

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

FRANÇOIS DRESS

Déterminants de Hankel du quotient de deux séries entières

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 4 (1962-1963), exp. n° 21, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1962-1963__4__A17_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉTERMINANTS DE HANKEL DU QUOTIENT DE DEUX SÉRIES ENTIÈRES

par François DRESS

1. Définitions.

On se donne un corps K et deux séries formelles inverses :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in K, \quad a_0 \neq 0$$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_n \in K, \quad c_0 \neq 0$$

$$F(z) G(z) \equiv 1$$

et on considère deux sortes de déterminants attachés aux fonctions $F(z)$ et $G(z)$:

$$D_m^{(p)}(F) = \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_0 & \dots & a_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & \dots & a_m & \dots & a_{m+p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_p & \dots & a_{m+p} & \dots & a_{m+2p} \end{vmatrix}$$

et $D_m^{(p)}(G)$ défini de la même manière,

$$H_m^{(p)}(F) = \begin{vmatrix} a_m & \dots & a_{m+p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m+p} & \dots & a_{m+2p} \end{vmatrix}$$

et $H_m^{(p)}(G)$ défini de la même manière, les déterminants H étant les déterminants de Hankel de $F(z)$ et de $G(z)$.

2. Résultat de BOREL ([1], p. 32-43).

BOREL a démontré que :

$$H_m^{(p)}(F) = \pm \frac{D_{m-2}^{(p+1)}(G)}{c_0^{m+2p+1}} \quad (m \geq 2)$$

et, en corollaire :

$$D_m^{(p)}(F) = \frac{H_{m+2}^{(p-1)}(G)}{c_0^{m+2p+1}} \quad (p \geq 1).$$

Démonstration. - Considérons le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{m+p-1} \\ 0 & a_0 & \dots & a_{m+p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = a_0^{m+p}$$

et effectuons le produit (lignes par colonnes) $D_{m-2}^{(p+1)}(G) \cdot \Delta$, en tenant compte des relations suivantes (qui expriment $F(z) G(z) \equiv 1$) :

$$\begin{aligned} a_0 c_0 &= 1 \\ a_0 c_1 + a_1 c_0 &= 0 \\ \dots &= 0 \\ a_0 c_k + a_1 c_{k-1} + \dots + a_k c_0 &= 0, \end{aligned}$$

Il vient :

$$a_0^{m+p} D_{m-2}^{(p+1)}(G) =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_0 c_1 & \dots & a_0 c_{m-1} + \dots + a_{m-2} c_1 & | & a_0 c_m + \dots + a_{m-1} c_1 & \dots & a_0 c_{m+p} + \dots + a_{m+p-1} c_1 \\ \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots \\ a_0 c_{p+1} & \dots & a_0 c_{m+p-1} + \dots + a_{m-2} c_{p+1} & | & a_0 c_{m+p} + \dots + a_{m-1} c_{p+1} & \dots & a_0 c_{m+2p} + \dots + a_{m+p-1} c_{p+1} \end{vmatrix}$$

Ce déterminant se réduit au produit des deux déterminants mineurs des coins supérieur gauche et inférieur droit. Le premier de ceux-ci étant formé d'une diagonale de 1, il vient, en tenant compte encore une fois des relations ci-dessus :

$$\begin{aligned} a_0^{m+p} D_{m-2}^{(p+1)}(G) &= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_0 c_m + \dots + a_{m-1} c_1 & \dots & a_0 c_{m+p} + \dots + a_{m+p-1} c_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_0 c_{m+p} + \dots + a_{m-1} c_{p+1} & \dots & a_0 c_{m+2p} + \dots + a_{m+p-1} c_{p+1} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \begin{vmatrix} -a_m c_0 & \dots & -a_{m+p} c_0 \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_m c_p - \dots - a_{m+p} c_0 & \dots & -a_{m+p} c_p - \dots - a_{m+2p} c_0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Or ce dernier déterminant est égal au produit (lignes par colonnes) suivant :

$$(-1)^{p+1} \begin{vmatrix} c_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ c_p & \dots & c_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_m & \dots & a_{m+p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m+p} & \dots & a_{m+2p} \end{vmatrix}.$$

D'où :

$$a_0^{m+p} D_{m-2}^{(p+1)}(G) \equiv (-1)^{\frac{m(m-1)}{2} + p+1} c_0^{p+1} H_m^{(p)}(F)$$

ce qui démontre le résultat de BOREL.

3. Résultats littéraires sur des dénominateurs des déterminants de HANKEL [2].

A partir de maintenant, on supposera que $F(z)$ et $G(z)$ sont les quotients de deux séries entières (formelles toujours) :

$$F(z) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n}{\sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n} \quad \text{et} \quad G(z) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n}{\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n} \quad \begin{matrix} u_n, v_n \in K \\ u_0, v_0 \neq 0 \end{matrix}$$

Expression des coefficients et des déterminants de F et G . — On a :

$$v_0 F(v_0 z) = \frac{u_0 + u_1 v_0 z + u_2 v_0^2 z^2 + \dots}{1 + v_1 z + v_2 v_0 z^2 + \dots} = A_0 + A_1 z + \dots + A_n z^n + \dots$$

avec $A_n = A_n(u_0, \dots, u_n; v_0, \dots, v_n)$ polynôme à coefficients entiers, d'où :

$$a_n = \frac{A_n}{v_0^{n+1}}.$$

On a alors :

$$H_m^{(p)}(F) = \begin{vmatrix} a_m & \dots & a_{m+p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m+p} & \dots & a_{m+2p} \end{vmatrix} = \sum (-1)^I a_{m+i_0} \dots a_{m+p+i_p}$$

où $(i_0, \dots, i_p)$ est une permutation de parité I des nombres $(0, \dots, p)$.

Or :

$$\begin{aligned} & v_0^{m+i_0+1} \dots v_0^{m+p+i_p+1} a_{m+i_0} \dots a_{m+p+i_p} \\ &= v_0^{\frac{(m+1)(p+1)}{2} + \frac{p(p+1)}{2}} a_{m+i_0} \dots a_{m+p+i_p} = v_0^{(m+p+1)(p+1)} a_{m+i_0} \dots a_{m+p+i_p} \end{aligned}$$

est un polynôme à coefficients entiers en les u_i et les v_j . D'où :

$$H_m^{(p)}(F) = \frac{P_m^{(p)}(u_i, v_j)}{v_0^{(m+p+1)(p+1)}}.$$

On démontrerait de même que :

$$D_m^{(p)}(F) = \frac{Q_m^{(p)}(u_i, v_j)}{v_0^{(m+p+1)(p+1)+\mu_m}}$$

(avec $\mu_m = \left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{m-1}{2}\right]$, ce qui est d'ailleurs sans importance pour la suite).

On a, bien entendu, des résultats similaires pour les coefficients et les déterminants de G .

Dénominateurs des expressions littérales des déterminants H et D . - La relation :

$$H_m^{(p)}(F) = \pm \frac{D_{m-2}^{(p+1)}(G)}{c_0^{m+2p+1}} \quad (m \geq 2)$$

donne :

$$H_m^{(p)}(F) = \pm \left(\frac{u_0}{v_0}\right)^{m+2p+1} \frac{Q_{m-2}^{(p+1)}(u_i, v_j)}{u_0^{(m+p)(p+2)+\mu_{m-2}}}$$

mais on a également :

$$H_m^{(p)}(F) = \frac{P_m^{(p)}(u_i, v_j)}{v_0^{(m+p+1)(p+1)}}.$$

Par suite :

$$\pm \frac{v_0^{(m+p)p} Q_{m-2}^{(p+1)}(u_i, v_j)}{u_0^{(m+p-1)(p+1)+\mu_{m-2}}} = P_m^{(p)}(u_i, v_j).$$

Si maintenant on laisse fixes les u_i ($i \geq 1$) et les v_j ($j \geq 0$), en ne considérant plus que la seule variable u_0 , il en résulte que $Q_{m-2}^{(p+1)}(u_i, v_j)$ contient nécessairement $u_0^{(m+p-1)(p+1)+\mu_{m-2}}$ en facteur, d'où :

$$H_m^{(p)}(F) = \frac{H_m^{(p)}(u_i, v_i)}{v_0^{m+2p+1}} \quad (m \geq 2)$$

où $\mathcal{H}_m^{(p)}(u_i, v_j)$ est un polynôme à coefficients entiers.

On démontrerait de même que :

$$D_m^{(p)}(F) = \frac{\mathcal{Q}_m^{(p)}(u_i, v_j)}{v_0^{m+2p+1}} \quad (p \geq 1)$$

où $\mathcal{Q}_m^{(p)}(u_i, v_j)$ est un polynôme à coefficients entiers.

On peut maintenant remarquer que $D_0^{(p)}(F) = H_0^{(p)}(F)$, ce qui étend à $m = 0$ la relation précédente relative aux déterminants de Hankel (le cas $p = 0$ étant évident).

Il reste $m = 1$. Considérons l'identité classique de Sylvester appliquée aux déterminants de Hankel :

$$H_{m-1}^{(p)} H_{m+1}^{(p)} - \{H_m^{(p)}\}^2 = H_{m-1}^{(p+1)} H_{m+1}^{(p-1)}$$

et faisons $m = 1$ ($p \geq 1$. Comme dans le cas précédent, $p = 0$ est évident).

$$H_0^{(p)} H_2^{(p)} - \{H_1^{(p)}\}^2 = H_0^{(p+1)} H_2^{(p-1)}.$$

Soit :

$$\{H_1^{(p)}\}^2 = \frac{\mathcal{Q}_0^{(p)}}{v_0^{2p+1}} \cdot \frac{\mathcal{H}_2^{(p)}}{v_0^{2p+3}} - \frac{\mathcal{Q}_0^{(p+1)}}{v_0^{2p+3}} \cdot \frac{\mathcal{H}_0^{(p-1)}}{v_0^{2p+1}}$$

d'où on déduit que $v_0^{4p+4} \{H_1^{(p)}\}^2$ est un polynôme à coefficients entiers, qui est nécessairement un carré parfait. Donc la relation :

$$H_m^{(p)}(F) = \frac{\text{polynôme à coefficients entiers}}{v_0^{m+2p+1}}$$

est valable quels que soient m et p .

4. THÉOREME. - Si les séries $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n$ sont à coefficients entiers, on en déduit pour les déterminants de Hankel du quotient :

$$H_m^{(p)}(F) = \frac{\text{entier}}{v_0^{m+2p+1}}$$

et, en particulier, pour les déterminants de Kronecker :

$$K_p(F) = H_0^{(p)}(F) = \frac{\text{entier}}{v_0^{2p+1}}.$$

5. Résultats complémentaire sur les déterminants de Kronecker.

On va montrer qu'en un sens - assez restreint d'ailleurs - ce dernier résultat constitue le meilleur possible.

Supposons que $K_p(F) = \frac{\text{entier}}{v_0^{2p}}$ quel que soit p . Alors $K_0(F) = a_0 = \frac{u_0}{v_0} = \text{entier}$, d'où $v_0 | u_0$.

On va montrer que si, réciproquement $v_0 | u_0$, alors $K_p(F) = \frac{\text{entier}}{v_0^{2p}}$ quel que soit p .

Démonstration. - Reprenons l'expression :

$$K_p = \frac{\omega_0^{(p)}(u_i, v_j)}{v_0^{2p+1}}$$

et donnons aux u_i ($i \geq 1$) et v_j ($j \geq 0$) leurs valeurs numériques en ne portant plus notre attention que sur la seule variable u_0 . On aura :

$$K_p = \frac{d_0 + d_1 u_0 + d_2 u_0^2 + \dots + d_k u_0^k}{v_0^{2p+1}} \quad d_0, \dots, d_k \in \mathbb{Z}.$$

Considérons maintenant la fonction :

$$F_1(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{u_1 z + u_2 z^2 + \dots}{v_0 + v_1 z + v_2 z^2 + \dots} = \frac{1}{z} (b_1 z + b_2 z^2 + \dots)$$

et son déterminant :

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & \dots & b_p \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_p & b_{p+1} & \dots & b_{2p} \end{vmatrix} = D_1^{(p-1)}(F_1) = \frac{\text{entier}}{v_0^{2p}}$$

qui n'est autre que :

$$K_p(F; u_0 = 0) = \frac{d_0}{v_0^{2p+1}}$$

ce qui prouve que $v_0 | d_0$. Si de plus $v_0 | u_0$, alors :

$$K_p = \frac{\text{entier}}{v_0^{2p}}.$$

Signalons pour terminer que la recherche de résultats plus forts se heurte à de sérieuses difficultés en particulier lorsque v_0 est une puissance parfaite.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOREL (Emile). - Leçons sur les fonctions méromorphes. - Paris, Gauthier-Villars, 1903.
 - [2] DRESS (François). - Déterminants de Hankel du quotient de deux séries entières à coefficients entiers, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1962, p.4338-4340.
-