Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Jean-Paul Bertrandias

Critères d'équirépartition modulo un

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 4 (1962-1963), exp. n° 2, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1962-1963__4__A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
4e année, 1962/63, n° 2

12 novembre 1962

CRITÈRES D'ÉQUIRÉPARTITION MODULO UN

par Jean-Paul BERTRANDIAS

1. Définitions. Théorèmes fondamentaux.

Etant donnée une suite $\{u_n\}$ $(n = 0 , 1 , 2 , \ldots)$, de nombres réels, on étudie sa répartition modulo un c'est-à-dire la répartition dans l'intervalle $[0 , 1[$ de la suite $\{\check{u}_n\}$ des parties fractionnaires des nombres u_n .

Soit $[\alpha , \beta[$ un intervalle contenu dans l'intervalle $[0 , 1[$. On note $N(\alpha , \beta)$ le nombre des termes de la suite $\{u_n\}$ d'indice inférieur à N et dont la partie fractionnaire $\check{u}_n$ appartient à l'intervalle $[\alpha , \beta[$.

DÉFINITION 1. - <u>On dit que la suite</u> $\{u_n\}$ <u>est équirépartie</u> modulo un (e. r. mod 1) <u>si, quel que soit l'intervalle</u> $[\alpha , \beta[\subset [0 , 1[$, <u>on a</u> :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N(\alpha , \beta)}{N} = \beta - \alpha \ .$$

Des conditions nécessaires et suffisantes d'équirépartition sont données par les théorèmes suivants (théorèmes de H. WEYL) :

THÉORÈME 1. - <u>Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite</u> $\{u_n\}$ <u>soit e. r.</u> mod 1 <u>est que, pour toute fonction</u> $f(x)$ <u>intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle</u> $[0 , 1[$, <u>on ait</u> :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\check{u}_n) = \int_0^1 f(x)\, dx \ .$$

THÉORÈME 2. - <u>Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite</u> $\{u_n\}$ <u>soit</u> e. r. mod 1 <u>est que, pour tout entier</u> ℓ <u>positif</u> $(\ell > 0)$, <u>on ait</u> :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp(2i\pi\ell\ u_n) = 0 \ .$$

Une condition suffisante d'équirépartition est la suivante :

THÉORÈME 3. (Critère de Van der corput). - <u>Une condition suffisante pour que la suite</u> $\{u_n\}$ <u>soit</u> e. r. mod 1 <u>est que les suites</u> $\{u_n\} = \{u_{n+k} - u_n\}$ <u>soient</u> e. r. mod 1 <u>pour tous les entiers</u> $k > 0$.

Les démonstrations classiques de ces théorèmes ont été données l'an dernier par J. CHAUVINEAU [4]. Le but de cet exposé est de démontrer quelques critères d'équirépartition analogues à celui de Van der corput au moyen de certaines méthodes utilisées dans la théorie des fonctions pseudo-aléatoires. Le point de départ de ces applications se trouve dans le travail de J. BASS [1]. La rédaction de cet exposé reprend et complète un article à paraître dans les comptes rendus du Colloque de Théorie des nombres [Août 1962. BREUKELEN].

2. Fonctions pseudo-aléatoires et quasi-pseudo-aléatoires.

Les fonctions pseudo-aléatoires ont été définies comme fonctions de la variable réelle continue [1], [3] mais pour l'étude des suites, il est plus commode d'utiliser directement des fonctions de la variable discrète $n = 0 , 1 , 2 , \dots$ On prendra alors comme définition :

DÉFINITION 2. - Une fonction $f(n)$ est pseudo-aléatoire si la fonction de corrélation

$$(1) \qquad \gamma(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n+k)\,\overline{f(n)} = M_n\, f(n+k)\,\overline{f(n)}$$

existe pour tous les entiers k et est nulle en moyenne quadratique c'est-à-dire que

$$(2) \qquad \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2K} \sum_{k=-K}^{K-1} |\gamma(k)|^2 = \mathfrak{M}_k |\gamma(k)|^2 = 0 \ .$$

Si les limites intervenant dans (1) n'existent pas, on peut, dans certains cas, définir un ensemble G de "fonctions de corrélation généralisées" $\gamma_G(k)$. On suppose que

$$(3) \qquad \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |f(n)|^2 = M^2 < \infty$$

et

$$(4) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} f(N) = 0 \ .$$

L'inégalité de Schwarz donne

$$(5) \qquad \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n+k)\,\overline{f(n)} \leq M^2$$

et par le procédé diagonal, on peut trouver au moins une suite d'entiers $\{N_j\}$ strictement croissante, telle que

$$(6) \qquad \frac{1}{N_j} \sum_{n=0}^{N_j-1} f(n+k)\,\overline{f(n)}$$

converge quel que soit l'entier k, vers une limite qu'on appellera $\gamma_G(k)$.

DÉFINITION 3. – Si toutes les fonctions $\gamma_G(k)$ possibles vérifient la condition (2), on dira que la fonction $f(n)$ est quasi-pseudo-aléatoire.

3. Propriétés des fonctions pseudo-aléatoires et quasi-pseudo-aléatoires.

Les théorèmes connus sur les fonctions pseudo-aléatoires [(1), (3)] s'adaptent facilement au cas discret et aux fonctions quasi-pseudo-aléatoires. On obtient ainsi :

THÉORÈME 4. – Les fonctions $\gamma_G(k)$ [ou $\gamma(k)$] sont bornées par $\gamma_G(0)$ [ou $\gamma(0)$] et sont de type positif.

D'après le théorème de Bochner-Herglotz, il existe donc des mesures $\alpha_G(\omega)$ non négatives et bornées sur $[0, 1[$ telles que

$$\gamma_G(k) = \int_0^1 \exp i\omega k \, d\alpha_G(\omega) \quad (7)$$

D'après le théorème de Wiener-Schoenberg, on a :

THÉORÈME 5. – Les mesures spectrales $\alpha_G(\omega)$ sont continues, c'est-à-dire que ces mesures ne comportent pas de masses ponctuelles.

La condition (2) est en effet équivalente à la continuité des mesures $\alpha_G(\omega)$.

Entre les moyennes de $f(n)$ et des fonctions $\gamma_G(k)$ on a l'inégalité

$$\limsup_{N\to\infty} \left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n)\right|^2 \leq \sup_G \mathfrak{M}_k \, \gamma_G(k) = \sup_G \Delta\alpha_G \quad (8)$$

$\Delta\alpha_G$ étant la masse concentrée au point $\omega = 0$. D'après le théorème 5, on a donc :

THÉORÈME 6. – La moyenne d'une fonction pseudo-aléatoire ou quasi-pseudo-aléatoire existe et est nulle.

Une autre importante propriété de moyenne est la suivante [3] :

THÉORÈME 7. – Le produit d'une fonction pseudo-aléatoire ou quasi-pseudo-aléatoire par une fonction presque périodique au sens de Besicovitch B^2 (p. p. B^2) a une moyenne nulle.

4. Suites pseudo-aléatoires et quasi-pseudo-aléatoires.

A une suite $\{u_n\}$ de nombres réels définis modulo un, on peut associer de manière biunivoque la fonction :

$$g(n) = \exp 2i\pi\, u_n .$$

DÉFINITION 4. - Si toutes les puissances positives $g^{\ell}(n)$ de $g(n)$ sont pseudo-aléatoires (resp. quasi-pseudo-aléatoires) on dira que la suite $\{u_n\}$ est pseudo-aléatoire (resp. quasi-pseudo-aléatoire).

On notera $\gamma^{(\ell)}(k)$ ou $\gamma_G^{(\ell)}(k)$ les fonctions de corrélation ordinaires ou généralisées des fonctions $g^{\ell}(n)$.

D'après des résultats de E. HLAWKA [8], on peut dire que presque toutes les suites sont pseudo-aléatoires, "presque toutes" étant entendu au sens de la mesure de Haar sur le tore infini. Les fonctions de corrélation correspondantes sont de la forme :

$$\gamma(0) = 1 \quad \text{et} \quad \gamma(k) = 0 \qquad \text{pour} \quad k \neq 0 .$$

5. Critères classiques d'équirépartition.

Le théorème 2 peut s'énoncer de la manière suivante :

THÉORÈME 8. - Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $\{u_n\}$ soit équirépartie modulo un est que la fonction associée $g(n)$ soit telle que

$$M_n\, g^{\ell}(n) = 0 \tag{9}$$

pour tout entier ℓ non nul.

Le théorème 6 montre alors immédiatement qu'une suite pseudo-aléatoire ou quasi-pseudo-aléatoire est équirépartie. Dans les critères classiques d'équirépartition, ce sont de telles suites qui interviennent.

Démonstration du critère de Van der corput. - Le théorème 8 montre que :

$$M_n \exp 2i\pi\, \ell[u_{n+k} - u_n] = 0 \tag{10}$$

donc $\gamma^{(\ell)}(k) = 0$ pour k et ℓ non nuls. Les fonctions $g^{\ell}(n)$ sont pseudo-aléatoires pour ℓ non nul. La suite $\{u_n\}$ est alors pseudo-aléatoire donc équirépartie.

THÉORÈME 9. - Si $\{u_{n+k} - u_n\}$ est équirépartie pour des valeurs de k de densité naturelle 1, la suite $\{u_n\}$ est équirépartie.

L'égalité (10), valable pour une suite de valeurs de k de densité 1, donne ici $\gamma_G^{(\ell)}(k) = 0$ pour une suite de densité 1. Donc toutes les fonctions de corrélation généralisées ont une moyenne quadratique nulle. Les fonctions $g^{\ell}(n)$ et donc la suite $\{u_n\}$ sont quasi-pseudo-aléatoires d'où le résultat.

THÉORÈME 10. (KOROBOV-POSTNIKOV). - Si $\{u_{n+k} - u_n\}$ est équirépartie pour tous les entiers k non nuls ou plus généralement pour des valeurs de k de densité 1 la suite $\{u_{\lambda m+\mu}\}$ est équirépartie, μ et $\lambda \neq 0$ étant des entiers fixes.

Les fonctions $g^{\ell}(n)$ sont quasi-pseudo-aléatoires. On peut appliquer le théorème 7 avec la fonction périodique $\varphi(n) = \varphi^{\ell}(n)$ définie par

$$\begin{cases} \varphi(n) = 1 \quad \text{si} \quad n = \mu \text{ modulo } \lambda \ , \\ \varphi(n) = 0 \quad \text{si} \quad n \neq \mu \text{ modulo } \lambda \ . \end{cases}$$

On a $M_m \exp 2i\pi\, \ell u_{\lambda m+\mu} = 0$ et le théorème 8 donne le résultat.

THÉORÈME 11. - Si la suite $\{u_n\}$ est telle que pour tout entier $\ell \neq 0$ et pour tout $a > 0$ les inégalités :

$$|\gamma_G^{(\ell)}(k)| \geqslant a$$

ou à plus forte raison :

$$\limsup_{N\to\infty} \left|\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp 2i\pi\, \ell[u_{n+k} - u_n]\right| \geqslant a$$

n'ont lieu que pour une suite de valeurs de k de densité nulle, la suite $\{u_n\}$ est équirépartie.

En effet, d'après les conditions imposées, les moyennes quadratiques des fonctions $\gamma_G^{(\ell)}(k)$ sont toutes nulles et la suite $\{u_n\}$ est quasi-pseudo-aléatoire donc équirépartie.

6. Autre critère d'équirépartition.

Les critères précédents utilisent tous la moyenne quadratique de la fonction de corrélation : si celle-ci est nulle, la mesure spectrale $\alpha(\omega)$ est continue. On peut utiliser d'autres conditions de continuité de $\alpha(\omega)$.

Si, étant donné un entier $\nu > 0$, on considère la fonction $\gamma_G(\nu h)$ de l'entier h , on voit facilement qu'elle est de type positif et que, par conséquent,

$$\gamma_G(\nu h) = \int_0^1 \exp 2i\pi\, \omega h\, d\beta_G(\omega) = \int_0^1 \exp 2i\pi\, \omega\nu h\, d\beta_G(\nu\omega)$$

$\beta_G(\omega)$ étant une mesure non négative et bornée sur $[0\ ,\ 1[$. En comparant avec l'expression de $\gamma_G(\nu h)$ donnée par (7), on obtient :

$$\beta_G(\omega) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_G\left(\frac{\omega + j}{\nu}\right) .$$

Comme $\alpha_G(\omega)$ et $\beta_G(\omega)$ sont des mesures non négatives et bornées la continuité de $\beta_G(\omega)$ est équivalente à la continuité de $\alpha_G(\omega)$. Cette condition de continuité permet d'obtenir le critère suivant dont l'énoncé est dû à H. DELANGE (cité dans [4]).

THÉORÈME 12. - Si les suites $\{u_{n+k} - u_n\}$ sont équiréparties pour des valeurs de k multiples d'un même entier positif ν : $k = \nu , 2\nu , \ldots , h\nu , \ldots$ (ou même simplement pour une suite de valeurs de h de densité 1), la suite $\{u_n\}$ est équirépartie (ou plus généralement les suites $\{u_{\lambda n+\mu}\}$ sont équiréparties).

En effet, l'hypothèse entraîne que les fonctions $\gamma_G^{(\ell)}(\nu h)$ ont une moyenne quadratique nulle (en h) et donc que les mesures $\beta_G^{(\ell)}(\omega)$ correspondantes sont continues. Les mesures $\alpha_G^{(\ell)}(\omega)$ sont alors aussi continues ou, ce qui revient au même, les fonctions $\gamma_G^{(\ell)}(k)$ ont une moyenne quadratique nulle. La suite $\{u_n\}$ est donc quasi-pseudo-aléatoire et est équirépartie.

7. Généralisations.

En suivant les méthodes indiquées par E. HLAWKA [7] et J. CIGLER [5], on peut généraliser la notion de suites pseudo-aléatoires et quasi-pseudo-aléatoires pour des suites d'éléments d'un groupe compact à base dénombrable. On peut ainsi traduire de manière immédiate le théorème 12 par exemple.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASS (Jean). - Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires, Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 1-64.

[2] BASS (J.) et BERTRANDIAS (J.-P.). - Moyennes de sommes trigonométriques et fonctions d'autocorrélation, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 2457-2459.

[3] BERTRANDIAS (Jean-Paul). - Fonctions pseudo-aléatoires et fonctions presque périodiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 255, 1962, p. 2226-2228.

[4] CHAUVINEAU (Jean). - Equirépartition et équirépartition uniforme modulo 1, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 3, 1961/62, n° 7, 35 p.

[5] CIGLER (Johann). - Über eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Theorie der Gleichverteilung, J. für die reine und angew. Math., t. 210, 1962, p. 141-147.

[6] CIGLER (J.) und HELMBERG (G.). - Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung, Jahr. Deut. Math. Verein., t. 64, 1961, p. 1-50.

[7] HLAWKA (Edmund). - Zur formalen Theorie der Gleichverteilung in kompakten Gruppen, Rend. Circ. Mat. Palermo, t. 4, 1955, p. 33-47.

[8] HLAWKA (Edmund). - Erbliche Eigenschaften in der Theorie der Gleichverteilung, Publ. Math., Debrecen, t. 7, 1960, p. 181-186.