Michel Mendès-France

Transcendance de a^b

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 3 (1961-1962), exp. nº 14, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1961-1962__3__A8_0>

TRANSCENDANCE DE a^b

par Michel MENDÈS-FRANCE

Mon but est d'exposer la démonstration, par la méthode de GELFOND [3], du théorème suivant :

Si a $(\neq 0, 1)$ est algébrique et si b est algébrique irrationnel, alors a^b est transcendant.

1. Généralités.

Dès 1748, EULER avait pressenti le théorème. D. HILBERT [6] le précisa dans son fameux exposé "Mathematische Probleme". Le théorème fut partiellement démontré vers 1920, mais ce n'est qu'en 1934 que GELFOND en donna la démonstration complète, suivi de près par SCHNEIDER qui en donne une démonstration indépendante en 1935.

Ce théorème est intéressant, et par les résultats qu'il apporte et par ses démonstrations.

Il montre que les nombres suivants

$$\sin \log \alpha \ , \quad \cos \log \alpha \ , \quad \frac{\log \alpha}{\log \beta} \ , \quad 2^{\sqrt{2}} \ , \quad e^{\pi}$$

(où α et β sont algébriques, et $\alpha^p \neq \beta^q$) sont transcendants (la transcendance de e^{π} provient de l'égalité $e^{\pi} = i^{-2i}$).

Par contre il ne donne rien sur les nombres $e + \pi$, $e\pi$ [1] , $\zeta(2n + 1)$,

---

[1] MELZAK a montré que

$$\frac{\pi e}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{(-1)^{n-1} n} \quad ,$$

et se demande si l'on ne peut en déduire la nature arithmétique de πe [10]. Dans le même ordre d'idée, signalons la formule

$$\sqrt{\frac{\pi e}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \, n!}{(2n + 1)!} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{2|}{|1} + \frac{3|}{|1} + \dots \quad [11] \quad .$$

2^e , 2^π , π^e , γ constante d'Euler, dont on ne voit même pas s'ils sont ou non irrationnels.

En adaptant la méthode de démonstration de GELFOND, on montre en outre que si θ est algébrique

$$H_0\,\theta^n + \dots + H_n = 0 \ , \qquad H = \max|H_j| \qquad ,$$

si a^b est transcendant, alors

$$|a^b - \theta| > H^{-(\log\log H)^{3+\varepsilon}} \ , \text{ où } \varepsilon > 0 \qquad ,$$

et si $\frac{\log a}{\log b}$ est transcendant,

$$\left|\frac{\log a}{\log b} - \theta\right| > H^{-\log^{4+\varepsilon} H} \qquad .$$

Comme conséquence de ces inégalités, GELFOND arrive à montrer que si α , β , γ sont algébriques,

$$\alpha^x + \beta^y = \gamma^z$$

n'a qu'un nombre fini de solutions entières, sauf cas trivial ([2] et [3]).

Enfin le théorème est vrai en p-adiques, et s'énonce [9], [13] :

<u>Si</u> a $(\neq 0 \ , 1)$ <u>est algébrique sur un corps</u> p-<u>adique, si</u> b <u>est algébrique irrationnel et si de plus</u> $|a - 1|_p < 1$ <u>et</u> $|b|_p < 1$, <u>alors</u> a^b <u>est un nombre p-adique transcendant sur le corps des rationnels</u> Q .

Les conditions portant sur les valuations de a et b ne servent qu'à assurer la convergence des séries,

$$a^b = e^{b\log a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b\log a)^n}{n!}$$

et

$$\log a = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{(a-1)^n}{n} \qquad .$$

Mais grâce au prolongement analytique de la fonction exponentielle p-adique par la méthode de Yvette DEJEAN [1], le théorème s'énonce sous des hypothèses légèrement plus larges : $|a|_p \leqslant 1$ et b arbitraire, e^x étant la détermination principale de la fonction exponentielle p-adique.

Avant d'aborder la démonstration du théorème, il nous faut établir deux lemmes.

2. Préliminaires.

2.1. LEMME 1. - Soient m formes linéaires indépendantes

$$L_i(X) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \ , \quad n > m \ , \quad \max_{i,j} |a_{i,j}| \leqslant a \in \mathbb{Z} \qquad ,$$

où les a_{ij} sont réels. Il est possible de trouver

$$X = (x_1 \ , \ \dots \ , \ x_n) \neq 0 \in \mathbb{Z}^n$$

tel que

$$|L_i(X)| \leqslant \frac{1}{N} \ , \quad i = 1 \ , 2 \ , \dots \ , m \ , \quad \max |x_j| < 2(n\ a\ N)^{m/(n-m)} \qquad ,$$

où $N \in \mathbb{Z}$ et $N > 1$.

En effet, posons

$$x = \max_{j=1,\dots,n} |x_j| \ , \quad |L_i(X)| \leqslant n\,a\,x \ , \quad i = 1 \ , 2 \ , \dots \ , m \qquad .$$

x étant fixé, les nombres $L_i(X)$ se trouvent donc à l'intérieur d'un hypercube à m dimensions de côté $2nax$. Divisons chaque côté en $2n\,ax\,N$ parties égales de sorte que nous obtenons ainsi $(2n\,ax\,N)^m$ hypercubes de côté égal à $\frac{1}{N}$.

Par ailleurs $|x_j| \leqslant x \implies X$ peut prendre $(2x + 1)^n$ positions distinctes. On vérifie que, si $x = [n\,a\,N]^{m/(n-m)}$, alors

$$(2x + 1)^n > (2n\,ax\,N)^m \qquad .$$

Dans ces conditions, il existe deux positions distinctes de X , disons

$X' = (x_1', \dots, x_n')$ et $X'' = (x_1'', \dots, x_n'')$ telles que $L_i(X')$ et $L_i(X'')$ soient dans le même hypercube de côté $\frac{1}{N}$ (Principe des tiroirs). Par suite

$$|L_i(X') - L_i(X'')| = |L_i(X' - X'')| \leqslant \frac{1}{N}$$

pour $i = 1, 2, \dots, m$. On pose $X = X' - X''$ et le lemme est démontré puisque $|x_j' - x_j''| \leqslant 2(n\,a\,N)^{m/(n-m)}$.

2.2. LEMME 2. - On suppose que les coefficients $a_{k,s}$ des formes linéaires

$$L_k(X) = a_{k_1} x_1 + \dots + a_{k_n} x_n, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m < n \qquad ,$$

sont des entiers d'un corps algébrique $\underset{\sim}{K}$ de degré ν et que $\overline{|a_{ks}|} < A$ (2). Alors il existe

$$X = (x_1, \dots, x_n) \neq 0$$

(où les x_j sont entiers sur $\underset{\sim}{K}$) tel que

$$L_k(X) = 0 \quad \underline{\text{et}} \quad \overline{|x_k|} < C(CnA)^{m/(n-m)}$$

où C est une constante positive qui ne dépend pas de A, m et n.

En effet, soit $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu$ une base, de telle sorte que

$$\begin{cases} (1) \qquad a_{ks} = \sum_{r=1}^{\nu} a_{ksr}\, \omega_r, \qquad a_{ksr} \in \underset{\sim}{Z} \qquad , \\ \\ (2) \qquad x_s = \sum_{r=1}^{\nu} x_{sr}\, \omega_r, \qquad x_{sr} \in \underset{\sim}{Z} \qquad . \end{cases}$$

Si $a_{ks}^{(m)}$, $\omega_r^{(m)}$ désignent respectivement les conjugués de a_{ks} et ω_r et si l'on convient que $a_{ks}^{(0)} = a_{ks}$ et $\omega_r^{(0)} = \omega_r$, les égalités (1) donnent :

(2) Si α est un nombre algébrique et $\alpha_0 = \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{\nu-1}$ ses conjugués, on note $\max_{j=0,\dots,\nu-1} |\alpha_j| = \overline{|\alpha|}$.

(3) $$a_{ks}^{(m)} = \sum_{r=1}^{\nu} a_{ksr}\, \omega_r^{(m)} \qquad m = 0\ ,\ 1\ ,\ \dots\ ,\ \nu - 1 \quad .$$

Les ν égalités (3) peuvent être considérées comme un système linéaire à ν équations et ν inconnues a_{ksr} (les indices k , s sont fixés). Désignons par $\tilde{\omega}_r^{(m)}$ la valeur du mineur de $\omega_r^{(m)}$ dans le déterminant $\|\omega_r^{(m)}\|$. La résolution du système (3) conduit à

(4) $$a_{ksr} = \frac{1}{\det\|\omega_r^{(m)}\|} \sum_{m=0}^{\nu-1} a_{ks}^{(m)}\, \tilde{\omega}_r^{(m)}$$

d'où l'on déduit :

(5) $$|a_{ksr}| < C_0\, A \quad \text{où } C_0 \text{ ne dépend que du corps } \underset{\sim}{K} \quad .$$

Ensuite portant (1) et (2) dans $L_k(x)$, il vient

$$L_k(X) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{\nu} a_{ksr}\, \omega_r \sum_{\rho=1}^{\nu} x_{s\rho}\, \omega_\rho \quad .$$

Or $\omega_r\, \omega_\rho = \omega_\sigma$,

$$L_k(X) = \sum_{\sigma=1}^{\nu} \omega_\sigma \sum_{s=1}^{n} b_{ks\sigma}\, x_{s\sigma} \quad \text{où} \quad b_{ks\sigma} \in \underset{\sim}{Z}$$

et $|b_{k\sigma\nu}| < C_1\, A$, C_1 ne dépendant que de $\underset{\sim}{K}$.

On désire annuler $L_k(X)$. Une condition nécessaire et suffisante est d'annuler les formes

$$L_{k\sigma}(X) = \sum_{s=1}^{n} b_{ks\sigma}\, x_{s\sigma} \quad .$$

Il y a $n\nu$ variables et $m\nu$ formes, $m\nu < n\nu$. On peut donc appliquer le lemme 1 en choisissant $N = 2$.

$$|L_{k\sigma}(X)| \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{avec} \quad \max_{s,\sigma} |x_{s\sigma}| < 2\,(2m\nu C_1\ A)^{m/(n-m)} \quad .$$

Mais $L_{k\sigma}(X) \in \underset{\sim}{Z}$, donc

$$L_{k\sigma}(X) = 0$$

et par un changement de notation le lemme est démontré.

3. Démonstration du théorème.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème.

Soient a $(\neq 0\ ,\ 1)$ algébrique et b algébrique irrationnel. On suppose que $c = a^b$ est algébrique. $\underset{\sim}{K}$ est le plus petit corps algébrique qui contient a , b et c . Son degré est ν .

On pose $\eta = \log a$ et on considère

$$(6) \qquad f(z) = \sum_{K=0}^{q} \sum_{s=0}^{q} A_{K,s} \exp \eta(K + bs)z$$

où les coefficients $A_{K,s}$ sont des entiers de $\underset{\sim}{K}$ et où q est un entier que nous choisirons grand.

3.1. Détermination des $A_{K,s}$. – Il est possible de déterminer un entier naturel d positif et tel que da , db et dc soient des entiers de $\underset{\sim}{K}$.

Alors

$$(7) \qquad \eta^{-s}\, d^{3q^2}\, f^{(s)}(t) = \sum_{K=0}^{q} \sum_{r=0}^{q} A_{K,r}\, a^{Kt}\, c^{rt}(K + br)^s\, d^{3q^2}$$

est un entier de $\underset{\sim}{K}$ pour t et s entiers naturels ne dépassant pas respectivement q et q^2 .

Les expressions (7) peuvent être considérées comme des formes linéaires par rapport aux $n = (q + 1)^2$ variables $A_{K,r}$, les coefficients étant des entiers de $\underset{\sim}{K}$. Ces coefficients sont

$$U_{strK} = a^{Kt}\, c^{rt}(K + br)^s\, d^{3q^2} \quad .$$

Afin de pouvoir appliquer le lemme 2, il faudra se fixer le nombre m de formes linéaires de façon que $m < n = (q+1)^2$.

Si $0 \leqslant s \leqslant q_1 - 1$ et $0 \leqslant t \leqslant t_1$,

$$m = q_1(1 + t_1) < (q+1)^2 .$$

On choisit

$$q_1 = [\frac{q^2}{\log q}] \quad \text{et} \quad t_1 = [\frac{1}{2} \log q]$$

et alors

$$(8) \qquad \overline{|U_{strK}|} = \exp O[qt_1 + qt_1 + q_1 \log q + q^2] = \exp O(q^2) .$$

Alors le lemme 2 nous montre qu'il est possible de déterminer les $A_{K,r}$ non tous nuls tels que

$$(9) \qquad \begin{cases} f^{(s)}(t) = 0 , \quad 0 \leqslant s \leqslant q_1 - 1 , \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1 , \\ \overline{|A_{K,r}|} = \exp O(q^2) , \quad 0 \leqslant K \leqslant q , \quad 0 \leqslant r \leqslant q . \end{cases}$$

L'idée de la démonstration est maintenant la suivante : nous voulons montrer que, puisque $f(z)$ s'annule un si grand nombre de fois, alors $f(z)$ est identiquement nul ce qui est absurde, d'où l'on déduira la fausseté des hypothèses, à savoir $a^b \in \underset{\sim}{K}$.

3.2. Vers la nullité de $f(z)$. - Dans ce paragraphe nous montrons que $f^{(s)}(t)$ s'annule dans un domaine plus grand que celui défini par (9).

Les $A_{K,r}$ étant choisis de façon à satisfaire (9), $f(z)$ est maintenant une fonction entière bien déterminée et qui n'est certainement pas identiquement nulle, car b est irrationnel.

La série d'interpolation de Lagrange permet d'écrire

$$(10)\quad \begin{cases} f^{(s)}(t) = \dfrac{s!}{(2i\pi)^2} \displaystyle\int_{|z|=q^{3/4}} \frac{dz}{(z-t)^{s+1}} \int_{|\xi|=q} \prod_{r=0}^{t_1} \left(\frac{z-r}{\xi-r}\right)^{q_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \\ \text{pour} \quad |t| \leqslant [\sqrt{q}] = t_2 \text{ , et } \quad s \leqslant q_1 = [\frac{q^2}{\log q}] \text{ .} \end{cases}$$

Ces valeurs extrêmes de s et $|t|$ sont choisies de façon à pouvoir écrire la majoration suivante :

$$(11)\quad \left|\eta^{-s}\, d^{3q^2}\, f^{(s)}(t)\right|$$

$$< \left|\eta^{-q_1}\right| d^{3q^2} \frac{q_1^{q_1}}{4\pi^2} \left(q^{3/4} - t_1\right)^{-q_1} \left[\frac{q^{3/4} + t_1}{q - t_1}\right]^{q_1 t_1} \exp O(q^2)$$

$$< \exp(-\tfrac{1}{8} q^2 \log q + O(q^2)) \quad .$$

Par ailleurs (9) et (8) montrent que

$$(12)\quad \overline{\left|\eta^{-s}\, d^{3q^2}\, f^{(s)}(t)\right|} \leqslant \sum_{K=0}^{q} \sum_{r=0}^{q} \overline{|A_{K,r}|}\ \overline{|U_{strK}|}$$

$$\leqslant \exp O(q^2 + s \log q + qt) \leqslant \exp O(q^2) \quad \text{pour} \quad s \leqslant q_1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_2 = [\sqrt{q}] \text{ .}$$

Si l'un au moins des nombres $f^{(s)}(t) \neq 0$ pour $0 \leqslant s \leqslant q_1$ et $0 \leqslant t \leqslant t_2$ $(t \in \mathbb{Z})$, alors la norme de $\eta^{-s}\, d^{3q^2}\, f^{(s)}(t)$ est supérieure à 1 puisque c'est un entier algébrique appartenant à $\mathbb{K}$.

$$N\{\eta^{-s}\, d^{3q^2}\, f^{(s)}(t)\} \leqslant \exp(-\tfrac{1}{8} q^2 \log q + O(q^2)) \times [\exp O(q^2)]^{\nu-1}$$

$$\leqslant \exp(-\tfrac{1}{8} q^2 \log q + O(q^2)) \quad .$$

Donc

$$1 \leqslant \exp(-\frac{1}{8} q^2 \log q + O(q^2))$$

ce qui est absurde pour q assez grand, d'où le résultat :

$$(13) \qquad f^{(s)}(t) = 0 \begin{cases} 0 \leqslant s \leqslant q_1 = [\frac{q^2}{\log q}] \\ 0 \leqslant t \leqslant t_2 = [\sqrt{q}] \end{cases} .$$

3.3. Cas où $a > 0$ et b réel. - Dans ce cas les $A_{K,r}$ sont réels. Alors

$$f(z) = \sum_{K=0}^{q} \sum_{r=0}^{q} A_{K,r} \exp \eta(K + bs)z$$

est la somme de $(q + 1)^2$ exponentielles, donc ne peut avoir plus de $(q + 1)^2 - 1$ zéros réels. Mais d'après (13), $f(z)$ a au moins $([\frac{q^2}{\log q}])(\sqrt{q} + 1)$ zéros, nombre qui dépasse $(q + 1)^2 - 1$, pour q assez grand. Ceci démontre le théorème dans ce cas.

3.4. Cas général. - Nous allons montrer que $f(z)$ a un zéro d'ordre $(q + 1)^2$ à l'origine. Si nous arrivons à ce résultat, alors les $(q + 1)^2$ équations $f^{(s)}(0) = 0$, pour $s = 0 , 1 , \ldots , (q + 1)^2 - 1$, s'écrivent

$$(14) \qquad \sum_{K=0}^{q} \sum_{r=0}^{q} A_{K,r} (K + br)^s = 0 \qquad s = 0 , 1 , \ldots , (q + 1)^2 - 1 .$$

Considérant les $A_{K,r}$ comme inconnus, le déterminant de ce système homogène, à $(q + 1)^2$ équations et $(q + 1)^2$ inconnues, s'écrit

$$D = \begin{vmatrix} 1 & (1+b) & (1+b)^2 & \cdots & (1+b)^{(q+1)^2-1} \\ 1 & (2+b) & (2+b)^2 & \cdots & (2+b)^{(q+1)^2-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & (K+br) & (K+br)^2 & \cdots & (K+br)^{(q+1)^2-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & (q+bq) & (q+bq)^2 & \cdots & (q+bq)^{(q+1)^2-1} \end{vmatrix}$$

C'est un déterminant de VAN DER MONDE non nul puisqu'en vertu de l'irrationnalité de b , il n'existe pas deux lignes égales. Il s'ensuit que le système (14) admet pour seule solution

$$A_{K,r} = 0 \qquad \forall\ r\ ,\ \forall\ K \qquad ,$$

ce qui est absurde, et ce qui démontre le théorème.

Il reste donc à montrer que $f(z)$ a un zéro à l'origine, d'ordre au moins égal à $(q+1)^2$. Pour démontrer cela nous procédons comme précédemment :

$$(15) \quad f^{(s)}(0) = \frac{s!}{(2i\pi)^2} \int_{|z|=1} \frac{dz}{(z)^{s+1}} \int_{|\xi|=q} \prod_{r=0}^{r=[\sqrt{q}]} \left(\frac{z-r}{\xi-r}\right)^{q_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

car (13) est vérifié. On en déduit

$$|\eta^{-s}\, d^{3q^2}\, f^{(s)}(0)| < \exp(-\tfrac{1}{2}\, q^{5/2} + O(q \log q)) \qquad 0 \leqslant s \leqslant (q+1)^2$$

et d'après (8) et (9)

$$\boxed{\eta^{-s}\, d^{3q^2}\, f^{(s)}(0)} < \exp(O(q^2 \log q)) , \qquad 0 \leqslant s \leqslant (q+1)^2 \qquad ,$$

d'où, si $f^{(s)}(0) \neq 0$ pour un s au moins $\leqslant (q+1)^2$,

$$1 \leqslant \exp(-\frac{1}{2} q^{5/2} + O(q^2 \log q)) \quad ,$$

ce qui est absurde.

Ainsi donc (14) est démontré, et par suite le théorème de Gelfond-Schneider dans le cas général l'est aussi.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DEJEAN (Yvette). - Fonction exponentielle dans un corps p-adique, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 2, 1960/61, n° 10, 8 pages.

[2] GELFOND (A. O.). - Sur les approximations des nombres transcendants par des nombres algébriques, Doklady Akad. Nauk SSSR, 1935, t. 2, p. 180-182.

[3] GELFOND (A. O.). - Transcendental and algebraic numbers. - New York, Dover Publications, 1960.

[4] GELFOND (A. O.). - Sur le septième problème de Hilbert, Izvestija Akad. Nauk SSSR, Serija 7, 1934, p. 623-630.

[5] HARDY (G. H.). - Ramanujan. Twelve lectures on subjects suggested by his life and work. - Cambridge, Cambridge University Press, 1940 [Reprinted : New York, Chelsea publishing Company, 1959].

[6] HILBERT (D.). - Mathematische Probleme, Archiv der Math. und Phys., t. 1, 1901, p. 213-237.

[7] HILLE (Einar). - Gelfond's solution of Hilbert's seventh problem, Amer. math. Monthly, t. 49, 1942, p. 654-661.

[8] KOKSMA (J. F.). - Diophantische Approximationen. - Berlin, J. Springer, 1936 (Ergebnisse der Mathematik ..., 4, Band 4).

[9] MAHLER (Kurt). - Über transzendente P-adischen Zahlen, Compositio Math., t. 2, 1935, p. 259-275.

[10] MELZAK (Z.). - Infinite products for πe and π/e, Amer. math. Monthly, t. 68, 1961, p. 39-41.

[11] SCHNEIDER (Theodor). - Introduction aux nombres transcendants. - Paris, Gauthier-Villars, 1959.

[12] SIEGEL (Carl Ludwig). - Transcendental numbers. - Princeton, Princeton University Press, 1949 (Princeton Mathematics Series, 16).

[13] VELDKAMP (G. R.). - Ein Transzendenz-Satz für P-adische Zahlen, J. London math. Soc., t. 15, 1940, p. 183-192.