

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

PAUL MALLIAVIN

Sur une propriété asymptotique des fonctions de diviseurs

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 4 (1962-1963), exp. n° 6, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1962-1963__4__A5_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE PROPRIÉTÉ ASYMPTOTIQUE DES FONCTIONS DE DIVISEURS

par Paul MALLIAVIN

Notant $\zeta(s)$ avec $s = \sigma + it$ la fonction de Riemann, on désigne par $d_k(n)$ les coefficients de $\zeta^k(s)$

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_k(n) n^{-s}$$

si k est entier > 0 , $d_k(n)$ est égal au nombre de manières distinctes d'exprimer n comme le produit de k entiers. Les propriétés des fonctions de diviseurs sont intimement liées à la répartition asymptotique des nombres premiers. On se propose ici d'établir l'équivalence de l'hypothèse de Riemann avec l'évaluation asymptotique d'une certaine somme associée aux $d_k(n)$.

Posons

$$A_{k,\sigma} = \sum_n d_k^2(n) n^{-2\sigma} \quad \sigma > \frac{1}{2}$$

$$K(t) = \frac{2^t}{\pi t} \int_0^{+\infty} w^{-t} \frac{J_0'(iW)}{J_0(iW)} dW$$

où J_0 désigne la fonction de Bessel d'ordre zéro.

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME. - L'hypothèse de Riemann est équivalente au fait que, quel que soit $\varepsilon > 0$ et quel que soit $\sigma > \frac{1}{2}$ fixés, on ait $k \rightarrow +\infty$

$$(1) \quad \log A_{k,\sigma} = \int_1^{\sigma^{-1}} k^\xi K(\xi) d\xi + O(k^{1+\varepsilon}).$$

On déduit immédiatement de ce théorème le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - Supposons que quel que soit $\varepsilon > 0$, on ait

$$\frac{2}{A_{k,\sigma}} \sum_n d_k^2(n) n^{-2\sigma} \log n = \frac{1}{\sigma^2} K\left(\frac{1}{\sigma}\right) k^{1/\sigma} + O(k^{1+\varepsilon})$$

estimée uniforme en $\sigma \geq \sigma_0 > \frac{1}{2}$, $k \rightarrow +\infty$, alors l'hypothèse de Riemann est satisfaite.

Nous allons, pour démontrer le théorème, interpréter $A_{k,\sigma}$ comme une norme L_2 sur un groupe de Bohr.

Posons

$$j(u) = \log \left[\int_0^{2\pi} e^{u \cos \theta} \frac{d\theta}{2\pi} \right] .$$

Notons par $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers $\leq x$. On a

LEMME 1. — Soit $\sigma_0 > \frac{1}{2}$ fixé, alors on a uniformément en $\sigma \geq \sigma_0$ $k \rightarrow +\infty$

$$(2) \quad \log A_{k,\sigma} = \int_0^{+\infty} j(2kt^{-\sigma}) d\pi(t) + O(k) .$$

Preuve. — Soit Q^* le groupe multiplicatif des rationnels > 0 , Q^* étant muni de la topologie discrète, G notera le groupe compact dual de Q^* . Si $g \in G$, $r \in Q^*$, on notera $g(r)$ l'accouplement de la dualité. On pose

$$\zeta_\sigma(g) = \sum_{n=1}^{+\infty} g(n) n^{-\sigma} .$$

Alors on a

$$A_{k,\sigma} = \int_G |\zeta_\sigma(g)|^{2k} dg \quad \sigma > \frac{1}{2} .$$

D'autre part, si $\sigma > \frac{1}{2}$, le produit d'Euler converge presque partout en $g \in G$. On a ainsi

$$\zeta_\sigma(g) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-\sigma} g(p)}$$

presque partout et

$$A_{k,\sigma} = \int_G \left[\prod_p |1 - p^{-\sigma} g(p)|^{-2k} \right] dg .$$

Les nombres premiers p constituant un système de générateurs de Q^* , tout élément $g \in G$ s'écrit

$$g = \prod_p g_p$$

où g_{p_0} est défini par $g_{p_0}(p_0) = g(p_0)$, $g_{p_0}(p) = 1$ si $p \neq p_0$. Cette décomposition identifie G à un tore à une infinité de dimension et dg à une mesure produit. On a ainsi

$$A_{k,\sigma} = \prod_p \int_0^{2\pi} (1 - 2p^{-\sigma} \cos \theta + p^{-2\sigma})^{-k} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Posons

$$h(r, k) = \int_0^{2\pi} (1 - 2r \cos \theta + r^2)^{-k} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

On a, $r \rightarrow 0$,

$$\log h(r, k) = j(2kr) + kO(r^2)$$

où O est uniforme en k d'où

$$\log A_{k,\sigma} = \int j(2kt^{-\sigma}) d\pi(t) + kO\left(\int t^{-2\sigma} d\pi(t)\right).$$

Cette dernière intégrale converge uniformément si $\sigma \geq \sigma_0 > \frac{1}{2}$, d'où le lemme.

Posons

$$li(t) = \int_e^t \frac{du}{\log u} \quad \text{si } t > e, \quad li(t) = 0 \quad \text{sinon,}$$

$$m(t) = \pi(t) - li(t).$$

Alors on a le lemme suivant.

LEMME 2. - L'hypothèse de Riemann est équivalente au fait que

$$H(s) = \int_0^{+\infty} t^{-s} dm(t)$$

soit holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$.

Preuve. - La preuve est immédiate en remarquant que la fonction définie pour $\sigma > 1$ par

$$\Phi(s) = \exp\left(- \int_e^{+\infty} t^{-s} \frac{dt}{\log t}\right)$$

se prolonge en une fonction entière, admettant un seul zéro au point 1, ce zéro étant simple.

LEMME 3. - L'hypothèse de Riemann est équivalente à

$$(3) \quad \log A_{k,\sigma} = \int_e^{+\infty} j(2kt^{-\sigma}) \frac{dt}{\log t} + O(k) .$$

Preuve. - En transformant (2) par une intégration par parties, puis en remplaçant $\pi(t)$ par $\text{li}(t) + O(t^{1/2+\varepsilon})$ on trouve immédiatement (3).

Inversement, montrons que (3) entraîne l'hypothèse de Riemann. En combinant (3) et (2) on obtient

$$(4) \quad \int_0^{+\infty} j(2kt^{-\sigma}) \, d\pi(t) = O(k) .$$

Posons

$$f_{\sigma}(u) = j(u^{\sigma})$$

$$(5) \quad \ell_{\sigma}(v) = \int_0^{+\infty} f_{\sigma}\left(\frac{v}{t}\right) \, d\pi(t) .$$

Alors (4) s'écrit

$$(6) \quad \ell_{\sigma}(v) = O(v^{\sigma})$$

égalité valable si v^{σ} est un entier pair ; en remarquant que $\log A_{k,\sigma}$ est une fonction convexe de k , on étend (6) aux valeurs réelles de $v \rightarrow +\infty$. Interprétons (5) en introduisant les transformées de Mellin

$$L_{\sigma}(s) = \int_0^{+\infty} \ell(v) v^{-s-1} \, dv$$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} j(v) v^{-s-1} \, dv$$

(5) s'écrit alors

$$(7) \quad H(s) F\left(\frac{s}{\sigma}\right) = \sigma L_{\sigma}(s) .$$

Il résulte de (6) que L_{σ} est une fonction holomorphe dans la bande

$$\sigma < \operatorname{Re}(s) < 2\sigma .$$

D'autre part F est holomorphe dans la bande

$$1 < \operatorname{Re}(s) < 2 .$$

On déduit alors de (7) que $H(s)$ est méromorphe dans la bande

$$\sigma < \operatorname{Re}(s) < 2\sigma ,$$

σ étant arbitraire $> \frac{1}{2}$, on obtient que $H(s)$ est méromorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$. Soit s_0 un pôle de H . Alors on doit avoir

$$F\left(\frac{s_0}{\sigma}\right) = 0 \text{ quel que soit } \sigma \text{ vérifiant } \frac{1}{2} < \sigma < \operatorname{Re}(s_0) ,$$

ce qui donnerait un segment de zéros pour la fonction F et par suite serait impossible. H est holomorphe et le lemme 2 donne alors le lemme 3.

Le théorème s'obtient à partir du lemme 3 par un simple calcul de résidus.
