

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

YVETTE AMICE

Interpolation p -adique sur le cercle unité

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 5 (1963-1964), exp. n° 4, p. 1-3

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1963-1964__5__A4_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTERPOLATION p-ADIQUE SUR LE CERCLE UNITÉ

par Yvette AMICE

(Rédigé par Wadih MOHAMMA)

Soit $U = \mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p ; |x| = 1\}$, et soit $n \rightarrow u_n$, $n \geq 0$, une suite très bien répartie (T. B. R.) dans U . On sait alors que toute fonction continue sur U , $f \in \mathcal{C}(U)$, admet un développement convergent en série d'interpolation :

$$f(x) = \sum_0^{\infty} a_n Q_n(x) \quad \text{où} \quad Q_n(x) = \frac{(x - u_0)(x - u_1) \dots (x - u_{n-1})}{(u_n - u_0)(u_n - u_1) \dots (u_n - u_{n-1})} .$$

On sait d'autre part qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $n \rightarrow \alpha^n$ soit T. B. R. dans U est que :

- $\bar{\alpha}$ soit racine primitive $(p - 1)$ -ème de l'unité,
- $v(\alpha^{p-1}) = 1$.

Il en résulte que, $\forall f \in \mathcal{C}(U)$, on peut écrire :

$$(1) \quad f = \sum_{n \geq 0} u_n (1 - x) \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right)$$

où $|u_n(1 - \alpha^n) - (1 - \alpha)| \rightarrow 0$.

Cas des séries de Laurent convergentes sur U : Coefficients d'interpolation des séries de Laurent.

PROPOSITION. - Soient

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{x^n}$$

où $a_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, et

$$\varphi(x) = x \sum_{n \geq 1} a_n \frac{(x - \alpha) \dots (x - \alpha^{n-1})}{(1 - \alpha) \dots (1 - \alpha^{n-1})} \quad \varphi \in \mathcal{C}(U) .$$

Alors la série d'interpolation de f sur la suite (α^n) est :

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} u_n (1 - x) \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right)$$

où $u_n = \varphi(\alpha^{-n})$.

Démonstration :

- Les polynômes $A_n(x) = \frac{x(x-\alpha) \dots (x-\alpha^{n-1})}{(1-\alpha) \dots (1-\alpha^{n-1})}$, $n \geq 1$ forment une base normale de $\mathcal{C}(U)$.

- Posons d'autre part :

$$\frac{1}{x^k} = \sum_{n \geq 0} d_{n,k} (1-x) \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right).$$

On a

$$\frac{1}{x^k} - \frac{1}{x^{k-1}} = \frac{1-x}{x^k} = \sum_{n \geq 0} (d_{n,k} - d_{n,k-1}) (1-x) \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right).$$

Or

$$\begin{aligned} \alpha^k \frac{1-x}{x^k} &= (1-x) \sum_{n \geq 0} d_{n,k} \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \left(1 - \frac{x}{\alpha^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha^n}\right) \\ &= \sum_{n \geq 0} d_{n,k} (1-x) \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha^n}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1-x}{x^k} &= \sum_{n \geq 0} \frac{d_{n,k}}{\alpha^k} (1-x) \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha^n}\right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{d_{n-1,k}}{\alpha^k} (1-x) \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right). \end{aligned}$$

On a donc la suite d'identités :

$$\begin{aligned} d_{0,k} - d_{0,k-1} &= 0 \quad \forall k \geq 1 \\ \alpha^k (d_{n,k} - d_{n,k-1}) &= d_{n-1,k} \quad \forall n \geq 1 \text{ et } k \geq 1. \end{aligned}$$

Ceci, avec $d_{0,k} = 1$ pour $k = 1$, détermine les $d_{n,k}$ de façon unique.

Or, on peut voir que les coefficients $A_k(\alpha^{-n})$ vérifient ces mêmes conditions.

On a donc :

$$\frac{a_k}{x^k} = \sum_{n \geq 1} a_k d_{n,k} (1-x) \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right)$$

et

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq 1} a_k d_{n,k} (1-x) \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k \geq 1} a_k d_{n,k} \right) (1-x) \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Or

$$\varphi(\alpha^{-n}) = \sum_{k \geq 1} a_k A_k(\alpha^{-n}) = \sum_{k \geq 1} a_k d_{n,k}.$$

On a donc bien :

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \varphi(\alpha^{-n}) (1-x) \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right).$$

COROLLAIRE. - Pour que la fonction

$$\sum_{n \geq 0} b_n (1-x) \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right) = f(x)$$

appartienne à $L(U)$ (c'est-à-dire soit une série de Laurent convergente sur U et de la forme $\sum_{n \geq 1} \frac{c_n}{x^n}$, $c_n \rightarrow 0$), il faut et il suffit qu'il existe $\varphi \in \mathcal{C}(U)$ telle que $b_n = \varphi(\alpha^{-n})$.

On aura alors :

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} a_{-n} x^{-n},$$

un a_{-n} étant défini par :

$$\varphi(x) = x \sum_{n \geq 1} a_{-n} \frac{(x-\alpha) \dots (x-\alpha^{n-1})}{(1-\alpha) \dots (1-\alpha^{n-1})}.$$

Séries de Taylor et séries de Laurent.

PROPOSITION. - Soit $f(x) = \sum_{n \geq 1} a_n X^{-n}$ une série de Laurent restreinte ($a_n \rightarrow 0$). La série de Taylor de sa somme au point α , $|\alpha| = 1$, s'écrit

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \phi(k, \frac{1}{\alpha}) \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^k$$

où

$$\phi(t, y) = \sum_{n \geq 0} a_{m+1} y^{n+1} \binom{t+n}{n},$$

$$\phi(t, y) \in \mathcal{C}_t(\mathbb{Z}_{\sim p}) \hat{\otimes} \mathbf{A}(\mathbb{Z}_{\sim p}).$$

1° On a, pour $|1 - \frac{x}{\alpha}| < 1$,

$$\frac{1}{x^{n+1}} = \frac{1}{\alpha^{n+1}} \sum_{k \geq 1} \binom{-(n+1)}{k} \left(\frac{x}{\alpha} - 1\right)^k,$$

soit

$$\frac{1}{x^{n+1}} = \frac{1}{\alpha^{n+1}} \sum_{k \geq 1} \binom{n+k-1}{n-1} \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^k.$$

2° Les polynômes $\binom{t+n}{n}$ constituent une base normale de $\mathcal{C}_t(\mathbb{Z}_{\sim p})$. La proposition résulte immédiatement des deux remarques ci-dessus.

COROLLAIRE. - La série $\sum_{k \geq 0} b_k \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^k$ est la série de Taylor au point α de la somme d'une série de Laurent à la condition nécessaire et suffisante qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_{\sim p})$ telle que $b_k = \varphi(k)$.