

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

CHARLES PISOT

**Généralisation à deux variables, par Max Schiffer, d'un  
théorème de Pólya-Carlson**

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 4 (1962-1963), exp. n° 5,  
p. 1-10

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1962-1963\\_\\_4\\_\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1962-1963__4__A4_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

GÉNÉRALISATION À DEUX VARIABLES, PAR MAX SCHIFFER,  
D'UN THÉORÈME DE PÓLYA-CARLSON

[D'après une conférence de G. PÓLYA, à Philadelphia, le 7 février 1962]

par Charles PISOT

Diamètre transfini d'un ensemble compact de  $\mathbb{C}$ .

La notion de diamètre transfini est due à FEKETE [2]. Soit  $\Lambda$  un ensemble compact de  $\mathbb{C}$ , on définit le diamètre  $d(\Lambda)$  de  $\Lambda$  par  $d(\Lambda) = \max |z_1 - z_2|$  pour  $z_1 \in \Lambda$ ,  $z_2 \in \Lambda$ . Plus généralement, posons

$$d_n(\Lambda) = d_n = \max_{j \neq k} |z_j - z_k|$$

pour  $j, k = 1, \dots, n$  et  $z_j \in \Lambda$ ,  $z_k \in \Lambda$ .

On a donc

$$d_n = \max |V(z_1, \dots, z_n)|^2 \quad \text{où} \quad V(z_1, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Or

$$\begin{aligned} d_n &= |z_1 - z_2|^2 \dots |z_1 - z_n|^2 |V(z_2, \dots, z_n)|^2 \\ &\leq |z_1 - z_2|^2 \dots |z_1 - z_n|^2 d_{n-1} \end{aligned}$$

En multipliant les inégalités analogues obtenues en remplaçant  $z_1$  par  $z_2, \dots, z_n$ , on obtient

$$d_n^n \leq d_n^2 (d_{n-1})^n, \text{ ou encore } (d_n)^{1/(n(n-1))} \leq (d_{n-1})^{1/((n-1)(n-2))} .$$

La suite des nombres positifs  $(d_n)^{1/(n(n-1))}$  est décroissante ; elle a donc une limite et nous poserons :

DÉFINITION. - On appelle diamètre transfini d'un ensemble compact A de C le nombre  $\tau(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (d_n(A))^{1/(n(n-1))}$  où

$$d_n(A) = \max |V(z_1, \dots, z_n)|^2 \text{ pour } z_j \in A, j = 1, \dots, n .$$

THÉORÈME de Max Schiffer. - Soit

$$F(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{x^{m+1} y^{n+1}}$$

une série à deux variables complexes :  $x \in \mathbb{C}$ ,  $y \in \mathbb{C}$  et  $a_{m,n} \in \mathbb{C}$ . Supposons que F soit holomorphe et uniforme lorsque, à la fois,  $x \notin \Lambda$  et  $y \notin B$ , où  $\Lambda$  et  $B$  sont deux ensembles compacts. Alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |D_n|^{2/n^2} \leq \tau(\Lambda) \tau(B)$$

où

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{0,0} & \dots & a_{0,n-1} \\ \dots & & \\ a_{n-1,0} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

$\Lambda$  et  $B$  étant compacts, on peut entourer  $\Lambda$  et  $B$  de courbes analytiques  $\Gamma_\Lambda$ ,  $\Gamma_B$  de longueurs finies, telles que  $\tau(\Gamma_\Lambda) \leq \tau(\Lambda) + \varepsilon$ ,  $\tau(\Gamma_B) \leq \tau(B) + \varepsilon$  [2], [4]. Alors il vient :

$$a_{n,m} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_\Lambda} \int_{\Gamma_B} F(x, y) x^m y^n dx dy .$$

Etablissons d'abord un lemme préliminaire.

LEMME. - Soient  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_n$  des fonctions d'une variable complexe ; soit  $\Gamma$  un chemin d'intégration. Alors on a l'identité :

$$\begin{vmatrix} \int_{\Gamma} \varphi_1(z) \psi_1(z) dz & \dots & \int_{\Gamma} \varphi_1(z) \psi_n(z) dz \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\Gamma} \varphi_n(z) \psi_1(z) dz & \dots & \int_{\Gamma} \varphi_n(z) \psi_n(z) dz \end{vmatrix} \\ = \frac{1}{n!} \int_{\Gamma} \dots \int_{\Gamma} \begin{vmatrix} \varphi_1(z_1) & \dots & \varphi_1(z_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_n(z_1) & \dots & \varphi_n(z_n) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_1(z_1) & \dots & \psi_1(z_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n(z_1) & \dots & \psi_n(z_n) \end{vmatrix} dz_1 \dots dz_n .$$

Démonstration. - En développant les déterminants qui figurent dans le second membre de l'identité, celle-ci s'écrit :

$$\frac{1}{n!} \int_{\Gamma} \dots \int_{\Gamma} \left( \sum_{i_1} (-1)^I \varphi_{i_1}(z_1) \dots \varphi_{i_n}(z_n) \right) \left( \sum_{j_1} (-1)^J \psi_{j_1}(z_1) \dots \psi_{j_n}(z_n) \right) dz_1 \dots dz_n$$

où  $(i_1, \dots, i_n)$  est une permutation de  $(1, \dots, n)$  de parité  $(-1)^I$  et  $(j_1, \dots, j_n)$  une permutation de parité  $(-1)^J$ . En effectuant le produit et en séparant les variables, on obtient

$$\frac{1}{n!} \sum (-1)^{I+J} \left( \int_{\Gamma} \varphi_{i_1}(z) \psi_{j_1}(z) dz \right) \dots \left( \int_{\Gamma} \varphi_{i_n}(z) \psi_{j_n}(z) dz \right) .$$

On voit que l'on retrouve dans cette somme le produit des mêmes facteurs à l'ordre près  $n!$  fois, nombre des permutations de  $i_1, \dots, i_n$  par exemple. En réunissant facteurs égaux, il reste le développement du déterminant de gauche de l'énoncé du lemme.

Suite de la démonstration du théorème de Max Schiffer.

Nous remplaçons  $a_{n,m}$  dans  $D_n$  par son expression par une intégrale et, en considérant  $y$  fixe, nous appliquons le lemme avec la courbe  $\Gamma_A$ ,

$$\varphi_j(x) = \int_{\Gamma_B} F(x, y) y^{j-1} dy, \quad \psi_j(x) = x^{j-1}$$

$$D_n = \frac{1}{(2\pi i)^{2n} n!} \int_{\Gamma_A} \dots \int_{\Gamma_A} U dx_1 \dots dx_n$$

$$\text{où } U = \begin{vmatrix} \int_{\Gamma_B} F(x_1, y) dy & \dots & \int_{\Gamma_B} F(x_n, y) dy \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Gamma_B} F(x_1, y) y^{n-1} dy & \dots & \int_{\Gamma_B} F(x_n, y) y^{n-1} dy \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{n-1} & \dots & x^{n-1} \end{vmatrix}$$

Une nouvelle application du lemme au premier déterminant de cette intégrale, avec  $y$  variable,  $\Gamma_B$  courbe d'intégration et  $\varphi_j(y) = y^{j-1}$ ,  $\psi_j(y) = F(x_j, y)$  donne

$$D_n = \frac{1}{(2\pi i)^{2n} n!} \int_{\Gamma_A} \dots \int_{\Gamma_A} \int_{\Gamma_B} \dots \int_{\Gamma_B} W dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_n$$

$$\text{où } W = \begin{vmatrix} F(x_1, y_1) & \dots & F(x_1, y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F(x_n, y_1) & \dots & F(x_n, y_n) \end{vmatrix} V(x_1, \dots, x_n) V(y_1, \dots, y_n).$$

Soit  $M = M(\varepsilon)$  le maximum de  $|F(x, y)|$  pour  $x \in \Gamma_A$ ,  $y \in \Gamma_B$  alors

$$\left| \begin{vmatrix} F(x_1, y_1) & \dots & F(x_1, y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F(x_n, y_1) & \dots & F(x_n, y_n) \end{vmatrix} \right| \leq n! M^n \text{ pour } x \in \Gamma_A, y \in \Gamma_B.$$

Désignons par  $L_A$  la longueur de  $\Gamma_A$ , par  $L_B$  celle de  $\Gamma_B$ . On a alors

$$|D_n| \leq \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \frac{1}{(n!)^2} (L_A L_B)^n n! M^n [\tau(A) + \varepsilon]^{(n(n-1))/2} [\tau(B) + \varepsilon]^{(n(n-1))/2} .$$

Il vient donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |D_n|^{2/n^2} \leq [\tau(A) + \varepsilon][\tau(B) + \varepsilon] ,$$

c'est-à-dire

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |D_n|^{2/n^2} \leq \tau(A) \tau(B) .$$

Applications.

1° THÉOREME de Pólya-Carlson. - Soit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{z^{n+1}} ,$$

où  $u_n \in \mathbb{Z}$ , une fonction holomorphe et uniforme à l'extérieur d'un compact  $A$   
tel que  $\tau(A) < 1$ , alors  $f(z)$  est une fraction rationnelle [1], [5].

Démonstration. - Posons

$$F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{y - x} , .$$

alors

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{1}{xy} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{\frac{1}{x^{n+1}} - \frac{1}{y^{n+1}}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} = \frac{1}{xy} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \left( \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}y} + \dots + \frac{1}{y^n} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{x^{m+1} y^{n+1}} \quad \text{avec} \quad a_{m,n} = u_{m+n} . \end{aligned}$$

On a donc ici :

$$D_n = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_{n-1} \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \dots & & & \\ u_{n-1} & u_n & \dots & u_{2n-2} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} |D_n|^{2/n^2} \leq [\tau(A)]^2 < 1 .$$

Or  $D_n \in \mathbb{Z}$ , donc cette inégalité montre que  $D_n = 0$  pour  $n \geq n_0$ . Il est bien connu que cette condition est nécessaire et suffisante pour que  $f$  soit une fraction rationnelle [3].

2° THÉOREME de Bieberbach. - BIEBERBACH a démontré : Si  $A$  est un compact avec  $\tau(A) < 1$ , alors le complémentaire  $\complement A$  contient au moins deux points  $x$  et  $y$  tels que  $xy = 1$ .

Démonstration. - Considérons la fonction

$$F(x, y) = \frac{1}{xy - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1} y^{n+1}} .$$

On a ici

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{quel que soit } n .$$

Soient  $A$  et  $B$  deux compacts tels que, quels que soient  $x \notin A$ ,  $y \notin B$ , on ait  $xy \neq 1$ , alors

$$\tau(A) \tau(B) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} D_n = 1 ,$$

donc l'un au moins des nombres  $\tau(A)$  ou  $\tau(B)$  est au moins égal à 1 .

Nous pouvons ainsi énoncer la généralisation suivante du théorème de Bieberbach :

Généralisation. - Soient  $A$  et  $B$  deux compacts,  $A^*$  l'ensemble inverse de  $A$  (c'est-à-dire l'ensemble des  $x$  tels que  $\frac{1}{x} \in A$ ). Si  $\tau(A) \tau(B) < 1$ , alors le complémentaire  $C(A^* \cup B)$  n'est pas vide.

Remarques. - Pour avoir des applications arithmétiques analogues à celles du théorème de Pólya-Carlson, il semble souhaitable de savoir ce que signifie pour une fonction  $F(x, y)$  le fait que  $D_n = 0$  pour  $n \geq n_0$ . Il est facile de voir que le fait que  $F(x, y)$  soit de la forme

$$\sum_{j=1}^k f_j(x) g_j(y),$$

où  $f_j$  et  $g_j$  sont holomorphes à l'infini, entraîne  $D_n = 0$  pour  $n > k$ . Mais une telle condition n'est pas nécessaire, comme le montre le contre-exemple

$$F(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2 - xy}$$

où  $D_n = 0$  pour tout  $n$ . Voir aussi [4].

On peut encore remarquer que  $D_n$  ne change pas si on remplace  $x$  par  $X \div b_0 \div \frac{b_1}{X} + \dots + \frac{b_n}{X^n} + \dots$  (représentation conforme égale à une translation à l'infini) ; de même pour  $y$ . En particulier  $D_n$  est invariant par translation sur  $(x, y)$ .

Enfin, on peut caractériser les fonctions  $F(x, y)$  pour lesquelles  $D_n \neq 0$  pour tout  $n$ . Nous allons montrer que : La condition  $D_n \neq 0$  est nécessaire et suffisante pour que

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \psi_n(y)}{(xy)^{n+1}},$$

où  $\varphi_n(x)$ ,  $\psi_n(y)$  sont holomorphes à l'infini avec  $\varphi_n(\infty) \neq 0$ ,  $\psi_n(\infty) \neq 0$ .

Au lieu de séries en  $\frac{1}{x}$  et  $\frac{1}{y}$  nous allons raisonner sur des séries

$$G(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} x^m y^n.$$



Remarquons d'abord que si

$$B(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{m,n} x^m y^n$$

et que

$$B(0, 0) = b_{0,0} \neq 0,$$

alors

$$C(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} x^m y^n = B(x, y) - \frac{1}{b_{0,0}} B(x, 0) B(0, y)$$

vérifie  $c_{m,0} = c_{0,n} = 0$  quels que soient  $m$  et  $n$ , donc  $C(x, y) = xy C_1(x, y)$  où  $C_1(x, y)$  est holomorphe en  $(0, 0)$ .

Posons

$$D_{m,n}^{(k)} = \begin{vmatrix} a_{m+k,n+k} & a_{m+k,k-1} & \cdots & a_{m+k,0} \\ a_{k-1,n+k} & a_{k-1,k-1} & \cdots & a_{k-1,0} \\ \cdots & & & \\ a_{0,n+k} & a_{0,k-1} & \cdots & a_{0,0} \end{vmatrix}$$

On a alors  $D_k = D_{0,0}^{(k)}$ .

Supposons d'abord  $D_k = D_{0,0}^{(k)} \neq 0$  pour tout  $k$ .

Désignons par  $\Lambda_{i,j}$  le coefficient de l'élément  $a_{ij}$  dans le développement de  $D_{m,n}^{(k)}$ . Formons le produit ligne par ligne

$$D_{m,n}^{(k)} \begin{vmatrix} \Lambda_{m+k,n+k} & \Lambda_{m+k,k-1} & \Lambda_{m+k,k-2} & \cdots & \Lambda_{m+k,0} \\ \Lambda_{k-1,n+k} & \Lambda_{k-1,k-1} & \Lambda_{k-1,k-2} & \cdots & \Lambda_{k-1,0} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix}$$

On obtient

$$\begin{vmatrix} D_{m,n}^{(k)} & 0 & a_{m+k,k-2} & \cdots & a_{m+k,0} \\ 0 & D_{m,n}^{(k)} & a_{k-1,k-2} & \cdots & a_{k-1,0} \\ 0 & 0 & a_{k-2,k-2} & \cdots & a_{k-2,0} \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & a_{0,k-2} & \cdots & a_{0,0} \end{vmatrix} = (D_{m,n}^{(k)})^2 D_{0,0}^{(k-2)} .$$

D'où, après division par  $D_{m,n}^{(k)}$  (d'abord supposé non nul, ensuite par continuité), il vient l'identité suivante :

Relation de Sylvester.

$$D_{0,0}^{(k-1)} D_{m+1,n+1}^{(k-1)} - D_{m+1,0}^{(k-1)} D_{0,n+1}^{(k-1)} = D_{m,n}^{(k)} D_{0,0}^{(k-2)} .$$

Cette relation joue déjà un rôle important dans la démonstration de KRONECKER ([3], p. 566-567).

Posons

$$G_k(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{m,n}^{(k)}}{D_{0,0}^{(k-1)}} x^m y^n .$$

On a

$$xy G_1(x, y) = G(x, y) - \frac{1}{G(0, 0)} G(x, 0) G(0, y) .$$

En effet, le coefficient de  $x^m y^n$  dans  $G_1$  est

$$a_{m+1,n+1} - \frac{a_{m+1,0} a_{0,n+1}}{a_{0,0}} = \frac{D_{m,n}^{(1)}}{D_{0,0}^{(0)}} .$$

Montrons que pour tout  $k$ , on a

$$xy G_k(x, y) = G_{k-1}(x, y) - \frac{1}{G_{k-1}(0, 0)} G_{k-1}(x, 0) G_{k-1}(0, y) .$$

Le coefficient de  $x^m y^n$  de  $G_k(x, y)$  calculé à partir de l'expression de droite est

$$\frac{D_{m+1, n+1}^{(k-1)}}{D_{0,0}^{(k-2)}} - \frac{D_{m+1,0}^{(k-1)}}{D_{0,0}^{(k-1)}} \frac{D_{0, n+1}^{(k-1)}}{D_{0,0}^{(k-2)}} .$$

La relation de Sylvester montre que cette expression est égale à  $\frac{D_{m,n}^{(k)}}{D_{0,0}^{(k-1)}}$ , donc notre récurrence est établie.

Par suite

$$G(x, y) = \frac{1}{G(0, 0)} G(x, 0) G(0, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{k-1}}{D_k} (xy)^k G_k(x, 0) G_k(0, y) .$$

La condition  $D_n \neq 0$  est donc suffisante.

Il est clair qu'elle est nécessaire, car

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \psi_n(y)}{(xy)^{n+1}} ,$$

on a

$$D_n = \prod_{k=0}^{n-1} \varphi_k(\infty) \psi_k(\infty) .$$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] CARLSON (Fritz). - Über ganzwertige Funktionen, Math. Z., t. 11, 1921, p. 1-23.
- [2] FEKETE (M.). - Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Z., t. 17, 1923, p. 228-249.
- [3] KRONECKER (L.). - Zur Theorie der Elimination einer Variablen aus zwei algebraischen Gleichungen, Berl. Monatsber., 1881, p. 535-600.
- [4] LELONG (Pierre). - Sur les séries de Taylor à deux variables, à coefficients entiers, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 226, 1948, p. 210-212.
- [5] PÓLYA (G.). - Über gewisse notwendige Determinantenkriterien für die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihe, Math. Annalen, t. 99, 1928, p. 687-706.