

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

FRANÇOISE BERTRANDIAS

Fractions continues

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 3 (1961-1962), exp. n° 2, p. 1-20

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1961-1962__3__A2_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

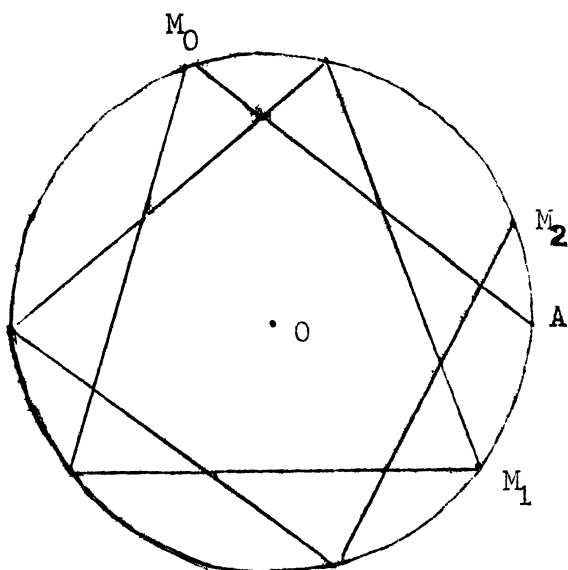
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FRACTIONS CONTINUES

par Mme Françoise BERTRANDIAS

1. Recherche des "meilleures approximations" d'un nombre θ (θ réel positif).

1.1. Définition d'une suite de points M_n attachée à un nombre θ . - Sur le cercle de centre O et de longueur 1 , on porte dans le sens positif, à partir de l'origine A des abscisses, les arcs de longueur θ , 2θ , 3θ , ... Parmi les sommets de la ligne polygonale (L) obtenue, on choisit les points M_0 , M_1 , M_2 , ... de la manière suivante :



- M_0 est l'extrémité de l'arc de longueur θ ;

- M_1 est le premier sommet de la ligne polygonale rencontré, qui soit plus proche de A que M_0 ;

- M_2 est le sommet suivant qui soit plus proche de A que M_1 , etc.

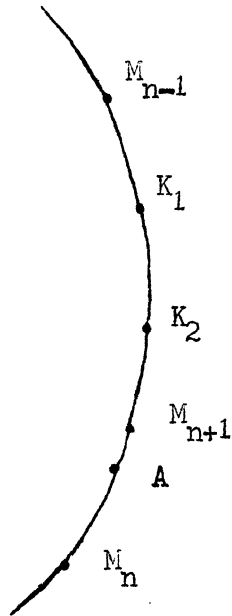
On définit ainsi de proche en proche une suite de points M_n attachés au nombre θ . Elle est finie ou infinie suivant que θ est rationnel ou non.

1.2. Propriétés de la suite (M_n) . - Considérons la partie (L_{M_n}) de la ligne polygonale (L) s'arrêtant au point M_n . Poursuivre la construction de (L) , à partir de M_n , revient à faire subir à (L_{M_n}) les rotations successives définies par l'arc $\widehat{AM_n}$.

Première conséquence. - Les points M_n et M_{n+1} sont de part et d'autre de OA . En effet le point H défini par $\widehat{HM_{n+1}} = \widehat{AM_n}$ appartient à la ligne polygonale $(L_{M_{n+1}})$. Si M_n et M_{n+1} étaient du même côté de OA , le point H

serait plus proche de A que le point M_n , ce qui est incompatible avec la définition du point M_{n+1} .

Deuxième conséquence. - Le point M_{n+1} est un des points K_i transformés de M_{n-1} dans ces rotations (c'est-à-dire K_i défini par : $\overrightarrow{M_{n-1}K_i} = i \overrightarrow{AM_n}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$)).



En effet l'arc $\overline{M_n M_{n-1}}$ ne contenant aucun sommet de (L_{M_n}) , le sommet qui devient le plus proche de A , après ces rotations, est M_{n-1} .

Le point M_{n+1} est donc le dernier des K_i appartenant à l'arc $\overline{M_{n-1}A}$ (sur la figure $M_{n+1} = K_3$).

D'où une construction simple de M_{n+1} à partir de M_{n-1} et M_n .

1.3. Définition d'une suite $\frac{p_n}{q_n}$ de rationnels attachée au nombre θ . - Soient q_n le nombre de côtés de la ligne polygonale L_{M_n} , et p_n l'entier le plus proche du nombre $q_n \theta$ (les suites (p_n) et (q_n) sont finies ou infinies suivant que θ est rationnel ou non).

THÉOREME 1. - Pour tout entier q tel que $0 < q < q_n$

$$\|q\theta\| > \|q_n \theta\| = |q_n \theta - p_n|.$$

THÉOREME 2. - Soit q' un entier tel que $q_n < q' < q_{n+1}$, on a :

$$\|q_n \theta\| < \|q' \theta\|$$

(on pose $\|q\theta\| = \min_p |q\theta - p|$, p désignant un entier positif).

Ces théorèmes résultent immédiatement de la construction de la ligne polygonale (L) . Ils montrent que la propriété contenue dans le théorème 1 caractérise

la suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$. On exprime ceci en disant que les nombres $\frac{p_n}{q_n}$ sont les "meilleures approximations" du nombre θ .

1.4. Propriétés des suites (p_n) et (q_n) . - On pose

$$\delta_n(\theta) = q_n \theta - p_n \quad .$$

$\delta_n(\theta)$ désigne donc la mesure de l'arc $\overrightarrow{AM_n}$ comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ (on supposera 2θ non entier).

On a les relations :

$$(1) \quad \delta_n(\theta) \delta_{n-1}(\theta) < 0$$

$$(1') \quad (p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}) \delta_{n-1}(\theta) > 0 \quad .$$

((1) exprime que M_n et M_{n-1} sont de part et d'autre de OA , (1') résulte de (1).)

(2) Il existe une suite d'entiers positifs a_n tels que

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

(résulte de la deuxième propriété de la suite (M_n) démontrée au paragraphe 1.2).

$$(3) \quad \delta_n(\theta) = a_n \delta_{n-1}(\theta) + \delta_{n-2}(\theta) \quad .$$

(D'après (2),

$$\overrightarrow{AM_n} = a_n \overrightarrow{AM_{n-1}} + \overrightarrow{AM_{n-2}} \quad ,$$

et d'autre part

$$|a_n \delta_{n-1}(\theta)| < |\delta_{n-2}(\theta)| < \frac{1}{2} \quad ,$$

d'après le paragraphe 1.2, donc compte tenu de (1)

$$|a_n \delta_{n-1}(\theta) + \delta_{n-2}(\theta)| < \frac{1}{2} \quad .)$$

$$(3') \quad \|q_{n-2} \theta\| = a_n \|q_{n-1} \theta\| + \|q_n \theta\| \quad (\text{d'après (1) et (3)}) \quad .$$

$$(4) \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad (\text{d'après (2) et (3)}) \quad .$$

$$(5) \quad |p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}| = 1 \quad .$$

(On démontre facilement que $|p_0 q_1 - q_1 p_0| = 1$, d'où (5) par récurrence à l'aide de (2) et (4).)

$$(6) \quad q_{n-1} \|q_n \theta\| + q_n \|q_{n-1} \theta\| = 1 \quad (\text{d'après (1) et (5)}) \quad .$$

$$(7) \quad \left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n} \quad (\text{d'après (6)}) \quad .$$

2. Algorithme des fractions continues.

Il s'agit de trouver un procédé de calcul des nombres p_n et q_n . On pose

$$(8) \quad \theta_n = \frac{\|q_{n-2} \theta\|}{\|q_{n-1} \theta\|} \quad ;$$

donc, d'après (3') :

$$(9) \quad \begin{cases} a_n = [\theta_n] \\ \theta_n = a_n + \frac{1}{\theta_{n+1}} \end{cases} \quad (n \geq 2) \quad .$$

On pourra donc déterminer de proche en proche les a_n et les θ_n par les formules

(9), à partir de a_2 et θ_2 .

Il reste à calculer θ_2 à partir de θ , avec

$$\theta_2 = \frac{|q_0 \theta - p_0|}{|q_1 \theta - p_1|} \quad .$$

Deux cas sont à distinguer :

2.1. Premier cas. - $n < \theta < n + \frac{1}{2}$.

On voit facilement que :

$$p_0 = [\theta] \quad p_1 = q_1[\theta] + 1 \quad .$$

En posant $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $a_1 = q_1$, on constate que les formules (9) s'étendent à la valeur $n = 1$, avec

$$\theta_1 = \frac{|q_{-1} \theta - p_{-1}|}{|q_0 \theta - p_0|} = \frac{1}{\theta - p_0}$$

c'est-à-dire

$$\theta = p_0 + \frac{1}{\theta_1} \quad .$$

Les formules (9) sont donc valables pour $n = 0$, en posant $\theta_0 = \theta$ et $a_0 = p_0 = [\theta]$.

2.2. Deuxième cas. - $n + \frac{1}{2} < \theta < n + 1$.

On a :

$$p_0 = [\theta] + 1 \quad p_1 = q_1[\theta] + q_1 - 1 \quad ;$$

par des calculs analogues, on démontre qu'on peut étendre les formules (9) aux cas $n = 1$, $n = 0$ et $n = -1$ en posant :

$$p_{-1} = [\theta] , \quad q_{-1} = 1 , \quad p_{-2} = 1 , \quad q_{-2} = 0 ,$$

avec

$$\theta_1 = \frac{(\theta)}{1 - (\theta)} , \quad \theta_0 = \frac{1}{(\theta)} , \quad \theta_{-1} = \theta .$$

Pour avoir les mêmes formules au départ que dans le premier cas, il suffit donc de faire le changement d'indice $n \rightarrow n + 1$.

Quel que soit θ , les suites (a_n) et (θ_n) se construisent donc par l'algorithme :

$$\begin{aligned} \theta &= a_0 + \frac{1}{\theta_1} & (a_0 &= [\theta]) \\ \theta_1 &= a_1 + \frac{1}{\theta_2} & (a_1 &= [\theta_1]) \\ \dots & \\ \theta_n &= a_n + \frac{1}{\theta_{n+1}} & (a_n &= [\theta_n]) \\ \dots & \end{aligned}$$

Les suites p_n et q_n sont obtenues par :

$$\begin{aligned} q_{-1} &= 0 & q_0 &= 1 \\ p_{-1} &= 1 & p_0 &= [\theta] = a_0 \end{aligned}$$

et par les relations de récurrence (2) et (4) (pour $n \geq 1$)

$$\begin{cases} (2) & q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \\ (4) & p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \end{cases} .$$

Ceci entraîne, pour tout θ ,

$$(5') \quad p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1} .$$

Ce procédé associe à tout nombre θ réel > 0 une suite d'entiers positifs (a_n) ; on note $\theta = [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$ et on appelle cette suite "le développement de θ en fraction continue". Les entiers a_n sont les "quotients incomplets" du développement, et les nombres rationnels $\frac{p_n}{q_n}$ sont les "réduites".

2.3. Cas où θ est rationnel. - La suite (a_n) est finie. Réciproquement, toute suite finie d'entiers rationnels positifs constitue, d'après l'algorithme, le développement d'un nombre rationnel.

2.4. Comparaison de deux rationnels θ et θ' ayant les $(m+1)$ premiers termes communs $a_0, a_1, \dots, a_m$ dans leur développement.

Les q_n sont égaux jusqu'à l'indice m . Donc d'après (7) :

$$|\theta - \theta'| < \frac{2}{q_m} ;$$

or $q_m > 2^{(m-1)/2}$ (se démontre sur la relation de récurrence (2)). Donc

$$(10) \quad |\theta - \theta'| < 2^{2-m} .$$

Conséquence. - Toute suite infinie d'entiers positifs $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ est le développement en fraction continue d'un nombre θ irrationnel.

En effet, d'après la remarque précédente, les rationnels r_m de développement $[a_0, a_1, \dots, a_m]$ forment une suite de Cauchy.

2.5. Quelques relations remarquables entre θ et les suites (a_n) , (θ_n) , (p_n) et (q_n) .

$$(11) \quad \theta = \frac{\theta_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\theta_{n+1} q_n + q_{n-1}}$$

(se démontre par récurrence à l'aide de (2), (4), (9)).

$$(11') \quad q_n \| q_n \theta \| = \frac{1}{\theta_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}} = \frac{1}{\lambda_n} \quad (\text{d'après (11)}) \quad .$$

$$(12) \quad \theta_n = [a_n, a_{n+1}, \dots]$$

(d'après l'algorithme du développement de θ).

$$(13) \quad \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = [a_0, a_1, \dots, a_{n+1}]$$

d'après (11) avec $\theta_{n+1} = a_{n+1}$.

$$(14) \quad \frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1] \quad .$$

(D'après (2))

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \quad .$$

Comme

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} < 1 \quad \text{et} \quad \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} < 1$$

a_n est le premier terme du développement de $\frac{q_n}{q_{n-1}}$ en fraction continue d'après (9) etc.)

$$(15) \quad \lambda_n = [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] + [0, a_n, a_{n-1}, \dots, a_1] \quad .$$

2.6. Majorations et minoration d'un nombre θ sur son développement en fraction continue. - Soient

$$\theta = [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots] \quad \text{et} \quad \theta' = [a'_0, a'_1, \dots, a'_n, \dots] \quad ,$$

où $a_n = a'_n$ si $n \neq m$ et $a'_m > a_m$.

Alors d'après (9)

$$\theta'_n = \theta_n \quad \text{pour } n \leq m$$

et

$$\theta'_{m+1} > \theta'_m \quad .$$

(5') et (11) montrent que

$$\theta' > \theta \quad \text{si } m \text{ pair et } \theta' < \theta \quad \text{si } m \text{ impair} \quad .$$

Conséquence. - On majore θ en majorant (minorant) les quotients de rang impair et en minorant (majorant) ceux de rang pair.

Exemple. - $\theta < (a_0, a_1, \dots, a_{2m}, 1)$, en effet

$$\theta < \frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}} = [a_0, a_1, \dots, a_{2m}, a_{2m+1}] \leq [a_0, a_1, \dots, a_{2m}, 1] \quad .$$

3. Quelques propriétés des "meilleures approximations" d'un nombre θ irrationnel quelconque.

3.1. On a vu (7) : $q_n \|q_n \theta\| < 1$ quel que soit n .

Ce résultat ne peut être amélioré car il est possible de construire des nombres θ tels que, pour certains n , la quantité $q_n \|q_n \theta\|$ soit aussi proche de 1 que l'on veut.

En effet, d'après (15),

$$\lambda_n < a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2} + 1} + \frac{1}{a_n + 1} \quad ,$$

donc, si l'on prend $a_{n+1} = 1$, $a_n > N$, $a_{n+2} > N$,

$$\lambda_n < 1 + \frac{2}{N+1}$$

et d'après (11') :

$$q_n \|q_n \theta\| > \frac{1}{1 + \frac{2}{N+1}} \quad .$$

3.2. Sur deux réduites successives l'une au moins vérifie

$$q_n \|q_n \theta\| < \frac{1}{2} \quad .$$

En effet supposons que l'on ait simultanément :

$$\|q_n \theta\| \geq \frac{1}{2q_n} \quad \text{et} \quad \|q_{n-1} \theta\| \geq \frac{1}{2q_{n-1}} \quad .$$

(6) entraîne alors

$$\frac{q_{n-1}}{q_n} + \frac{q_n}{q_{n-1}} \leq 2 \quad ,$$

ce qui est impossible (pour tout $x > 0$ différent de 1, $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x} > 0$).

3.3. Réciproquement, soit $\frac{p}{q}$ une fraction, non nécessairement irréductible, telle que $|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q^2}$. Alors $\frac{p}{q}$ est égale à une réduite de θ .

Voir la démonstration de cette propriété dans HARDY and WRIGHT ([2], page 153).

Cette démonstration s'appuie sur le lemme ([2], page 140) :

Si $\theta = \frac{P\zeta + R}{Q\zeta + S}$ où $\zeta > 1$, et où P, Q, R, S sont des entiers tels que $Q > S > 0$ et $|PS - QR| = 1$, alors $\frac{R}{S}$ et $\frac{P}{Q}$ sont deux réduites successives du développement de θ en fraction continue.

3.4. Sur trois réduites successives l'une au moins vérifie :

$$a_n \|q_n^{-1} \theta\| < \frac{1}{\sqrt{5}} \quad ,$$

c'est-à-dire, sur trois λ_n successifs (λ_n défini par (11')) l'un au moins vérifie $\lambda_n > \sqrt{5}$.

Démonstration. - D'après (15)

$$\lambda_n = [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] + [0, a_n, a_{n-1}, \dots, a_1] \quad ;$$

d'où

$$\lambda_n > [a_{n+1}, a_{n+2}, 1] + [0, a_n, 1]$$

c'est-à-dire

$$(16) \quad \lambda_n > a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2} + 1} + \frac{1}{a_n + 1}$$

$a_{n+1} \geq 3$ entraîne $\lambda_n > 3 > \sqrt{5}$.

La propriété reste donc à démontrer dans les cas où l'on a simultanément

$$a_{n+1} \leq 2, \quad a_{n+2} \leq 2 \quad \text{et} \quad a_{n+3} \leq 2 \quad .$$

Si $a_{n+i} = 2$, pour $i = 1, 2$, ou 3 , (16) montre que

$$\lambda_{n+i} > 2 + \frac{1}{3} > \sqrt{5} \quad .$$

Il reste donc à examiner le cas :

$$a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = 1 \quad .$$

L'inégalité (16) ne suffit pas pour conclure. De manière plus précise, l'on a :

$$\lambda_n = [1, 1, 1, a_{n+4}, \dots] + [0, a_n, \dots],$$

$$\lambda_n = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \beta}} + \alpha = f_1(\alpha, \beta),$$

où $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ (en effet $\alpha = \frac{a_{n-1}}{a_n}$ d'après (14) et $\beta = \frac{1}{\theta_{m+4}}$ d'après (12)).

De façon analogue, on a :

$$\lambda_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + \beta} + \frac{1}{1 + \alpha} = f_2(\alpha, \beta),$$

$$\lambda_{n+2} = 1 + \beta + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \alpha}} = f_3(\alpha, \beta).$$

Posons

$$F = \sup(f_1, f_2, f_3).$$

On trouve facilement la valeur de F en fonction de la position du point de coordonnées (α, β) dans le quart de plan $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

En effet

$$f_1 = f_3 \text{ sur la bissectrice } OX,$$

$$f_1 = f_2 \text{ sur l'hyperbole } (\Gamma) \text{ d'équation } \beta = \frac{1}{\alpha} - 1,$$

$$f_1 = f_4 \text{ sur l'hyperbole } (\Gamma') \text{ d'équation } \alpha = \frac{1}{\beta} - 1.$$

Soit A le point $\alpha = 1$, $\beta = 0$; B le point $\alpha = 0$, $\beta = 1$; et I le point $\alpha = \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, point d'intersection de (Γ) et (Γ') .

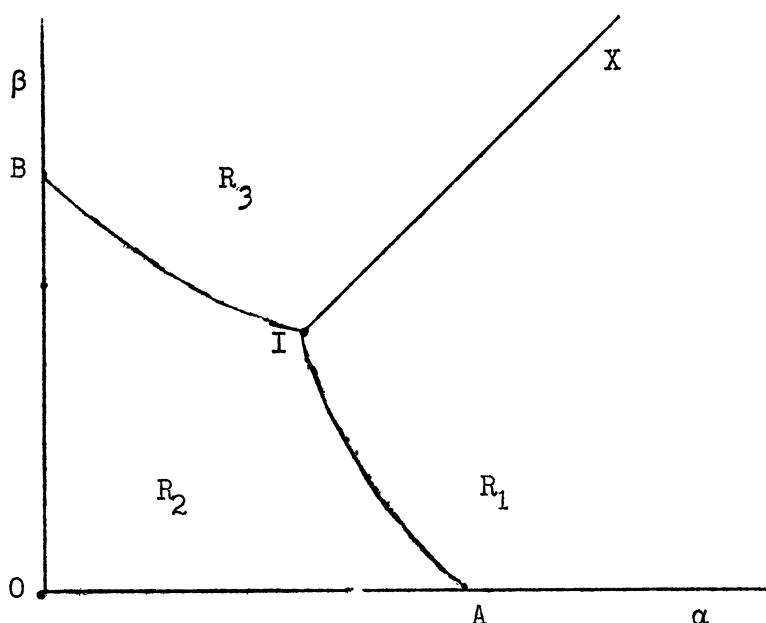
En remarquant que les fonctions f_i sont monotones par rapport à chacune des deux variables α et β , on montre que

$$F = f_1 \text{ dans la région } (R_1) : \alpha \geq \beta,$$

$F = f_2$ dans la région (R_2) : OAIB ,

$F = f_3$ dans la région (R_3) : β BIX ,

dont les frontières sont : l'arc AI de (Γ) , l'arc BI de (Γ') , les demi-droites $A\alpha$, $B\beta$ et IX , les segments de droites OA et OB .



Il reste à trouver la borne inférieure, pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, des valeurs $F(\alpha , \beta)$. Les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial F}{\partial \beta}$ ne s'annulent pas à l'intérieur d'une région R_i . F ne peut donc avoir un minimum que sur les courbes frontières. Or sur ces courbes la fonction F est monotone par rapport à α ou à β (sur (Γ) par exemple $F = 1 + \alpha + \frac{1}{1 + \alpha}$). Il suffit donc de comparer les valeurs prises par F aux points O , A , B , I , et X ($\alpha = +\infty$, $\frac{\beta}{\alpha} = 1$) . On démontre ainsi que la fonction $F(\alpha , \beta)$ est minimum en I : pour tout $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$:

$$F(\alpha , \beta) \geq F\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \sqrt{5} .$$

En revenant au problème de départ, ceci entraîne bien, puisque $\alpha = \frac{q_{n-1}}{q_n}$ est rationnel,

$$\sup(\lambda_n , \lambda_{n+1} , \lambda_{n+2}) > \sqrt{5} .$$

4. Nombres équivalents.

4.1. Le développement en fraction continue associe à tout nombre réel θ une suite d'entiers positifs (a_n) . Que peut-on dire de deux nombres θ et θ' tels que les suites (a_n) et (a'_n) associées soient identiques à partir d'un certain rang, c'est-à-dire telles que, r et s étant deux entiers positifs : $a_{r+k} = a'_{s+k}$ pour $k \geq 0$?

D'après (11), on a :

$$\theta = \frac{\theta_r p_{r-1} + p_{r-2}}{\theta_r q_{r-1} + q_{r-2}}, \text{ avec } |p_{r-1} q_{r-2} - p_{r-2} q_{r-1}| = 1,$$

$$\theta' = \frac{\theta'_r p'_{r-1} + p'_{r-2}}{\theta'_r q'_{r-1} + q'_{r-2}}, \text{ avec } |p'_{r-1} q'_{r-2} - p'_{r-2} q'_{r-1}| = 1.$$

Or

$$\theta_r = [a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \dots] = \theta'_r \quad (\text{d'après (12)})$$

Il en résulte entre θ et θ' une relation de la forme :

$$(17) \quad \theta' = \frac{A\theta + B}{C\theta + D}, \text{ avec } |AD - BC| = 1.$$

Définition. - Deux nombres réels θ et θ' sont dits équivalents ($\theta \sim \theta'$) s'il existe entre eux une relation de la forme (17) (relation évidemment réflexive, symétrique, transitive).

D'où le

THÉORÈME. - Si deux nombres ont des développements en fraction continue qui coïncident à partir d'un certain rang, ces deux nombres sont équivalents.

Réciproquement, on démontre que :

Si deux nombres sont équivalents, leurs développements coïncident à partir d'un certain rang.

(Voir la démonstration dans [2], page 142. Elle s'appuie sur le lemme déjà cité dans le paragraphe 3.3.)

4.2. Développements périodiques. - Soit θ un nombre dont le développement est périodique "à partir d'un certain rang" c'est-à-dire

$$\theta = [a_0, a_1, \dots, a_r, b_0, \dots, b_k, b_0, \dots, b_k, \dots] \quad .$$

On a

$$\theta_{r+1} = [b_0, \dots, b_k, b_0, \dots, b_k, \dots] = \theta_{r+k+1} \quad .$$

Or

$$\theta_{r+1} = \frac{\theta_{r+k+1} P_k + P_{k-1}}{\theta_{r+k+1} Q_k + Q_{k-1}} \quad (\text{d'après (11)})$$

($\frac{P_k}{Q_k}$ et $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ étant les réduites d'ordre k et $k-1$ du développement de θ_{r+1}).

Donc θ_{r+1} est un nombre quadratique et, puisque θ et θ_{r+1} sont équivalents, θ est lui aussi quadratique.

On démontre que la réciproque de cette propriété est exacte (voir [2], page 144).

D'où le résultat :

Les développements périodiques caractérisent les nombres quadratiques.

4.3. Définition de $\nu(\theta)$. - Un nombre θ irrationnel étant donné, on pose

$$\nu(\theta) = \liminf_{n \rightarrow \infty} q_n \|q_n \theta\| \quad .$$

Les résultats de 3.4 montrent que $\nu(\theta) \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$. L'étude des valeurs prises par $\nu(\theta)$ fera l'objet du prochain exposé. On se bornera ici à démontrer une propriété remarquable de $\nu(\theta)$: Si θ et θ' sont deux nombres équivalents,

$$\nu(\theta) = \nu(\theta') \quad .$$

Démonstration. - On a vu ((11') et (15)) que

$$\frac{1}{q_n \|q_n \theta\|} = \lambda_n = [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] + [0, a_n, \dots, a_1] \quad .$$

Si θ et θ' sont équivalents, leurs développements vérifient les relations

$$a_{r+k} = a'_{s+k}$$

(r et s entiers fixes, $k \geq 0$ quelconque).

D'où

$$\lambda_{r+k} - \lambda'_{s+k} = [0, a_{r+k}, \dots, a_1] - [0, a'_{s+k}, \dots, a_1] \quad .$$

Les deux rationnels figurant au second membre ont leurs $k + 1$ premiers termes communs dans leur développement. En appliquant (10), on trouve

$$|\lambda_{r+k} - \lambda'_{s+k}| < 2^{1-k}, \text{ pour tout } k \geq 0 \quad .$$

Il en résulte

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda'_n \quad .$$

D'où

$$\nu(\theta) = \nu(\theta') \quad .$$

5. Une application de la théorie des fractions continues : le théorème de Borel-Szusz.

θ étant un nombre irrationnel, on considère l'ensemble des rationnels $\frac{p}{q}$ tels que

$$q \|q \theta\| < \frac{1}{\sqrt{5}} \quad ,$$

(ensemble infini d'après 3.4). Soit $l_1, l_2, \dots, l_m, \dots$ la suite des dénominateurs q , ordonnée suivant les q croissants.

THÉOREME. - Quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un entier positif n_0 tel que, pour tout $n > n_0$, l'intervalle $]n, n+2[$ contienne au moins un nombre de la suite (l_m) .

Ce résultat démontré par SZUSZ en 1959, avait été établi par BOREL dans le cas $\varepsilon = 15$ (il trouvait $n_0 = 10$).

Démonstration. - Il suffit de démontrer que, pour m suffisamment grand, $l_{m+1} < \varepsilon l_m^2$, c'est-à-dire que $\frac{l_{m+1}}{l_m^2} \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow +\infty$.

On a vu (3.3) que tout rationnel $\frac{p}{q}$ tel que $q||q\theta|| < \frac{1}{2}$ est égal à une réduite $\frac{p_n}{q_n}$ du développement de θ . C'est-à-dire, puisque p_n et q_n sont premiers entre eux d'après (5) :

$$p = kp_n, \quad q = kq_n \quad (k \text{ entier positif}) .$$

Nous allons préciser ce résultat en montrant que $k \leq a_{n+1}$. Soit un entier $q = kq_n$, avec $k > a_{n+1}$. Comparons les deux quantités

$$\frac{1}{2q^2} = \frac{1}{2k^2 q_n^2} \quad \text{et} \quad \left| \theta - \frac{p}{q} \right| = \frac{1}{\lambda_n q_n^2} .$$

$$\lambda_n = [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] + [0, a_n, \dots, a_1] \quad (\text{d'après (15)}) ,$$

ce qui entraîne

$$\lambda_n < a_{n+1} + 2 .$$

D'autre part

$$k^2 \geq (a_{n+1} + 1)^2 .$$

Il en résulte

$$2k^2 > \lambda_n ,$$

et donc

$$|\theta - \frac{p}{q}| > \frac{1}{2q^2} .$$

D'où le résultat annoncé :

Tout entier q tel que $q||q\theta|| < \frac{1}{2}$ vérifie $q = kq_n$ avec $k \leq a_{n+1}$.

La suite (l_m) est donc formée de multiples kq_n des dénominateurs q_n des réduites de θ , avec $1 \leq k \leq a_{n+1}$. Si kq_n , avec $k > 1$, figure dans la suite, $(k-1)q_n$ y figure également (car $\frac{1}{2(kq_n)^2} < \frac{1}{2((k-1)q_n)^2}$). D'autre part (d'après 3.4) l'un au moins des trois nombres q_n , q_{n+1} , q_{n+2} figure dans la suite (l_m) . On remarque enfin que

$$kq_n < q_{n+1} \text{ pour tout } k \leq a_{n+1} \quad (\text{d'après (2)}) .$$

Soient alors deux nombres successifs de la suite (l_m) . Deux cas sont possibles.

- Ou bien : $l_m = kq_n$, $l_{m+1} = (k+1)q_n$, avec $1 \leq k < a_{n+1}$,

- Ou bien : $l_m = kq_n$, $l_{m+1} = q_{n+h}$, avec $\begin{cases} 1 \leq k \leq a_{n+1} \\ h = 1, 2 \text{ ou } 3 . \end{cases}$

Nous allons étudier dans chaque cas le rapport $\frac{l_{m+1}}{l_m^2}$.

Premier cas :

$$\frac{l_{m+1}}{l_m^2} = \frac{k+1}{k^2 q_n} < \frac{2}{q_n} .$$

Quand m tend vers l'infini, l'indice n du q_n associé tend vers l'infini, donc q_n augmente indéfiniment. Par suite $\frac{l_{m+1}}{l_m^2}$ tend vers zéro.

Deuxième cas :

$$\frac{\ell_{m+1}}{\ell_m^2} = \frac{q_{n+h}}{k^2 q_n} \quad .$$

Nous allons d'abord démontrer la double inégalité :

$$q_{n+1} \leq q_{n+h} < 9q_{n+1} \quad .$$

Les raisonnements faits dans la démonstration de 3.4 montrent que, si $a_{n+2} \geq 3$, q_{n+1} appartient à la suite (ℓ_m) . Dans ce cas $h = 1$, les inégalités sont vérifiées.

Reste le cas $a_{n+2} \leq 2$. L'égalité

$$\frac{q_{n+2}}{q_{n+1}} = a_{n+2} + \frac{q_n}{q_{n+1}}$$

entraîne

$$\frac{q_{n+2}}{q_{n+1}} < 3 \quad .$$

Si $a_{n+3} \geq 3$, le même raisonnement que précédemment montre que q_{n+2} appartient à la suite (ℓ_m) , $h \leq 2$ et les inégalités sont vérifiées.

Si $a_{n+3} \leq 2$, on a de façon analogue

$$\frac{q_{n+3}}{q_{n+2}} < 3$$

et donc

$$\frac{q_{n+3}}{q_{n+1}} < 9 \quad ;$$

on ne peut pas conclure quant à la valeur de h , mais les inégalités sont vérifiées.

Ceci permet de majorer le rapport $\frac{q_{n+h}}{k^2 q_n^2}$:

$$\frac{q_{n+h}}{k^2 q_n^2} < \frac{9q_{n+1}}{k^2 q_n^2} < 9\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \frac{q_{n+1}}{(k+1)^2 q_n^2} < 36 \frac{q_{n+1}}{(k+1)^2 q_n^2} .$$

Par hypothèse $(k+1)q_n$ n'appartient pas à la suite (l_m) , donc

$$\|(k+1)q_n \theta\| > \frac{1}{\sqrt{5}(k+1)q_n} .$$

Or

$$\|(k+1)q_n \theta\| = (k+1)\|q_n \theta\| ,$$

car

$$(k+1)\|q_n \theta\| \leq (a_{n+1}+1)\|q_n \theta\| = \|q_{n-1} \theta\| + \|q_n \theta\| - \|q_{n+1} \theta\| < \frac{1}{2} .$$

On trouve donc la majoration :

$$\frac{l_{m+1}}{l_m^2} = \frac{q_{n+h}}{k^2 q_n^2} < 36\sqrt{5} \frac{q_{n+1}}{q_n} \|q_n \theta\| < \frac{36}{q_n} .$$

Par conséquent, dans ce cas également, $\frac{l_{m+1}}{l_m^2} \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow \infty$.

Le théorème est donc démontré.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CASSELS (J. W. S.). - An introduction to diophantine approximation. - Cambridge, at the University Press, 1957 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, 45).
- [2] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers. 3rd edition. - Oxford, the Clarendon Press, 1954.
- [3] PERRON (Oskar). - Die Lehre von den Kettenbrüchen. 3te Auflage. Bände 1 und 2. - Stuttgart, B. G. Teubner, 1954-1957.
- [4] SZÜSZ (P.). - Über die Approximation einer reellen Zahl durch Brüche, Acta Math. Acad. scient. Hungar., t. 10, 1959, p. 69-75.