Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Françoise Bertrandias

Diamètre transfini dans un corps valué. Application au prolongement analytique

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 5 (1963-1964), exp. nº 3, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1963-1964__5__A3_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres (Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des Nombres)
5e année, 1963/64, n° 3

9 décembre 1963

DIAMÈTRE TRANSFINI DANS UN CORPS VALUÉ
APPLICATION AU PROLONGEMENT ANALYTIQUE

par Mme Françoise BERTRANDIAS

1 Diamètre transfini.

K désignera un corps valué, à valeurs absolues réelles.

La notion de diamètre transfini, définie par FEKETE [2] pour un compact du plan complexe, peut être étendue à un ensemble borné A d'un corps K.

1.1. Première définition. - Soit S_n un système de n éléments $x_1, \dots, x_n$ de A et

$$\Delta_n = \sup_{S_n} \prod_{h<k} |x_h - x_k|^2 .$$

La suite $\Delta_n^{1/(n(n-1)}$ converge. On pose :

$$d(A) = \lim_{n\to\infty} \Delta_n^{1/n(n-1)} .$$

La démonstration est analogue à celle du cas classique. Si A est compact, il existe un système S_n au moins donnant le maximum Δ_n, mais ce n'est le cas général.

1.2. Deuxième définition. - Soit :

$$P_n(x) = x^n + \lambda_{n-1} x^{n-1} + \dots + \lambda_0$$

un polynôme unitaire de $K[x]$ et :

$$\tau_n = \inf_{P_n} \sup_{x\in A} |P_n(x)| .$$

La suite $\tau_n^{1/n}$ converge. On pose : $\tau(A) = \lim_{n\to\infty} \tau_n^{1/n}$.

Ici encore, démonstration analogue au cas classique. Si K est localement compact, il existe un polynôme $T_n(x)$ au moins donnant le minimum τ_n : on l'appellera polynôme de Čebičev de degré n de A. Dans le cas général on désignera par polynôme de Čebičev de degré n de A relatif à la valeur ε tout polynôme $T_n^{\varepsilon}(x)$ unitaire de degré n tel que :

$$\tau_n \leqslant \sup_{x \in A} |T_n^{\varepsilon}(x)| \leqslant (1 + \varepsilon)\ \tau_n .$$

1.3. Equivalence des deux définitions. - On démontre, comme dans le cas classique, que les deux définitions fournissent le même nombre $d = \tau$ qu'on appellera diamètre transfini de A et qu'on notera $\tau(A)$.

1.4. Propriétés.

1.4.1. Si $A \subset B$, $\tau(A) \leqslant \tau(B)$.

1.4.2. $\tau(\lambda A) = |\lambda|\ \tau(A) \quad (\lambda \in K)$.

1.4.3. $\tau(A \cup \{x_0\}) = \tau(A) \quad (x_0 \in K)$.

1.4.4. Soit $\overline{A}$ l'adhérence de A dans K . On a : $\tau(\overline{A}) = \tau(A)$.

1.4.5. Soient $P(x)$ un polynôme unitaire de degré k de $K[x]$ et A un ensemble borné de K . On considère, dans la clôture algébrique Ω de K , l'ensemble $B(A , P)$ défini par :

$$B(A , P) = \{x \in \Omega \ ;\ P(x) = y \text{ pour tout } y \in A\} .$$

On a : $\tau(B) = \tau(A)^{1/k}$.

(Ω est supposé valué, sa valuation étendant celle de K).

Application. - La lemniscate $B(r , P) = \{x \in \Omega : |P(x)| \leqslant r , P(x) \in K\}$ (où r est un réel positif) a pour diamètre transfini :

$$\tau(B) = (\nu r)^{1/k}$$

(ν étant le diamètre transfini du disque $|x| \leqslant 1$ de K).

1.4.6. A étant un ensemble borné de K et η un réel positif, il existe une lemniscate A_η de K :

$$A_\eta = \{x \in K : |P(x)| \leqslant \alpha\}$$

($P(x)$ polynôme unitaire de $K[x]$, α réel positif)

telle que $A \subset A_\eta$ et $\tau(A) \leqslant \tau(A_\eta) \leqslant (1 + \eta)\ \tau(A)$.

Ces propriétés se démontrent facilement en utilisant la première définition (système S_n) pour 1.4.3 et 1.4.4, et la deuxième définition (polynômes de Čebičev) pour 1.4.5 et 1.4.6 (dans 1.4.6, $P(x)$ est un polynôme $T_n^{\varepsilon}(x)$ de A).

1.5. Exemples.

1.5.1. - Le disque unité $|x| \leq 1$ de K a un diamètre transfini $\nu \leq 1$. Si K est algébriquement clos : $\nu = 1$ (on obtient les mêmes résultats pour le disque : $|x| < 1$ et pour la circonférence : $|x| = 1$).

Démonstration. - On a $\sup_{|x| \leq 1} |x^n| = 1$. Ceci entraîne (deuxième définition) : $\tau_n \leq 1$. D'où $\nu = \lim_{n \to \infty} \tau_n^{1/n} \leq 1$.

Si K est algébriquement clos, la lemniscate $B(1, x^2) = \{x \in K : |x^2| \leq 1\}$ a pour diamètre transfini $\tau(B) = \nu^{1/2}$ (d'après 1.4.5) et elle est identique au disque unité $|x| \leq 1$. Il en résulte $\nu = 1$.

1.5.2. - Si $K = Q$ corps des rationnels, avec la valuation ordinaire, $\nu = \frac{1}{2}$. Considérons l'ensemble $B(A, P)$ du § 1.4.5 avec $A = \{y : |y - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}\}$, $P(x) = x^2$ et $K = R$ corps des réels (ν a la même valeur dans Q et R d'après 1.4.4). On a

$$\tau(B) = \tau(A)^{1/2} .$$

D'autre part, A étant un disque de rauon $\frac{1}{2}$ et B le disque unité,

$$\tau(B) = 2\tau(A) \qquad \text{(d'après 1.4.2)} .$$

Il en résulte

$$\tau(B) = \nu = \frac{1}{2} .$$

1.5.3. - Si $K = Q$, avec la valuation p-adique (telle que $|p| = \frac{1}{p}$), $\nu = p^{-1/(p-1)}$. Considérons l'ensemble $B(A, P)$ avec $A = \{y : |y| \leq \frac{1}{p}\}$, $P(x) = x(x-1) \ldots (x-p+1)$ et $K = Q_p$, corps des nombres p-adiques.

$B(A, P)$ est le disque unité $|x| \leq 1$ de Q_p : en effet si $y \in A$, $P(x) - y$ a toutes ses racines dans le disque unité de Q_p, d'après le lemme de Hensel, et inversement, si $|x| \leq 1$ dans Q_p, $P(x) \in A$, puisque les disques $|x - i| \leq \frac{1}{p}$ $(i = 0, 1, \ldots, p-1)$ forment un recouvrement du disque unité.

D'autre part $\tau(B) = \tau(A)^{1/p}$ et $\tau(B) = p\tau(A)$.

D'où $\tau(B) = \nu = p^{-1/(p-1)}$.

Un raisonnement analogue permet de démontrer le résultat plus général :

K étant non archimédien, localement compact et sa valuation non triviale, soient Π une uniformisante de K et p^r le nombre d'éléments du corps des restes de K. On a : $\nu = |\Pi|^{1/(p^r-1)}$.

1.6. Application à une généralisation d'un théorème de Fekete.

THÉORÈME. - Il n'existe qu'un nombre fini de nombres θ algébriques sur Q appartenant, ainsi que tous leurs conjugués, simultanément aux ensembles A de C et A_p de Ω_p tels que

1° A_p est contenu dans le disque $|x|_p \leq 1$ de Ω_p, sauf au plus pour un nombre fini de premiers p $(p \in P)$.

2° $\tau(A) \prod_{p \in P} \tau(A_p) < 1$.

(C désigne le corps des complexes, Ω_p la complétion de la clotude algébrique de Q_p).

1.6.1. La démonstration s'appuie sur le résultat suivant :

LEMME. - Il n'existe qu'un nombre fini de nombres θ algébriques sur Q de degré donné s appartenant, ainsi que tous ses conjugués $\theta_1 = \theta$, θ_2, ... , θ_s, simultanément à des ensembles bornés $\{|\theta_i| \leq R$ de C et $\{|\theta_i|_p \leq R_p\}$ de Ω_p tels que le produit infini $\prod_p R_p$ converge absolument (R, R_p réels positifs).

Démonstration du lemme. - Soit $P(x) = a_s x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \dots + a_0$ le polynôme primitif de $Z[x]$ dont θ_1, ... , θ_s sont les racines.

Il résulte des hypothèses

$$\left|\frac{a_i}{a_s}\right| \leq \binom{s}{i} R^{s-i} \quad \text{et} \quad \left|\frac{a_i}{a_s}\right|_p \leq R_p^{s-i} .$$

Pour tout p, il existe un indice i_p au moins tel que $|a_{i_p}|_p = 1$. D'où

$$|a_s|_p \geq R_p^{-s} R_p^{i_p} \geq R_p^{-s} \inf\{R_p^s, 1\} = \inf\{R_p^{-s}, 1\} .$$

Comme $a_s \in Z$, on a : $|a_s|_p = 1$ si $R_p \leq 1$, $|a_s|_p \geq R_p^{-s}$ si $R_p > 1$. D'autre part $|a_s| \prod_p |a_s|_p = 1$ (car $a_s \neq 0$). D'où

$$|a_s| = \prod_p |a_s|_p^{-1} \leq \left(\prod_p{}' R_p\right)^s ,$$

où le produit infini Π' est pris sur les premiers p tels que $R_p > 1$ et converge d'après l'hypothèse : Π absolument convergent. Il en résulte :

$$|a_i| \leq \left(\prod_p{}' R_p\right)^s \binom{s}{i} R^{s-i} .$$

Les R_p étant donnés, les entiers a_0 , a_1 , ... , a_s sont donc en nombre fini.

1.6.2. Démonstration du théorème. – Supposons qu'il existe une infinité de nombres θ vérifiant les hypothèses du théorème : d'après le lemme précédent, il en existe de degré s arbitrairement grand.

Considérons le Van Der Monde des θ :

$$\Delta(\theta^i) = \Delta(\theta_1 , \theta_2 , \dots , \theta_s) = \prod_{i \neq j} (\theta_i - \theta_j) ,$$

c'est un nombre rationnel non nul.

Pour s suffisamment grand, d'après la première définition du diamètre transfini, on a :

$$|\Delta(\theta_i)|^{1/n(n-1)} < (1 + \varepsilon) \ \tau(A)$$

$$|\Delta(\theta_i)|_p^{1/n(n-1)} < (1 + \varepsilon) \ \tau(A_p) \qquad (p \in P \text{ ensemble fini}) .$$

Comme pour $p \notin P$, $|\theta_i|_p \leqslant 1$ et donc $|\Delta(\theta_i)|_p \leqslant 1$, il en résulte

$$|\Delta(\theta_i)| \prod_p |\Delta(\theta_i)|_p < 1 ,$$

ce qui est absurde puisque $\Delta(\theta_i) \neq 0$.

2. Application au prolongement analytique dans Ω .

2.1. Soit Ω un corps valué, complet, non archimédien, algébriquement clos.

On sait que dans un corps K valué complet non archimédien on a la notion de fonction analytique dans un disque, mais que la méthode de Weierstrass pour le prolongement analytique ne donne pas de résultat. L'étude des séries de Laurent $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ permet de définir des fonctions analytiques dans une couronne $R' \leqslant r \leqslant R$ et ces fonctions vérifient, dans le cas d'un corps Ω , les inégalités de Cauchy :

$$|a_n| \ r^n \leqslant M(f , r) = \sup_{|x|=r} |f(x)|$$

pour tout $n \in Z$ et $R' < r < R$.

On doit à Marc KRASNER [3] une méthode de prolongement analytique uniforme dans Ω : un élément analytique de support D est la limite $f(x)$ d'une suite de

fractions rationnelles $f_n(x)$ n'ayant pas de pôle dans D et convergeant uniformément dans D, D étant un domaine quasi connexe. Cette notion d'analyticité coïncide avec la précédente dans le cas d'un disque et d'une couronne, et on a la propriété fondamentale : si un élément analytique $f(x)$ de support D est nul sur un sous-ensemble de D ayant un point d'accumulation dans D, $f(x)$ est identiquement nul.

On se propose de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME. - Si la série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{-n-1} \qquad (u_n \in \Omega)$$

est prolongeable dans un domaine quasi connexe D de Ω, dont le complémentaire A est borné, on a l'inégalité :

$$\limsup_{n\to\infty} |D_n(f)|^{1/n^2} \leq \tau(A)$$

où $D_n(f) = \det(u_{h+k})$ $(0 \leq h, k \leq n)$ (déterminant de Kronecker). Ce théorème est l'analogue d'un résultat connu dans C, corps des complexes [4], D étant alors un domaine simplement connexe.

Plusieurs résultats intermédiaires seront nécessaires pour la démonstration.

2.2. $P(x)$ étant un polynôme de degré k de $\Omega[x]$ et r un réel positif, la lemniscate $B(r, P)$ définie par :

$$B(r, P) = \{x \in \Omega : |P(x)| \leq r\}$$

est formée de la réunion de h disques circonférenciés disjoints $(1 \leq h \leq k)$:

$$B(r, P) = \bigcup_{i=1}^{h} \{x \in \Omega : |x - x_i| \leq r_i\}$$

(r_i réel positif, $|x_i - x_j| > \sup(r_i, r_j)$ si $i \neq j$).

Démonstration. - L'étude du polygone de Newton de $P(x)$ montre que tout $y \in B$ est centre d'un disque contenu dans B. Soit $\mathcal{D}(y)$ le plus grand disque de centre y contenu dans B.

On montre que $\mathcal{D}(y)$ est circonférencié et contient au moins un zéro de $P(x)$. $\xi_1, \ldots, \xi_k$ étant les zéros distincts ou non de $P(x)$, il en résulte aisément :

$$B = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{D}(\xi_i) .$$

2.3. Soit une série de Laurent

$$g(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n \qquad (a_n \in \Omega)$$

convergeant dans la couronne $R' < |x| < R$ $(0 < R' < R)$ et prolongeable, dans le disque $|x| \leq R'$, dans le complémentaire d'une leminiscate $B = B_1 \cup \dots \cup B_h$ (B_i est le disque $|x - x_i| \leq R_i'$, les disques B_i sont disjoints).

1° $g(x)$ est décomposable d'une manière unique en la somme :

$$g(x) = g_0(x) + g_1(x) + \dots + g_h(x)$$

où $g_0(x)$ est une fonction analytique dans le disque $|x| < R$; $g_i(x)$ est analytique dans le complémentaire du disque B_i et nulle à l'infini $(i = 1, 2, \dots h)$.

2° On a les inégalités :

$$M(g_0, r_0) \leq M(g, r_0) \qquad R' < r_i < R$$

$$M_{x_i}(g_i, r_i) \leq M(g, r_i) \qquad R_i' < r_i < \inf_{\substack{j \neq i \\ j=1,2,\dots h}} |x_i - x_j|$$

(où $M(f, r) = \sup_{|x|=r} |f(x)|$ et $M_{x_i}(f, r) = \sup_{|x-x_i|=r} |f(x)|$).

Démonstration. - $g(x)$ est analytique dans la couronne

$$R_1' < |x - x_1| < \inf_{j \neq 1} |x_j - x_1| .$$

Elle est donc développable en série de Laurent dans cette couronne :

$$g(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n^{(1)} (x - x_1)^n = g_1(x) + g_1^*(x)$$

en posant

$$g_1(x) = \sum_{-\infty}^{-1} a_n^{(1)} (x - x_1)^n \quad \text{et} \quad g_1^*(x) = \sum_{0}^{+\infty} a_n^{(1)} (x - x_1)^n$$

$g_1(x)$ est analytique dans le complémentaire de B_1, nulle à l'infini, et $g_1^*(x)$ est analytique, dans le disque $|x| < R$, dans le complémentaire de $B_2 \cup \dots \cup B_h$. De plus les inégalités de Cauchy appliquées à la série de Laurent en $(x - x_1)$ montrent que :

$$M_{x_1}(g, r_1) = \sup_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n^{(1)}| r_1^n = \sup \{ \sup_{n=-\infty}^{-1} |a_n^{(1)}| r_1^n , \sup_{n=0}^{+\infty} |a_n^{(1)}| r_1^n \}$$

$$= \sup \{ M_{x_1}(g_1, r_1) , M_{x_1}(g_1^*, r_1) \}$$

pour $R_1' < r_1 < \inf |x_1 - x_j|$.

On développe ensuite la fonction $g_1^*(x)$ en série de Laurent en $|x - x_2|$ dans la couronne

$$R_2' < |x - x_2| < \inf_{j=3,\dots h} |x_j - x_2|$$

et l'on a :

$$g_1^*(x) = g_2(x) + g_2^*(x)$$

où $g_2(x)$ est analytique dans le complémentaire de B_2 et nulle à l'infini, $g_2^*(x)$ est analytique, dans le disque $|x| < R$, dans le complémentaire de $B_3 \cup \dots \cup B_h$ et $M_{x_2}(g , r_2) = \sup \{M_{x_2}(g_2 , r_2) , M_{x_2}(g_2^* , r_2)\}$, etc.

On aboutit à $g_{h-1}^*(x) = g_h(x) + g_h^*(x)$,

où $g_h(x)$ est analytique dans le complémentaire de B_h et nulle à l'infini

$g_h^*(x)$ est analytique dans $|x| < R$

on a donc obtenu la décomposition cherchée, en posant $g_0 = g_h^*$, et les inégalités.

Reste à démontrer l'unicité de la décomposition.

Supposons qu'on ait trouvé un deuxième système $g_0' \; g_1' \dots g_h'$ de fonctions analytiques répondant à la question. On a :

$$g_0 - g_0' = g_1 - g_1' + g_2 - g_2' + \dots + g_h - g_h' .$$

Au premier membre on a une fonction analytique dans $|x| < R$ et au second membre une fonction analytique dans $|x| > R'$: ces deux fonctions coïncident dans la couronne $R' < |x| < R$. Elles sont donc identiques et définissent une fonction entière dans Ω , et nulle à l'infini : c'est la fonction identiquement nulle. D'où $g_0 \equiv g_0'$. Et de manière analogue $g_i \equiv g_i'$.

2.4. - <u>Soit une série de Laurent</u> $g(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ $(a_n \in \Omega)$ <u>convergeant dans la couronne</u> $R' < |x| < R$ <u>et prolongeable, dans le disque</u> $|x| \leq R'$, <u>dans le complémentaire d'un disque</u> $B_1 = \{x \in \Omega : |x - x_1| < R_1'$ (avec $|x_1| \leq R'$; $R_1' \leq R'$). <u>On a les inégalités</u> :

si $n < 0$: $|a_n| \leq r_1^{-n} \sup \{1 , (\frac{|x_1|}{r_1})^{-n-1}\} M_{x_1}(g , R_1)$ $\qquad (R_1' < r_1 < R)$

(où $M_{x_1}(g , r_1) = \sup_{|x-x_1|=r_1} |g(x)|$).

Démonstration. - Elle est inutile dans le cas $|x_1| \leq R_1'$ car les disques B_1 et $\{x : |x| \leq R_1'\}$ coïncident. L'inégalité n'est autre que l'inégalité de Cauchy relative à a_{-1}. Dans le cas $|x_1| > R_1'$: la fonction $g(x)$ est analytique dans la couronne. $R_1' < |x - x_1| < R$. Elle est donc développable en série de Laurent en $(x - x_1)$ convergeant dans cette couronne. On démontre que ce développement se déduit de la série de Laurent en x en posant $x = x_1 + X$ et en réordonnant par rapport aux puissances de X :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (x_1 + X)^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n X^n .$$

Ce résultat est connu pour les puissances positives de X, et pour $n < 0$, on utilise l'égalité

$$b_n = a_n - \binom{-n-1}{1} x_1 a_{n+1} + \dots + (-1)^k \binom{-n-k}{k} x_1^k a_{n+k} + \dots + (-1)^{n-1} x_1^{-n-1} a_{-1}$$

d'où il résulte que la série $\sum_{n=-1}^{-\infty} b_n X^n$ a un rayon de convergence inférieur ou égal à celui de la série $\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n x^n$. On en déduit que les deux séries représentent la même fonction.

Les inégalités cherchées se déduisent des inégalités de Cauchy pour la série de Laurent en X.

2.5. - Des résultats 2.3 et 2.4 on déduit le lemme suivant :

LEMME. - Soit une série de Laurent $g(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ convergeant dans la couronne $R' < |x| < R$ de Ω et définissant une fonction analytique prolongeable, dans le disque $|x| \leq R'$, dans le complémentaire d'une lemniscate $B = B_1 \cup \dots \cup B_h$ ($B_i = \{x \in \Omega : |x - x_i| \leq R_i'\}$, les disques B_i sont disjoints) on a l'inégalité, pour $n < 0$:

$$|a_n| \leq \sup_{i=1,2,\dots h} \{r_i^{-n} \sup \{1 , (\frac{|x_i|}{r_i})^{-n-1}\} M_{x_i}(g , r_i)\}$$

pour un système de réels r_i vérifiant : $R_i' < r_i < \inf_{j \neq i} |x_j - x_i|$.

Démonstration. - Avec les notations du § 2.3

$$\sum_{i=1}^{h} g_i(x) = \sum_{-\infty}^{-1} a_n x^n .$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{h} a_n^{(i)} = a_n \qquad (n < 0) .$$

En appliquant à $g_i(x)$ les résultats du § 2.4 :

$$|a_n^{(i)}| \leqslant r_i^n \sup \{1 , (\frac{|x_i|}{r_i})^{-n-1}\} M_{x_i}(g_i , r_i)$$

et d'après 2.3 :

$$|a_n^{(i)}| \leqslant r_i^n \sup \{1 , (\frac{|x_i|}{r_i})^{-n-1}\} M_{x_i}(g , r_i) .$$

L'inégalité $|a_n| \leqslant \sup_i |a_n^{(i)}|$ donne le résultat cherché.

2.6. <u>Démonstration du théorème 2.1.</u> - Par hypothèse $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{-n-1}$ est limite uniforme dans D d'une suite de fractions rationnelles ayant tous leurs pôles dans A .

D'après 1.4.6, <u>quel que soit le réel positif</u> η , il existe une lemniscate A contenant A et telle que $\tau(A) \leqslant \tau(A_\eta) \leqslant (1 + \eta)\ \tau(A)$. D'après 2.2, cette lemniscate est formée de la réunion d'un nombre fini h de disques circonférenciés disjoints B_i de rayon R_i' de centre x_i $(i = 1, 2 , \ldots h)$. Par suite D_η , complémentaire de $A_{\eta'}$ est quasi convexe. Les fractions rationnelles $f_j(x)$, qui convergent uniformément dans D vers $f(x)$, sont uniformément bornées dans D_η car : $\forall\ x \in D$, $y \in D_\eta$, $|x - y| \geqslant \inf_{i=1,\ldots h} R_i'$

$$\sup_{x \in D_\eta} |f_j(x)| \leqslant M_\eta , \text{ d'où } \sup_{x \in D_\eta} |f(x)| \leqslant M_\eta$$

$f(x)$ est bornée dans D_η .

Soit $T_n^\eta(x)$ (ou pour abréger $T_n(x)$) un polynôme de Čebičev de degré n de la lemniscate A_η , relatif à la valeur η (voir § 1.2) on a :

$$\sup_{x \in A_\eta} |T_n(x)| \leqslant (1 + \eta)\ \tau_n(A_\eta)$$

or pour $n > n_0(\eta)$; $\tau_n(A_\eta)^{1/n} \leqslant (1 + \eta)\ \tau(A_\eta) \leqslant (1 + \eta)^2\ \tau(A)$.

D'où

$$\sup_{x \in A_\eta} |T_n(x)| \leqslant (1 + \eta)^{2n+1}\ \tau(A)^n \quad \text{pour} \quad n > n_0(\eta) .$$

Considérons un système $r_1 , \ldots , r_h$ de réels tels que $R_i' < r_i < \inf_{j \neq i} |x_j - x_i|$.

Pour r_i suffisamment voisin de R_i' :

$$\sup_{|x-x_i|=r_i} |T_n(x)| \leqslant (1 + \eta) \sup_{|x-x_i| \leqslant R_i'} |T_n(x)|$$

on peut donc trouver un système (r_i) tel que l'inégalité précédente soit vérifiée pour $i = 1, 2, \ldots, h$. D'où

$$\sup_{\substack{|x-x_i|=r_i \\ i=1,2,\ldots,h}} |T_n(x)| \leq (1+\eta)^{2n+2} \tau(A)^n \qquad (\text{pour } n > n_0(\eta)).$$

On considère le déterminant de Kronecker $D_n(f)$ et on le transforme par les combinaisons entre les lignes et les colonnes définies par les polynômes T_n (voir [4])

$$D_n(f) = \det(u_{h+k}) = \det(T_h(T_k(u_{h+k}))) \qquad 0 \leq h, \ k \leq n$$

$T_k(u_n)$ (avec $n \geq k$) désigne le coefficient de $x^{-(n+1-k)}$ de la série de laurent en x de $T_h(x)\, f(x)$. Par suite $T_h(T_k(u_{h+k}))$ <u>est le coefficient de x^{-1} de la série de Laurent en x de</u> $T_h(x)\, T_k(x)\, f(x)$.

D'après le lemme 2.5 :

$$|T_h(T_k(u_{h+k}))| \leq \sup_{i=1,2,\ldots h} r_i\, M_{x_i}(T_h\, T_k\, f, r_i).$$

Comme

$$M_{x_i}(T_h\, T_k\, f, r_i) \leq M_\eta (1+\eta)^{2(h+k)+4} \tau(A)^{h+k}$$

pour le système (r_i) choisi et pour $h, k > n_0(\eta)$, on a, dans ces conditions :

$$|T_h(T_k(u_{h+k}))| \leq \rho\, M_\eta (1+\eta)^{2(h+k)+u} \tau(A)^{h+k}$$

avec $\rho = \sup_{j \neq i} |x_i - x_j|$.

Il existe donc une constante $c \geq \rho\, M_\eta (1+\eta)^4$ telle que, pour le système (r_i) choisi et quels que soient h et $k > 0$:

$$|T_h\, T_k(u_{h+k})| \leq c((1+\eta)^2 \tau(A))^{h+k}$$

on majore ensuite $|D_n(f)|$ sur son développement :

$$|D_n(f)| \leq \sup |V_{h_0,k_0}\, V_{h_1,k_1} \cdots V_{h_n,k_n}|$$

où $V_{h,k}$ désigne $T_h\, T_k(V_{h+k})$ et où $(h_0, \ldots, h_n)$ et $(k_0, \ldots, k_n)$ sont des permutations de $0, 1, 2, \ldots, n$.

D'où

$$|D_n(f)| \leq C^{n+1}((1+\eta^2) \tau(A))^{n(n+1)} \qquad n = 0, 1, 2.$$

Il en résulte

$$\limsup_{n\infty} |D_n(f)|^{1/n^2} \leqslant (1+\eta^2)\ \tau(A)\ .$$

D'où le résultat cherché.

2.7. Exemples. - On a dans tous les cas $\tau(A_f)) \leqslant R(f) = \limsup |u_n|^{1/n}$

si $f(x) = \frac{1}{x}\exp x^{-1}$, on trouve $\tau(A) = p^{1/(p-1)} = R$.

si $f(x) = \mathrm{Log}\,(1-\frac{1}{x})^{-1}$, on trouve $\tau(A) = 1 = R$.

3. Application à une généralisation du théorème de Polya et Carlson [4].

3.1. THÉORÈME. - Soit une série de Taylor $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\, x^{-n-1}$ $(u_n \in Q)$ telle que $|u_n|_p \leqslant 1$ sauf pour un nombre fini de premiers p $(p \in P)$ on suppose que $f(x)$ est prolongeable dans le complémentaire D simplement connexe d'un ensemble borné A de C, et dans le complémentaire D_p quasi-connexe d'un ensemble borné A_p de Ω_p $(p \in P)$.

Si $\tau(A) \prod_{p\in P} \tau(A_p) < 1$, $f(x)$ est rationnelle.

Démonstration.

$$\limsup_{n\infty} |D_n(f)|^{1/n^2} \leqslant \tau(A)$$

$$\limsup_{n\infty} |D_n(f)|_p^{1/n^2} \leqslant \tau(A_p) \qquad \text{si } p \in P\ .$$

D'où

$$\limsup_{n\infty} \Big(|D_n(f)| \prod_{p\in P} |D_n(f)|_p\Big)^{1/n^2} \leqslant \tau(A) \prod_{p\in P} \tau(A_p)\ .$$

Il résulte de l'hypothèse $\tau(A) \prod_{p\in P} \tau(A_p) < 1$

$$|D_n(f)| \prod_{p\in P} |D_n(f)|_p < 1 \qquad \text{pour } n \text{ suffisamment grand } (n > n_0)$$

or $|D_n(f)|_p \leqslant 1$ pour $p \notin P$. Donc si $n > n_0$

$$|D_n(f)| \prod_{p} |D_n(f)|_p < 1\ .$$

Il en résulte $D_n(f) = 0$ pour $n > n_0$.

Remarque. - Les ensembles A, A_p $(p \in P)$ étant fixés, tels que $\tau(A) \prod_{p\in A_p} \tau(A_p) < 1$, les pôles des fractions rationnelles $f(x)$ sont en nombre fini d'après le théorème 1.6.

3.2. - Le théorème 3.1 peut se généraliser en remplaçant le corps des rationnels Q par un corps Γ avec formule du produit des valuations [1].

Soit Γ un corps tel que l'on puisse définir sur Γ un ensemble de valuation $|\ |_p$ non triviales et non équivalentes telles que :

$$\prod_p |x|_p = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \quad \text{pour tout } x \in \Gamma .$$

THÉORÈME. - Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{-n-1}$ $(u_n \in \Gamma)$ une série de Taylor telle que $|u_n|_p \leq 1$ sauf pour un ensemble fini P de valuation p_i. On suppose que, pour $p_i \in P$, $f(x)$ est prolongeable comme fonction analytique uniforme, dans Ω_{p_i}, dans le complémentaire d'un ensemble borné A_{p_i} si $\prod_{p_i \in P} \Gamma(A_{p_i}) < 1$, $f(x)$ est rationnelle.

Ω_{p_i} désigne la complétion de la clôture algébrique de Γ_{p_i} (si la valuation p_i est archimédienne, Ω_{p_i} est le corps des complexes $\mathbb{C}$).

La démonstration est analogue à la précédente.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (Emil). - Algebraic numbers and algebraic functions. - Princeton, Princeton University, 1951 (multigr.).

[2] FEKETE (M.). - Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Z., t. 17, 1923, p. 228-249.

[3] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique dans les corps valués complets : éléments analytiques, préliminaires du théorème d'unicité, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 239, 1954, p. 468-470 ; démonstration de la loi d'unicité : fonctions analytiques uniformes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 239, 1954, p. 745-747.

[4] POLYA (G.). - Über gewisse notwendige Determinantenkriterien für die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihen, Math. Annalen, t. 99, 1928, p. 687-706.