag{1.3}$$

Soit $\Sigma = \{\sigma \mid \zeta(\sigma + it) = 0\}$ et $\theta = \overline{\lim}_{\sigma\in\Sigma} \sigma$; alors le théorème de Littlewood [6] nous permet de déplacer l'abscisse d'intégration jusqu'à $\sigma = \frac{\theta}{2} + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$, arbitrairement petit). On en déduit que $F(x) = O(x^{\frac{\theta}{2}+\varepsilon})$. Donc si

$$\alpha = \underline{\lim}\{\beta \mid F = O(x^\beta)\}$$

alors $\alpha \leqslant \theta/2$. De (1.3) on obtient aussi facilement que

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(\frac{x}{n^2}) = - x \exp(- x) .$$

Pour obtenir une proposition réciproque, considérons l'intégrale

$$\int_0^\infty F(x)\, x^{-s-3/2}\, dx \, .$$

De $F(x) = O(x)$ $(x \to 0)$ et $F(x) = o(x^{1/2})$ $(x \to +\infty)$, il résulte que l'intégrale converge uniformément pour $(0 <)$ $\varepsilon \leq \sigma \leq \frac{1}{2} - \varepsilon$ $(< \frac{1}{2})$, et représente une fonction $\varphi(s)$, holomorphe pour $0 < \sigma < \frac{1}{2}$. Si $F(x) = O(x^\alpha)$, alors l'intégrale converge (et $\varphi(s)$ est holomorphe) pour $\sigma > \alpha - \frac{1}{2}$. Mais du théorème de Mellin (ou comme le montre RIESZ aussi directement), il résulte que

$$\varphi(s) = - \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - s)}{\zeta(2s + 1)} \, .$$

Donc, si $\varphi(s)$ reste holomorphe pour $\sigma > \alpha - \frac{1}{2}$, alors

$$\zeta(s_1) = \zeta(2s + 1) \neq 0 \, ,$$

pourvu que $\sigma_1 = 2\sigma + 1 > 2(\alpha - \frac{1}{2}) + 1 = 2\alpha$. Il en résulte que $\theta \leq 2\alpha$ et on a le théorème suivant.

THÉORÈME. - $F(x) = O(x^{\frac{\theta}{2}+\varepsilon})$, $F(x) = \Omega(x^{\frac{\theta}{2}-\varepsilon})$.

A cause de ce théorème, nous dirons brièvement que $F(x)$ est d'ordre exact $\theta/2$.

COROLLAIRES.

(i) $F(x) = O(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}) \iff$ H R .

(ii) $F(x) = \Omega(x^{\frac{1}{4}-\varepsilon})$.

(i) n'est que le cas particulier $\theta = \frac{1}{2}$ du théorème ; pour prouver (ii) on observe que si $F(x) = o(x^{\frac{1}{4}-\varepsilon})$, alors $\theta < \frac{1}{2}$, et la fonction $\zeta(s)$ n'aurait pas des racines complexes, ce qui est faux.

M. RIESZ a déterminé aussi la forme de la représentation de $F(z)$ comme produit infini de Weierstrass. De (1.2), il résulte que $F(z)$ est d'ordre 1 , type 1 ; ainsi le produit canonique est de genre zéro ou de genre 1 . RIESZ montre que si $\{z_n\}$ est la suite des zéros de $F(z)$, alors $\Sigma \frac{1}{|z_n|}$ diverge, par conséquent

$$F(z) = Az \exp \alpha z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{z_n}) \exp z/z_n \, .$$

En posant $f(z) = F(z)/z$,

$$A = \lim_{z \to 0} f(z) = - \frac{1}{\zeta(2)}$$

et

$$\{ \frac{1}{\zeta(4)} / (- \frac{1}{\zeta(2)}) \} = \frac{f'(0)}{f(0)} = \lim_{z \to 0} \{\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z_n - z})\} = \alpha \, ;$$

par conséquent,

$$F(z) = -\frac{z}{\zeta(2)} \exp(-\pi^2/15) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp z/z_n \ . \tag{1.4}$$

Enfin, observons encore avec RIESZ que $F(z)$ a au moins une racine réelle, évidemment positive, car autrement, si $x \to +\infty$ par valeurs réelles, on obtiendrait

$$x \exp(-x) = \left|\sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{x}{n^2}\right)\right| \geqslant |F(x)| \quad \text{avec} \quad F(x) = \Omega(x^{\frac{1}{4}-\varepsilon}) \ ,$$

ce qui est absurde.

2. Les zéros de $F(z)$.

Avec tant de représentations explicites de $F(z)$, on pourrait espérer que la décision concernant son accroissement le long de l'axe réel se réduise à une question de calcul patient ; il n'en est rien, et apparemment jusqu'à présent, la fonction $F(z)$ n'a fourni aucune information sur la fonction $\zeta(s)$. En vue du fait que l'accroissement des fonctions entières est étroitement lié à la distribution de leurs zéros, on a essayé de déterminer celle-ci le plus exactement possible. Ainsi, par exemple, si l'on savait qu'il y a une infinité de zéros réels, assez près les uns des autres, alors on pourrait utiliser des bornes connues de $|F'(z)|$, pour obtenir des bornes non triviales pour l'accroissement de $|F(z)|$ même. Mais jusqu'en 1963, aucun zéro réel n'avait été trouvé, à part celui déjà connu par RIESZ (de valeur $\simeq 1{,}2$), bien que l'on ait calculé les valeurs de $F(z)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 50\,000$ au moins. Un progrès important a été fait par H. WILF, lequel a prouvé (voir [10]) le théorème suivant.

THÉORÈME (H. WILF). - Soient $z_n = r_n \exp i\theta_n$, $0 < r_1 \leqslant r_2 \leqslant \dots$ les zéros de $f(z)$ et $0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \dots$ ses zéros réels ; alors

(2.1) $n(r) = \sum_{r_n \leqslant r} 1 \sim r/n$ et $r_n \sim n\pi$;

(2.2) La somme $\sum |\cos \theta_n| r_n^{-1}$ converge ;

(2.3) $\sum_{x_n < x} 1 = \Omega(\log x)$, mais la somme $\sum x_n^{-1}$ converge ;

(2.4) $\sum_{r_n \leqslant r, \theta_n \leqslant \pi/2} 1 = o(r)$;

(2.5) L'ensemble $\{r_n \cos \theta_n\}$ n'est pas borné.

<u>Esquisse de démonstration</u>. - $f(z)$ est borné sur l'axe imaginaire, car

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^2} \exp(-\,it/m^2)\right| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mu(m)|}{m^2} = \zeta(2)/\zeta(4) \ ;$$

donc, étant d'ordre 1 , type moyen, les conditions du théorème de Cartwright ([3], p. 87-88) sont satisfaites, et on conclut :

(i) il y a deux constantes réelles, A_1 , A_2 , $-\infty < A_1 \leqslant A_2 < +\infty$, telles que l'indicatrice de Phragnien-Lindelöf soit

$$h(\theta) = \max\{A_1 \cos\theta \ , \ A_2 \cos\theta\} \ ;$$

(ii) $n(r) \sim (A_1 - A_2)\,\frac{r}{n}$;

(iii) $\sum |\cos\theta_n| r_n^{-1}$ converge.

La conclusion (iii) est identique au (2.2) du théorème, et (2.4), ainsi que la seconde affirmation de (2.3) se déduisent de (2.2) comme simples corollaires. D'autre part, $h(\theta)$ se calcule directement, à l'aide de la transformée de Borel $\varphi(z)$ de $f(z)$. En effet,

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\,1)^{n+2}}{\zeta(2n+2)z^{n+1}} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{1+zm^2} \ ;$$

donc, le polygone de Borel (et, en vertu du théorème de Pólya, le diagramme de l'indicatrice aussi) se réduit au segment $[-\,1\ ,\ 0]$, de sorte que

$$h(\theta) = \max(0 \ , \ -\cos\theta) \ .$$

Par conséquent, $A_1 = -\,1$, $A_2 = 0$, et le (ii) du théorème de Cartwright devient le (2.1) du théorème de Wilf. (2.5) est la conséquence d'un théorème de Bohr (voir, e. g. [1], p. 162) sur les fonctions presque périodiques (la représentation (1.3) montre que $f(z)$ n'a que des exposants λ_n négatifs, $\overline{\lim}\,\lambda_n = 0$, mais zéro n'est pas un exposant, donc il y a des zéros dans tout demi-plan $\sigma > \sigma_0$). Enfin, la première affirmation de (2.3) résulte d'un théorème de Pólya (voir [7]), en observant que

$$\int_1^{\infty} F(x)\,x^{-s}\,dx = -\int_0^1 F(x)\,x^{-s}\,dx - \Gamma(2-s)/\zeta(2s-2) = \Phi(s)$$

est holomorphe pour $\sigma > 1 + \frac{\theta}{2}$, méromorphe, sans être holomorphe, pour $1 + \frac{\theta}{2} - \varepsilon < \sigma < 1 + \frac{\theta}{2}$ $(\varepsilon > 0)$, et $\Phi(s)$ est holomorphe pour $s = 1 + \frac{\theta}{2}$.

Aux résultats de WILF, on peut ajouter le suivant.

THÉORÈME. - Soit σ_0 la racine réelle (unique) de l'équation

$$\sum_{m=2}^{\infty} m^{-2} \exp \sigma_0(1 - m^{-2}) = 1 \ ;$$

alors il n'y a pas de racine z_n avec $\Re z_n < \sigma$.

En effet,

$$|f(z)| \geqslant \exp(-\sigma) - |\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^2} \exp(-\sigma/m^2)| \geqslant \exp(-\sigma)\{1 - \sum_{m=2}^{\infty} m^{-2} \exp \sigma(1 - m^2)\}$$

et la dernière somme croît monotoniquement avec σ de 0 à $+\infty$.

L'étude des racines de $F(x)$ peut être complétée par la détermination des sommes

$$S_k = \sum_n z_n^{-k-1} \qquad (k = 0 , 1 , 2 , \ldots) .$$

Pour $k > 0$, ces séries convergent absolument, et s'obtiennent facilement en observant que d'une part

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n-2}}{\zeta(2n)(n-2)!} \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n-1}}{\zeta(2n)(n-1)!} ,$$

de sorte que les $A_k = \frac{1}{k!}\{\frac{d^k}{dz^k}(\frac{f'}{f})\}_{z=0}$ s'expriment à l'aide des $\zeta(2n)$; d'autre part,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{15}{\pi^2} + \sum_n (\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z_n - z}) \quad \text{et} \quad \frac{d^k}{dz^k}(\frac{f'}{f}) = -k! \sum_n (z_n - z)^{-k-1} ,$$

de sorte que $A_k = -S_k$. Pour $k = 0$, la série ne converge pas absolument, mais des théorèmes de Y. B. LEWIN et PFLUGER (voir par exemple [2], § 8.4, en particulier p. 147) nous permettent de calculer

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{|z_n|<r} z_n^{-1} = -\frac{1}{2} + \frac{15}{\pi^2} .$$

Les valeurs des S_{k+1} montrent que la contribution principale est due à la première racine réelle $(x_1 \simeq 1 , 2)$.

3. Généralisations (voir [4]).

Soit $\Phi = \{\varphi(s)\}$ l'ensemble des fonctions analytiques pour $\sigma > \frac{1}{4}$ et telles que l'intégrale

$$-\frac{1}{2i} \int_{(\sigma)} \frac{z^s \, ds}{\zeta(2s)\, \varphi(s) \, \sin \pi s}$$

converge pour $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ et $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$ et que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{\zeta(2n)\, \varphi(n)}$$

converge pour tout z complexe.

Alors le théorème des résidus montre que les deux représentent une même fonction entière, $F_\varphi(z)$. On montre, comme dans le cas particulier précédent, $\varphi(s) = \Gamma(s)$, que pour $\theta < 1$,

$$F(x) = O(x^{\frac{\theta}{2}+\varepsilon}) \quad \text{et} \quad F(x) = o(x^{1/2}) \quad \text{si} \quad \theta = 1 .$$

$E_\varphi(-y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-y)^n}{\varphi(n)}$ est une fonction entière. Soit $\Phi_1 \subset \Phi$ le sous-ensemble de ces fonctions $\varphi(s)$, telles que $\int_0^\infty y^{-s-3/2} E(-y)\, dy$ converge en quelque bande $\frac{1}{2} - \eta < \sigma < \frac{1}{2}$ $(\eta > 0)$, et y représente une fonction holomorphe $H(\frac{1}{2} - s)$, sans zéros pour $-\frac{1}{4} < \sigma < 0$. Alors, par l'inversion de l'intégrale,

$$G_\varphi(s) = \int_0^\infty F_\varphi(x)\, x^{-s-3/2}\, dx = \frac{H(\frac{1}{2} - s)}{\zeta(2s + 1)} .$$

Ceci montre que $F_\varphi(x) = O(x^\alpha)$ implique l'holomorphie de $G_\varphi(s)$ pour $\sigma > \alpha - \frac{1}{2}$, d'où il résulte que

$$\zeta(s_1) = \zeta(2s + 1) \neq 0 \quad \text{pour} \quad \sigma_1 = 2\sigma + 1 > 2\alpha ,$$

donc, comme pour $\varphi(s) = \Gamma(s)$, que $F(x)$ est d'ordre exact $\frac{\theta}{2}$. En prenant, par exemple, pour $\varphi(s)$ les fonctions de la première colonne, on obtient les fonctions $F_\varphi(x)$ du tableau suivant :

(T)

$\varphi(s)$	$F_\varphi(x)$
$\Gamma(s)$	$\sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n^2}\, x \exp(-x/n^2)$ ($\mu(n)$ = fonction de Möbius)
$\frac{\Gamma(s)}{\zeta(4s)}$	$\sum_1^\infty \frac{\lambda(n)}{n^2}\, x \exp(-x/n^2)$ ($\lambda(n)$ = fonction de Liouville)
$\frac{\Gamma(s)}{\zeta'(2s) + \zeta(2s)/(2s-1)}$	$\sum_2^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^2}\, x \exp(-x/n^2) - \frac{1}{2}\sqrt{\pi x}$ ($\Lambda(n)$ = fonction de von Mangoldt)
$\frac{\Gamma(s)}{(2s-1)\,\zeta'(2s)}$	$\sum_2^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^4}\, x \exp(-x/n^2) - \frac{1}{4}\sqrt{\pi x}$
$\frac{\Gamma(s)}{(s-1)\,\zeta(s)}$	$\sum_1^\infty \frac{\lvert\mu(n)\rvert}{n^2}\, x^2 \exp(-x/n^2) - x/\zeta(2)$
$\frac{\Gamma(s)}{\zeta(s)}$	$\sum_1^\infty \frac{\lvert\mu(n)\rvert}{n}\, x(1 - \exp(-\frac{x}{n})) - \frac{x}{\zeta(2)}\left(\log x + 2\gamma - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)$

Toutes les $F_\varphi(x)$ du tableau sont d'ordre exact $\frac{\theta}{2}$, à l'exception, peut-être, de la quatrième, laquelle est toujours $O(x^{\frac{\theta}{2}+\varepsilon})$, mais peut-être même $o(x^{\frac{\theta}{2}})$.

4. Relations intégrales (voir [4]).

Pour un $\varphi \in \Phi_1$ donné, soit

$$S(s) = S_\varphi(s) = \sum_{m \geqslant s/2} \frac{(-1)^m}{\zeta(2m)\,\varphi(m)} ;$$

alors, pour $0 < r < 2$,

$$\int_r^\infty x^s \log x\, S(s)\, ds = \int_r^\infty x^s \log x \left\{ \sum_{m \geqslant s/2} \frac{(-1)^m}{\zeta(2m)\,\varphi(m)} \right\} ds$$

$$= \sum_{m=1}^\infty \frac{(-1)^m}{\zeta(2m)\,\varphi(m)} \int_r^{2m} x^s \log x\, ds = \sum_{m=1}^\infty \frac{(-1)^m}{\zeta(2m)\,\varphi(m)} (x^{2m} - x^r) = F(x^2) - x^r S(1) ,$$

donc

$$\int_\gamma^\infty x^{s-r} \log x\, S(s)\, ds = -S(1) + x^{-r} F(x^2) .$$

Pour $r = 1$, compte tenu de $F(x^2) = o(x)$, on obtient

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^\infty x^{s-1} \log x\, S(s)\, ds = -S(1) . \tag{4.1}$$

Plus généralement, si $\theta < 1$ et $\theta < r$ (< 2),

$$\lim_{x\to\infty} \int_r^\infty x^{s-r} \log x\, S(s)\, ds = -S(1) , \tag{4.2}$$

et cette relation est fausse pour $r < \theta$; donc, si $R = \{r \mid (4.2) \text{ est correcte}\}$, alors

$$\theta = \underline{\lim}_{r \in R}\, r .$$

En faisant le changement de variable

$$v = \log s^{-1} , \quad u = \log \log x , \quad S(e^{-v}) = V(v)$$

et moyennant la définition

$$K_u(W) = \begin{cases} \exp e^W & \text{si } w > u \\ 0 & \text{si } w < u , \end{cases}$$

(4.1) et (4.2) deviennent

$$\lim_{u\to\infty} \exp(-e^u) \int_{-\infty}^\infty K_u(v)\, V(u-v)\, dv = -V(0) \tag{4.1'}$$

et

$$(4.2') \qquad \lim_{u\to\infty} \exp(-e^{u+\rho}) \int_{-\infty}^{\infty} K_{u+\rho}(v)\, V(u-v)\, dv = -V(0) ,$$

respectivement ; (4.1') est toujours valable, (4.2') l'est si et seulement si

$$\log \theta < \rho \quad (< 0) .$$

L'intérêt de ces généralisations (§ 3, 4 et 5) réside dans la possibilité de trouver peut-être une fonction $\varphi(s) \in \Phi_1$ telle qu'il soit possible : soit de calculer avec une précision suffisante une des sommes figurant dans le tableau (T) ; soit de vérifier le domaine de validité de (4.2), ou de (4.2') , etc. Ceci nous permettrait alors d'obtenir des bornes non-triviales pour θ .

5. Un théorème curieux.

Soit $\varphi \in \Phi$, $m \in \underset{\sim}{Z}^+$. Posons

$$\Psi(z) = \Psi_{\varphi,m}(z) = z^{1-2m} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^{nm}}{\zeta(\frac{n}{2})\ \varphi(\frac{n}{2})} .$$

Notons par $M(r)$ le $\max_{|z|=r} \Psi(z)$ et définissons l'ensemble de fonctions

$$\Omega_m = \{\Psi_{\varphi,m}(z) \mid \overline{\lim}\, \frac{\log M(r)}{r^{1/2}} = 0\} .$$

THÉORÈME. - Si, pour $m \in \underset{\sim}{Z}^+$ donné, Ω_m n'est pas vide, alors $\theta \geqslant 1 - \frac{1}{m}$.

Esquisse de démonstration. - En faisant $z \to \infty$ le long du rayon $z = x \exp \pi i/2m$ $(x > 0)$,

$$\Psi_{\varphi,m}(z) = -x^{1-2m} \exp \pi i/2m\, \{F_1(x^{2m}) + iF_2(x^{2m})\} ,$$

avec

$$F_j(y) = -\frac{1}{2i} \int_{(\sigma)} \frac{y^s\, ds}{\zeta(s)\ \varphi(s)\ \sin(\pi(s + \frac{j-1}{2}))} \quad \text{pour} \quad |\arg y| < \frac{\pi}{2} , \quad \theta < \sigma < 1 .$$

Donc, $F_j(y) = o(y^{\theta+\varepsilon/2m})$,

$$\Psi_{\varphi,m}(z) = o(x^{1-2m+2m(\theta+\frac{\varepsilon}{2m})}) = o(x^{1-2m(1-\theta)+\varepsilon}) .$$

Si $m > \frac{1+\varepsilon}{2(1-\theta)}$, alors $\Psi_{\varphi,m}(z) = o(x^{-\eta})$ $(\eta > 0)$, ce qui contredit le théorème de Wiman généralisé ([9], p. 275)

Remarque. - Il est bien possible que Ω_m soit vide pour tout $m \in \underset{\sim}{Z}^+$.

6. Formule explicite.

Si dans

$$f(x^2) = \sum_1^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} \exp(-x^2/n^2) ,$$

on remplace l'exponentielle par

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)} \Gamma(s)\ (\frac{x}{n})^{-2s}\ ds \qquad (0 < \sigma < \frac{1}{2}) ,$$

si on interchange l'ordre des opérations $\int_{(\sigma)} \dots ds$ et $\sum_n$ (ce qui est permis pour $\sigma \leqslant \frac{1}{2} - \varepsilon$) et si on déplace ensuite la ligne d'intégration à $\sigma = 1 + \varepsilon$ en tenant compte des résidus, on obtient successivement :

$$f(x^2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)} x^{-2s}\ \frac{\Gamma(s)}{\zeta(2-2s)}\ ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{(1+\varepsilon)} x^{-2s}\ \frac{\Gamma(s)}{\zeta(2-2s)}\ ds + \sum_n \frac{\Gamma(1-\rho_n/2)x^{\rho_n-2}}{2\zeta_1(\rho_n)} ;$$

ici $\frac{1}{\zeta_1(\rho_n)} = \mathrm{Res}(\frac{1}{\zeta(s)})_{s=\rho_n}$ et la somme prise sur toutes les racines complexes ρ_n de $\zeta(s)$ (bien que probablement pas absolument convergente) converge à un groupement convenable des termes. A l'aide de l'équation fonctionnelle de la fonction $\zeta(s)$ et ensuite de la formule de Legendre pour $\Gamma(s)$, l'intégrale devient

$$\frac{\pi^{-1/2}}{2\pi i}\int_{(\sigma)} \frac{y^{2s}\ ds}{\zeta(2s-1)\ \Gamma(s-1/2)\ \sin \pi s} \quad \text{avec} \quad y = \pi/x \quad \text{et} \quad \sigma = 1 + \varepsilon .$$

Pour ce σ , la série de Dirichlet $\frac{1}{\zeta(2s-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{2s-1}}$ converge absolument, et l'intégrale peut s'écrire

$$I = \pi^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(n)\ \frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)} \frac{(y/n)^{2s}\ ds}{\Gamma(s-\frac{1}{2})\ \sin \pi s} .$$

A l'aide du théorème des résidus

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)} \frac{z^{s}\ ds}{\Gamma(s-\frac{1}{2})\ \sin \pi s} = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\ z^n}{\Gamma(n-\frac{1}{2})} = +\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\ \frac{z^{n+1}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} = -\frac{2z^2}{\pi^{3/2}}\ \varphi(\sqrt{2z}) ,$$

avec $\varphi(v) = 1 - \frac{v^2}{1.3} + \frac{v^4}{1.3.5} - \dots = \frac{\exp(-v^2/2)}{v}\int_0^v \exp t^2/2\ dt$. Par conséquent,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)} \frac{(y/n)^{2s}\ ds}{\Gamma(s-\frac{1}{2})\ \sin \pi s} = -(\frac{2}{\pi^3})^{1/2}\ (\frac{y}{n})^3\ \exp(-y^2/n^2)\int_0^{\sqrt{2}\frac{y}{n}} \exp t^2/2\ dt$$

et, en observant que, pour $y \to 0$,

$$\int_0^{\sqrt{2}\ y/n} \exp t^2/2\ dt = \sqrt{2}\ \frac{y}{n} + O(\frac{y^3}{n^3}) ,$$

on obtient

$$I = -\pi^{-1/2}\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(n).2^{1/2}\,\pi^{-3/2}\,\frac{y^3}{n^3}.2^{1/2}\,\frac{y}{n}\left(1+O\left(\frac{y^2}{n^2}\right)\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi^2}\,y^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^3}\left(1+O\left(\frac{y^2}{n^2}\right)\right) = -\frac{2y^4}{\pi^2\,\zeta(3)} + O(y^6)\ .$$

Donc,

$$f(x^2) = \sum_n \frac{\Gamma(1-\rho_n/2)}{2\zeta_1(\rho_n)}\,x^{\rho_n-2} - \frac{2}{\pi^2\zeta(3)}\,y^4 + O(y^6) = \sum_n \frac{\Gamma(1-\rho_n/2)}{2\zeta_1(\rho_n)}\,x^{\rho_n-2} - \frac{2\pi^2}{\zeta(3)}x^{-4} + O(x^{-6})\ ,$$

de sorte que

$$F(x) = x\,f(x) = \sum_n \frac{\Gamma(1-\rho_n/2)}{2\zeta_1(\rho_n)}\,x^{\rho_n/2} - \frac{2\pi^2}{\zeta(3)}\,x^{-1} + O(x^{-2})\ .$$

Cette formule explicite est à rapprocher par exemple de (2.516) en [5] ; on y voit clairement pourquoi $F(x)$ est d'ordre exact $\theta/2$.

7. Considérations p-adiques.

Si l'on remplace en (1.2), $\zeta(2n)$ par sa valeur $(-1)^{n-1}\frac{(2\pi)^{2n}\,B_{2n}}{2(2n)!}$ (B_{2n} = nombres de Bernoulli) et fait les changements de variables et fonctions $x = 4\pi^2 y$ et $G(y) = -\frac{F(4\pi^2 y)}{2y}$, alors

$$G(y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{n!}\,\frac{y^n}{B_{2n+2}}\ .$$

On voit facilement à partir de (1.2) que si l'on prend la somme des termes $n \leqslant N = [xe] + 1$, alors la contribution des termes négligés est d'ordre $O(x^{\frac{1}{4}-\epsilon})$. Soit donc $N = [4\pi^2\,ey] + 1$. Considérons les sommes finies

$$G_N(y) = \sum_{n=0}^{N}\frac{(2n+2)!}{n!}\,\frac{y^n}{B_{2n+2}}\ .$$

Ceci étant un nombre rationnel, on peut considérer l'ensemble de ses valeurs absolues, p-adiques et ordinaires.

La formule du produit s'applique et donne

$$\prod_{k=0}^{\infty}|G_N(y)|_{p_k} = 1\ ,$$

avec $|G_N(y)|_{p_0} = |G_N(y)|$, la valeur absolue ordinaire. Des bornes pour $|G_N(y)|_p$ pourraient donc, en principe, donner des bornes pour $|G_N(y)|$, c'est-à-dire pour $|G(y)|$, donc pour $|F(x)/x|$. Plus précisément, si pour une suite y_ν ($|y_\nu| \to \infty$, $|y_\nu|_{p_k} \to 0$), on obtient soit

$$\prod_{k\neq 0} |G(y_\nu)|_{p_k} < y_\nu^{-\alpha} ,$$

soit

$$\prod_{k\neq 0} |G(y_\nu)|_{p_k} > y_\nu^{-\alpha}$$

avec $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$, on en déduit des estimations non triviales pour $F(x)$.

Cette tentative n'a pas eu de succès pour diverses raisons, comme par exemple, que N n'est pas constant, mais augmente avec y , et que l'on ne connait pas assez bien les nombres premiers qui divisent les numérateurs des nombres de Bernoulli.

BIBLIOGRAPHIE

[[1] BESICOVITCH (A. S.). - Almost periodic functions. - New York, Dover Publications, 1954.

[2] BOAS (R. P.). - Entire functions. - New York, Academic Press Publishers, 1954 (Pure and applied Mathematics, 5).

[3] CARTWRIGHT (M. L.). - Integral functions. - Cambridge, at the University Press, 1956 (Cambridge Tracts im Mathematics and mathematical Physics, 44).

[4] GROSSWALD (Emil). - Considerations concerning the complex roots of Riemann's Zeta-function, Publicationes Mathematicae, Debrecen, t. 10, 1963, p. 157-170.

[5] HARDY (G. H.) and LITTLEWOOD (J. E.). - Contributions to the theory of the Riemann zeta function and the theory of the distribution of primes, Acta Math., t. 41, 1918, p. 119-196.

[6] LITTLEWOOD (J. E.). - Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan $R(s) > 1/2$, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 154, 1912, p. 263-266.

[7] POLYA (G.). - Über das Vorzeichen des Restgliedes im Primzahlsatz, Nachr. von Gesellsch. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1930, p. 19-27.

[8] RIESZ (Marcel). - Sur l'hypothèse de Riemann, Acta Math., t. 40, 1916, p. 185-190.

[9] TITCHMARSH (E. C.). - The theory of functions, 2nd edition. - Oxford, Oxford University Press, 1952.

[10] WILF (H. S.). - On the zeros of Riesz'function in the analytic theory of numbers, Amer. math. Soc., Notices, t. 10, 1963, p. 474.