Françoise Bertrandias

Séries de Taylor à coefficients rationnels

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 4 (1962-1963), exp. nº 17, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1962-1963__4__A15_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
4e année, 1962/63, n° 17

25 mars 1963

SÉRIES DE TAYLOR À COEFFICIENTS RATIONNELS

par Mme Françoise BERTRANDIAS

Soit $f(z)$ la fonction analytique de la variable complexe z représentée au voisinage de l'infini par la série de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{-n} .$$

Dans le cas u_n rationnel, on posera $u_n = \frac{a_n}{b_n}$, a_n, b_n entiers rationnels, tels que $(a_n , b_n) = 1$, $b_n \geq 1$ et $b_n = 1$ si $u_n = 0$.

I. Exemples de généralisations du théorème de Polya et Carlson.

Lorsque u_n est entier rationnel (pour tout n), on a les résultats suivants :

a. Si $R = \overline{\lim} |u_n|^{1/n} < 1$, $f(z)$ est un polynôme en $\frac{1}{z}$.

b. Si $f(z)$ est méromorphe avec un nombre fini h de pôles à l'extérieur du cercle $|z| \leq \rho$, et si $\rho < 1$, $f(z)$ est rationnelle (théorème de Borel).

La démonstration utilise les déterminants récurrents de Hankel

$$D_n^{(k)} = \begin{vmatrix} u_n & \cdots & u_{n+k} \\ \vdots & & \\ u_{n+k} & & u_{n+2k} \end{vmatrix}$$

et l'inégalité :

$$(1.1) \qquad \overline{\lim_{\substack{n\infty \\ k \text{ fixe}}}} |D_n^{(k)}|^{1/n} \leq R\rho^{k+1-h} \qquad \text{pour tout } k > h .$$

c. Si $f(z)$ est holomorphe et uniforme dans le complémentaire d'un compact K de diamètre transfini $\tau < 1$, $f(z)$ est rationnelle (théorème de Polya et Carlson).

La démonstration utilise les déterminants de Kronecker $D_0^{(n)}$ et l'inégalité

$$(1.2) \qquad \overline{\lim_{n\infty}} |D_0^{(n)}|^{1/n^2} \leq \tau$$

(les inégalités (1.1) et (1.2) sont valables quels que soient les u_n complexes).

Lorsque u_n est rationnel (pour tout n) le résultat (a) se généralise aisément : Si $R < (\overline{\lim_{n\infty}} b_n^{1/n})^{-1}$, $f(z)$ est un polynôme en $\frac{1}{z}$. Pour généraliser les résultats (b) et (c) on est obligé de faire des hypothèses supplémentaires sur les u_n .

Par exemple, on peut imposer aux u_n de vérifier la condition d'Eisenstein :

Condition (E) : il existe un entier c non nul tel que $c^n u_n$ soit entier pour tout n (on sait que cette condition est une condition nécessaire pour que $f(z)$ soit algébrique). On a alors la généralisation du théorème de Polya et Carlson :

THÉORÈME 1.1. - Si $f(z)$ vérifie la condition (E) et si $\tau < \frac{1}{c}$, $f(z)$ est rationnelle (se démontre en utilisant l'inégalité (1.2) et le fait que $c^{\lambda_n} D_0^{(n)}$ est entier avec $\lambda_n = n^2 + o(n^2)$).

On peut imposer aux u_n des conditions moins fortes que la condition (E). Soit par exemple la condition suivante :

Condition (E'): les b_n ne sont divisibles que par un nombre fini de nombres premiers p $(p \in P)$ et l'on a $\overline{\lim}_{n\infty} |u_n|_p^{1/n} = R_p$ avec R_p fini. Dans ce cas, on a le résultat :

THÉORÈME 1.2. - Si $f(z)$ vérifie la condition (E') et si $\tau < (\prod_{p \in P} R_p)^{-1}$, $f(z)$ est rationnelle.

Se démontre à l'aide de l'inégalité (1.2) et des inégalités

$$\overline{\lim}_{n\infty} |D_0^{(n)}|_p^{1/n^2} \leq R_p \ . \ .$$

Si l'on ne restreint plus à un ensemble fini les nombres premiers p divisant les b_n, il faut imposer une majoration aux exposants des p. Soit par exemple la condition suivante :

Condition (F) : il existe une constante positive Λ telle que pour tout p premier et pour tout $n > n_0$, $|u_n|_p \leq \Lambda n$ (c'est-à-dire, si l'on désigne par ω_n le p. p. c. m. des nombres $1, 2, \ldots, m$, b_n divise $\omega_{[\Lambda n]}$).

Dans ce cas on obtient les résultats suivants, généralisant les résultats (b) et (c) :

THÉORÈME 1.3. - Si $f(z)$ vérifie la condition (F) et a un rayon de méromorphie (au sens de (b)) $\rho < \exp - \Lambda$, $f(z)$ est rationnelle.

THÉORÈME 1.4. - Si $f(z)$ vérifie la condition (F) et si le compact K (du sens de (c)) a un diamètre transfini $\tau < \exp(- 3/2\, \Lambda)$, $f(z)$ est rationnelle.

COROLLAIRE. - Si u_n rationnel et $|u_n|_p = o(n)$ pour tout p, et si le compact K a un diamètre transfini $\tau < 1$, $f(z)$ est rationnelle.

<u>**Démonstration.**</u> **- On utilise le déterminant $D_n^{(k)}$.**

$$D_n^{(k)} = \sum_H \pm u_{h_0} u_{h_1} \cdots u_{h_k}$$

sommation sur des ensembles d'indices

$$H = (h_0 , h_1 , \ldots , h_k) \qquad \text{où} \quad n \leqslant h_i \leqslant n + 2k .$$

La condition (F) entraîne :

$$|D_n^{(k)}|_p \leqslant p^{\max_H [(\mathrm{Log}\ Ah_0)/(\mathrm{Log}\ p)] + \cdots + [(\mathrm{Log}\ Ah_k)/(\mathrm{Log}\ p)]} .$$

On cherche une majoration de $\prod_p |D_n^{(k)}|_p$. Seuls les $p \leqslant A(n + 2k)$ donnent une majoration supérieure à 1. On répartit ces nombres premiers en deux classes :

1° $\sqrt{A(n + 2k)} < p \leqslant A(n + 2k)$

$$\frac{\mathrm{Log}\ Ah_i}{\mathrm{Log}\ p} < 2 \quad \text{pour tout} \quad h_i \qquad \text{donc} \quad \left[\frac{\mathrm{Log}\ Ah_i}{\mathrm{Log}\ p}\right] = 0 \quad \text{ou} \quad 1 .$$

$$\text{Si} \quad h_i < p/A, \left[\frac{\mathrm{Log}\ Ah_i}{\mathrm{Log}\ p}\right] = 0 \qquad \text{si} \quad h_i \geqslant p/A, \left[\frac{\mathrm{Log}\ Ah_i}{\mathrm{Log}\ p}\right] = 1 .$$

D'où deux cas :

a. $p \leqslant A(n + k)$: le maximum est atteint pour $h_0 = h_1 = \cdots = h_k = n + k$ et il est égal à $k + 1$

$$\prod_{\sqrt{A(n+2k)}<p\leqslant A(n+k)} |D_n^{(k)}|_p \leqslant \prod_{\sqrt{A(n+2k)}<p\leqslant A(n+k)} p^{k+1}$$

$$= \exp k(A(n + k) - \sqrt{A(n + 2k} + o(n + k)) .$$

b. $p > A(n + k)$: le maximum est atteint pour

$$h_k = h_{k-1} = \cdots = h_{k-j} = [\tfrac{p}{A}] + 1 > h_{k-j-1} \geqslant \cdots \geqslant h_0 \qquad \text{avec} \quad j = n + 2k - [\tfrac{p}{A}]$$

le maximum est donc égal à $n + 2k - [\frac{p}{A}]$. D'où :

$$\prod_{A(n+k)<p<A(n+2k)} |D_n^{(k)}|_p \leqslant \prod p^{n+2k-p/A-1}$$

$$= \exp(Ak + o(k))(n + 2k - 1) - \frac{A}{2}(2nk + 3k^2 + o(k^2))$$
$$= \exp 1/2\ Ak^2 - Ak + o(k^2) \quad \text{si} \quad k \to \infty \quad n \quad \text{fixe}$$
$$= \exp o(n) \qquad\qquad \text{si} \quad n \to \infty \quad k \quad \text{fixe}$$

2° $p \leqslant \sqrt{A(n + 2k)}$

$$|D_n^{(k)}|_p \leqslant A^{k+1}(n + k) \cdots (n + 2k)$$

$$\prod_{p \leq \sqrt{A(n+2k)}} |D_n^{(k)}|_p \leq (A^{k+1}(n+k) \dots (n+2k))^{((\sqrt{A(n+2k)}/\log\sqrt{n+2k}) + o(\sqrt{n+2k}))}$$

$$= \exp\left(\frac{\sqrt{A(n+2k)}}{\log \sqrt{A(n+2k)}} + o\sqrt{n+2k}\right)\left((k+1)\log A + n \log \frac{n+2k}{n+k} + k \log \frac{(n+2k)^2}{n+k} + k + O(\log(n+2k))\right))$$

D'où en rassemblant ces résultats :

$$(1.3) \qquad \prod_p |D_n^{(k)}|_p \leq \exp A(3/2\ k^2 + kn + O(k)\ o(n+2k))$$

majoration valable lorsque l'un des deux indices n ou k tend vers l'infini, l'autre étant fixe.

Les théorèmes 1.3 et 1.4 en résultent, en utilisant les inégalités (1.1) et (1.2). On remarque que le résultat (c) (théorème 1.4) ne contient pas le résultat (b) (théorème 1.3) à la différence de ce qui se produit dans le cas u_n entier. L'exemple $f(z) = \mathrm{Log} \frac{z}{z-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{-n}$ qui vérifie la condition (F) avec $A = 1$ et pour laquelle $R = \rho = 1$ $\tau = 1/4$ $(e^{-3/2} < 1/4 < e^{-1})$ montre que l'on ne peut espérer remplacer dans le théorème 1.4 la constante $\frac{3}{2} A$ par la constante A.

Les résultats précédents se généralisent au cas où les u_n sont des nombres algébriques appartenant à une même extension $Q(\theta)$ de degré s du corps des rationnels Q. Par exemple, dans le cas du théorème 1.4 on obtient :

THÉORÈME 1.5. - Soient $f_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(j)} z^{-n}$ (où $u_n^{(1)} \dots u_n^{(j)} \dots u_n^{(s)}$ sont des nombres algébriques conjugués dans les corps conjugués $Q(\theta^{(1)}) \dots Q(\theta^{(s)})$) s fonctions uniformes et holomorphes dans le complémentaire (respectivement) du compact K_j du plan de la variable complexe, de diamètre transfini τ_j. On suppose de plus que les $f_j(z)$ vérifient la condition :

$$|N(u_n^{(j)})|_p < An \qquad \text{pour tout } p \text{ et pour } n > n_0$$

($N(\alpha^{(j)})$ est la norme relative à $Q(\theta^{(j)})$).

Si l'on a l'inégalité : $\tau_1 \tau_2 \dots \tau_s < \exp(-3/2\ A)$, les fonctions $f_1(z) \dots f_s(z)$ sont rationnelles.

(La démonstration est analogue à celle du théorème 1.4. On a dans ce cas :

$$|u_n|_p = |N(u_n)|_p^{1/s} \leq p^{(1/s)[\mathrm{Log}\ An/\mathrm{Log}\ p]} .$$

II. Etude des dénominateurs b_n des coefficients de Taylor d'une fraction rationnelle.

Soit $f(z)$ une fraction rationnelle n'ayant pas de pôle à l'origine et dont le développement de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ est à coefficients rationnels. On sait que l'on peut écrire :

$$f(z) = \frac{a}{b}\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a}{b}\,\frac{p_0 + p_1 z + \dots}{q_0 + q_1 z + \dots + q_r z^r}$$

où a, b, p_i, q_i sont des entiers rationnels, et où l'on a choisi $(a, b) = 1$, $q_0 \geqslant 1$, et les polynômes P et Q primitifs et premiers entre eux. On sait que le dénominateur b_n de u_n est un diviseur de bq_0^{n+1}. On se propose de préciser la valeur de b_n dans le cas où $q_0 > 1$.

La méthode employée est celle de C. PISOT ([3], [4]) : elle consiste à étudier les valeurs absolues p-adiques $|u_n|_p$ de u_n dans les corps p-adiques Q_p relatifs aux nombres premiers p divisant q_0. On en déduit b_n par :

$$b_n = \prod_{p|q_0} \sup\{|u_n|_p , 1\} . \tag{2.1}$$

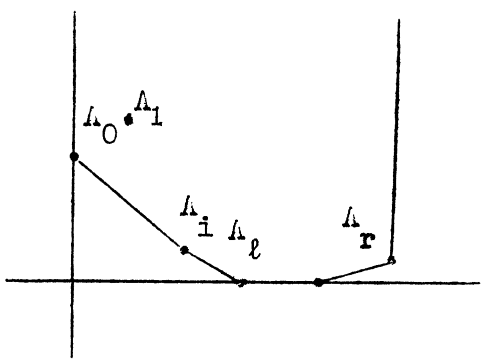
On utilise l'expression de u_n

$$u_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n)\ \theta_i^n \qquad (\text{pour } n > n_0) \tag{2.2}$$

où θ_1^{-1}, θ_2^{-1}, ..., θ_s^{-1} sont les s racines distinctes de $Q(z)$, P_i est un polynôme à coefficients algébriques dont le degré est inférieur d'une unité à la multiplicité de la racine θ_i^{-1}.

1. Etude de la valeur absolue $|u_n|_p$ pour un premier p divisant q_0. –

Posons $|q_j|_p = p^{-m_{j,p}}$ qu'on notera p^{-m_j}. Par hypothèse $m_0 \geqslant 1$; le polygone de Newton de $Q(z)$ fournit les valeurs absolues p-adiques des θ_i (A_j est le point de coordonnées j, $m_j \log p$). Soit $i_1(p) \dots i_s(p)$ une permutation des indices $1, 2, \dots, s$ telle que :



$$|\theta_{i_1}|_p = |\theta_{i_2}|_p = \dots = |\theta_{i_h}|_p > |\theta_{i_{h+1}}|_p \geqslant \dots \geqslant |\theta_{i_s}|_p .$$

La valeur absolue maximum qu'on désignera par $|\theta|_p$ est donnée par la pente du premier côté de longueur finie $A_0 A_i$ du polygone de Newton :

$$(2.3) \qquad |\theta|_p = p^{(m_0-m_i)/i} .$$

On sait que $1 \leq i \leq r$ d'où

$$(2.4) \qquad p^{m_0/r} \leq |\theta|_p \leq p^{m_0} .$$

On sait que $\overline{\lim}\ |u_n|_p^{1/n} = |\theta|_p^{-1}$. D'où un premier résultat :

$$(2.5) \qquad \overline{\lim}\ b_n^{1/n} \geq |\theta|_p \geq p^{m_0/r} > 1$$

(résultat déjà trouvé par C. LECH [1]).

Posons

$$v_{n,p} \text{ (ou pour abréger } v_n \text{) : } v_{n,p} = P_{i_1}(n)\ \theta_{i_1}^n + \dots + P_{i_h}(n)\ \theta_{i_h}^n$$

$$w_{n,p} \text{ (ou pour abréger } w_n \text{) : } w_{n,p} = P_{i_{h+1}}(n)\ \theta_{i_{h+1}}^n + \dots + P_{i_s}(n)\ \theta_{i_s}^n$$

$$f_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{n,p}\ z^n$$

et

$$g_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{n,p}\ z^n .$$

On peut écrire :

$$v_n = \theta_{i_1}^{n-k}(P_{i_1}(n)\ \theta_{i_1}^k + P_{i_2}(n)\ \theta_{i_2}^k\ \zeta_1^{n-k} + \dots + P_{i_h}(n)\ \theta_{i_h}^k\ \zeta_{h-1}^{n-k})$$

où

$$\zeta_1 = \frac{\theta_{i_2}}{\theta_{i_1}} \dots \zeta_{h-1} = \frac{\theta_{i_h}}{\theta_{i_1}}$$

sont des unités p-adiques.

Si $n - k = Mn'$ où M et n' sont des entiers positifs et si l'on pose :

$$\zeta_1^M = 1 + \omega_1 \dots \zeta_{h-1}^M = 1 + \omega_{h-1} .$$

On obtient :

$$(2.6) \qquad \begin{aligned} v_n\ \theta_{i_1}^{-(n-k)} = {} & P_{i_1}(n)\ \theta_{i_1}^k + P_{i_2}(n)\ \theta_{i_2}^k + \dots + P_{i_h}(n)\ \theta_{i_h}^k \\ & + \binom{n'}{1}(P_{i_2}(n)\ \theta_{i_2}^k\ \omega_1 + \dots + P_{i_h}(n)\ \theta_{i_h}^k\ \omega_{h-1}) \\ & \dots \\ & + \binom{n'}{j}(P_{i_2}(n)\ \theta_{i_2}^k\ \omega_1^j + \dots + P_{i_h}(n)\ \theta_{i_h}^k\ \omega_{h-1}^j) \\ & \dots \\ & + \quad (P_{i_2}(n)\ \theta_{i_2}^k\ \omega_1^{n'} + \dots + P_{i_h}(n)\ \theta_{i_h}^k\ \omega_{h-1}^{n'}) . \end{aligned}$$

Désignons par $\Pi_k(x)$ le polynôme :

$$\Pi_k(x) = P_{i_1}(x)\,\theta_{i_1}^k + \dots + P_{i_h}(x)\,\theta_{i_h}^k .$$

Si $\Pi_k(k) = v_k \neq 0$, désignons par ϖ_k (non nul) la plus petite distance de k aux zéros de $\Pi_k(x)$ (dans K_p extension algébrique de Q_p)

$$\text{si } |x - k|_p < \varpi_k \qquad |\Pi_k(x)|_p = |v_k|_p .$$

Il existe alors des constantes positives $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{h-1}$ dépendant de k telles que $|\varepsilon_{j-1} P_{i_j}(x)\,\theta_{i_j}^k|_p < |v_k|_p$ pour tout x de K_p tel que $|x|_p \leq 1$.

Les nombres algébriques $\zeta_1 \dots \zeta_{h-1}$ étant des unités p-adiques appartenant à une extension finie de Q_p, il existe un entier positif M'_k tel que l'on ait simultanément :

$$(2.7) \qquad \begin{aligned} &|\zeta_1^{M'_k} - 1|_p = |\omega_1|_p < \varepsilon_1 \\ &\dots \\ &|\zeta_{h-1}^{M'_k} - 1|_p = |\omega_{h-1}|_p < \varepsilon_{h-1} \end{aligned}$$

(théorie des unités distinguées ; voir par exemple K. MAHLER [2]), ce qui entraîne pour tout entier n' positif :

$$|\zeta_1^{M'_k n'} - 1| < \varepsilon_1 \dots |\zeta_{h-1}^{M'_k n'} - 1|_p \leq \varepsilon_{h-1} .$$

Soit M'_k un entier satisfaisant (2.7) et soit p^{ℓ_k} une puissance de p telle que $p^{-\ell_k} < \varpi_k$. Posons alors $M = M(k, p) = M'_k \cdot p^{\ell_k}$.

Si n vérifie $n = k + M(k, p)\,n'$ où n' entier positif quelconque l'égalité (2.6) montre que :

$$|v_n|_p = |\theta|_p^{n-k}\,|v_k|_p .$$

D'où le résultat (en remarquant que pour $n > n_0$, $|w_n|_p < |v_n|_p$) :

THÉORÈME 2.1. - <u>Pour tout indice</u> k <u>tel que</u> $v_{k,p} \neq 0$, <u>il existe un entier positif</u> $M(k, p)$ <u>tel que pour tout entier</u> n <u>de la progression arithmétique</u> $n = k + M(k, p)\,n'$ <u>à partir d'un certain rang</u> $(n > n_0(p, k))$ <u>on ait</u>

$$|u_n|_p = |v_k|_p\,|\theta|_p^{n-k} .$$

2. <u>Etude de l'ensemble des indices</u> k <u>tels que</u> $v_{k,p} = 0$. - Soit $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ une fraction rationnelle telle que P et Q soient premiers entre eux, soient μ un entier positif quelconque et ζ une racine primitive de $z^\mu - 1 = 0$. On a :

$$f(z) = \frac{P(z)\ P(\zeta z)\ \dots\ P(\zeta^{\mu-1}\ z)}{Q(z)\ Q(\zeta z)\ \dots\ Q(\zeta^{\mu-1}\ z)} = \frac{P^*(z)}{Q^*(z^\mu)} = \frac{a_0 + a_1\ z + \dots}{Q^*(z^\mu)} .$$

Si les coefficients de $P^*(z)$ vérifient $a_j = 0$ pour tout $j \equiv t \pmod{\mu}$, les coefficients de Taylor u_k de $f(z)$ sont tous nuls (à partir d'un certain rang), pour les indices k appartenant à la progression arithmétique $k \equiv t \pmod{\mu}$. K. MAHLER [2] a montré qu'il existe un entier μ tel qu'on obtienne de cette manière tous les indices k tels que $u_k = 0$; c'est-à-dire : soit pour cet entier μ l'ensemble des indices t_i :

$$0 \leq t_1 < t_2 \dots < t_y \leq \mu - 1$$

tels que $a_j = 0$ pour tout $j \equiv t_i \pmod{\mu}$, alors l'ensemble des indices k tels que $u_k = 0$ se compose (à un nombre fini d'éléments près) des y progressions arithmétiques

$$k \equiv t_i \pmod{\mu} .$$

Soit $E(f, \mu)$ l'ensemble des indices t_i ainsi défini.

Considérons les fractions rationnelles $f(z)$ et $f_p(z)$ du (§ II. 1) et comparons leurs ensembles d'indices $E(f, \mu)$ et $E(f_p, \mu)$. La décomposition $f(z) = f_p(z) + g_p(z)$ s'obtient en choisissant dans $f(z)$ les pôles $\theta_{i_1}^{-1} \dots \theta_{i_h}^{-1}$ de valeur absolue p-adique minimum $|\theta|_p^{-1}$ de manière à ce que $g_p(z)$ ne possède plus aucun de ces pôles. Toutes les fractions f_p obtenues de cette manière ont les mêmes coefficients de Taylor à partir d'un certain rang ; or pour tout entier positif μ, $f(z)$ s'écrit

$$f(z) = P^*(z) \left\{ \frac{R_1(z^\mu)}{(z^\mu - \alpha_1)^{\nu_1}} + \frac{R_2(z^\mu)}{(z^\mu - \alpha_2)^{\nu_2}} + \dots + \frac{R_\ell(z^\mu)}{(z^\mu - \alpha_\ell)^{\nu_\ell}} \right\} .$$

Les pôles de chaque fraction rationnelle $\dfrac{P^*(z)\ R_i(z^\mu)}{(z^\mu - \alpha_i)^{\nu_i}}$ sont des nombres algébriques qui ont tous même valeur absolue p-adique, quel que soit p. On peut donc choisir

$$f_p(z) = P^*(z) \sum_{i \in I} \frac{R_i(z^\mu)}{(z^\mu - \alpha_i)^{\nu_i}}$$

(où I est un ensemble d'indices compris entre 1 et ℓ).

On a donc

$$f_p(z) = \frac{P^*(z)\ R_p(z^\mu)}{Q_p^*(z^\mu)}$$

où R_p et Q_p^* sont des polynômes en z^{μ}. Il est facile de voir que les polynômes $P^*(z)$ et $P^*(z)\,R_p(z^{\mu})$ ont le même ensemble d'indices relatifs à μ.
D'où $E(f , \mu) = E(f_p , \mu)$.

$f(z)$ et $f_p(z)$ ont le même ensemble d'indices quel que soit μ, et ceci est valable pour tout premier p, c'est-à-dire : pour tout $k > k_0(p)$. u_k et $v_{k,p}$ sont simultanément nuls ou non nuls.

3. Application à l'étude des dénominateurs b_n. – Soit K_0 le maximum des $k_0(p)$ pour p divisant q_0, et soit un indice $k > K_0$ tel que $u_k \neq 0$. Alors aucun des $v_{k,p}$ n'est nul ; on peut leur appliquer le théorème 2.1. Soit $\mathfrak{M}(k)$ l'entier positif défini par

$$\mathfrak{M}(k) = \prod_{p \mid q_0} M(k , p)$$

et soit

$$N_0(k) = \sup_{p \mid q_0} n_0(p , k) .$$

En utilisant l'égalité (2.1) et le théorème 2.1 on a le résultat :

THÉORÊME 2.2. – A tout indice $k > K_0$ tel que u_k soit non nul, correspond un entier positif $\mathfrak{M}(k)$ et un nombre algébrique $H(k)$ tels que pour tout entier n de la progression arithmétique $n = k + \mathfrak{M}(k)\,n'$ on ait, à partir d'un certain rang $(n > N_0(k))$:

$$b_n = H(k)\,q^n$$

où q est l'entier algébrique $q = \prod_{p \mid q_0} |\theta|_p$ et où $H(k)$ vérifie l'inégalité $0 < H(k) \leq H$. En effet

$$H(k) = \prod_{p \mid q_0} |v_{k,p}|_p\,|\theta|_p^{-k} \leq \prod_{p \mid q_0} \sup_{\substack{|x|_p \leq 1 \\ j = i_1, i_2, \dots, i_h}} |P_j(x)|_p = H .$$

(2.4) Montrer que $q_0^{1/r} \leq q \leq q_0$.

(2.3) Montrer que $q = q_0$ si et seulement si $(q_0 , q_1) = 1$.

D'autre part on voit facilement que dans le cas où, quel que soit p divisant q_0 il existe un seul pôle $\theta_{i_1}^{-1}$ de valeur absolue minimum $|\theta|_p^{-1}$, les progressions arithmétiques du théorème 2.2 (qui peuvent être en nombre infini dans le cas général) se réduisent à une seule qui est l'ensemble de tous les entiers $n > n_0$: c'est-à-dire $b_n = H\,q^n$ pour tout $n > n_0$.

Ce cas particulier contient évidemment le précédent $(q_0 , q_1) = 1$.

Dans le cas général $q = Q^{a/b}$ $\begin{cases} Q \text{ entier positif} \\ a , b \text{ entiers positifs tels que } (a , b) = 1 \end{cases}$

il en résulte que les "raisons" $\mathfrak{M}(k)$ des progressions arithmétiques sont des multiples de b .

4. Généralisation au cas où les polynômes $P(z)$ et $Q(z)$ ont des coefficients entiers algébriques. – u_n est algébrique et appartient à une extension finie $Q(\alpha)$ du corps des rationnels. On écrit $u_n = \alpha_n/\beta_n$ où α_n et β_n sont des entiers algébriques tels que $(N(\alpha_n) , N(\beta_n)) = 1$. ($N(\xi)$ pour $\xi \in Q(\alpha)$ désigne la norme relative à $Q(\alpha)$) ; on obtient par la même méthode le résultat :

THÉORÈME 2.3. – A tout indice $k > K_0$ tel que u_k soit non nul correspond un entier positif $\mathfrak{M}(k)$ et un nombre algébrique $H(k)$, tels que pour tout indice n de la progression arithmétique $n = k + \mathfrak{M}(k)\, n'$ on ait, à partir d'un certain rang $(n > N_0(k))$

$$N(b_n) = H(k)\; q^n$$

où q est l'entier algébrique

$$q = \prod_{p | N(q_0)} |N(\theta)|_p$$

et où $H(k)$ vérifie l'inégalité $0 < H(k) \leq H$.

5. Comportement de a_n et b_n quand $n \to \infty$. – L'étude précédente permet en particulier d'améliorer le résultat (2.5) par :

$$\overline{\lim_{n\infty}}\; b_n^{1/n} = q \geq q_0^{1/r} . \tag{2.8}$$

Il en résulte

$$\overline{\lim}\; |a_n|^{1/n} \leq \frac{q}{R} \quad \text{où} \quad \frac{1}{R} = \overline{\lim}\; |u_n|^{1/n} = |\theta|$$

où $|\theta|$ désigne la valeur absolue maximum des mesures des pôles $\theta_1\, \theta_2 \ldots \theta_s$. On peut démontrer l'égalité

$$\overline{\lim}\; |a_n|^{1/n} = \frac{q}{R} \tag{2.9}$$

à l'aide du résultat suivant :

THÉORÈME 2.4. – Dans toute progression arithmétique $n = k + Mn'$ telle que u_n ne soit pas nul pour tout $n > n_0$ il existe une infinité d'indices n tels que $|u_n| > \gamma\, n^{m-1} |\theta|^n$, où γ désigne une constante positive dépendant de la progression arithmétique choisie et où m est la multiplicité maximum des pôles de valeur absolue $|\theta|^{-1}$.