Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

Hubert Delange

Distribution des valeurs de certaines fonctions arithmétiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 2 (1960-1961), exp. n° 2, p. 1-25

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1960-1961__2__A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
2e année, 1960/61, n° 2

14, 21 et 28 novembre 1960

DISTRIBUTION DES VALEURS DE CERTAINES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

par Hubert DELANGE

1. Introduction.

μ étant la fonction de Möbius, il est bien connu que l'on a pour x infini

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x} \mu(n) = o[x] \quad .$$

Par ailleurs, si $Q(x)$ est le nombre des entiers positifs "quadratfrei" au plus égaux à x, on a, pour x infini,

$$Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + o[x] \quad .$$

Si l'on désigne par $Q_1(x)$ le nombre des entiers au plus égaux à x qui sont le produit d'un nombre pair de nombres premiers différents, et par $Q_2(x)$ le nombre de ceux qui sont le produit d'un nombre impair de nombres premiers différents, les deux relations précédentes s'écrivent

$$Q_1(x) - Q_2(x) = o[x]$$

et

$$Q_1(x) + Q_2(x) = \frac{6}{\pi^2} x + o[x] \ ,$$

et l'on en déduit immédiatement

$$Q_1(x) \sim Q_2(x) \sim \frac{3}{\pi^2} x \quad .$$

Autrement dit, la fonction arithmétique égale au nombre des diviseurs premiers de n prend avec la même fréquence des valeurs paires ou impaires quand n parcourt l'ensemble des nombres "quadratfrei".

1.1. - Plus généralement, soit f une fonction arithmétique quelconque à valeurs entières. Soit A un ensemble d'entiers naturels possédant une densité positive D (nous disons que A possède une densité égale à D si, $\nu_A(x)$ étant le nombre des nombres de A au plus égaux à x, on a, pour x infini, $\nu_A(x) = Dx + o[x]$). Soit q un entier > 1 .

Nous nous posons la question suivante : les différentes valeurs possibles pour le reste de la division de $f(n)$ par q, c'est-à-dire $0, 1, 2, \dots, q-1$, apparaissent-elles avec la même fréquence quand n parcourt A ? De façon précise, est-il vrai que, quel que soit r entier, l'ensemble des n appartenant à A, et tels que

$$f(n) \equiv r \pmod q ,$$

possède une densité égale à $\frac{D}{q}$?

On voit que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que :

Pour $z = \exp[\frac{2\,k\pi i}{q}]$, avec $k \not\equiv 0 \pmod q$,

$$(1) \qquad \sum_{\substack{n\leqslant x \\ n\in A}} z^{f(n)} = o[x] \quad \text{quand } x \text{ tend vers } +\infty ,$$

En effet, si l'on a la propriété voulue, et si $z = \exp[\frac{2\,k\pi i}{q}]$, avec $k \not\equiv 0 \pmod q$, on a pour chaque r entier $\geqslant 0$

$$\sum_{\substack{n\leqslant x \\ n\in A \\ f(n)\equiv r \pmod q}} z^{f(n)} = \frac{D}{q} z^r x + o[x] .$$

En faisant $r = 0, 1, 2, \dots, q-1$ et en ajoutant, on a

$$\sum_{\substack{n\leqslant x \\ n\in A}} z^{f(n)} = \frac{Dx}{q}\left(\sum_{r=0}^{q-1} z^r\right) + o[x] = o[x] .$$

Inversement, si l'on a (1), on en déduit, en multipliant par z^{-r},

$$\sum_{\substack{n\leqslant x \\ n\in A}} z^{f(n)-r} = o[x] ,$$

ou, en posant $\exp[\frac{2\,\pi i}{q}] = \gamma$,

$$\sum_{\substack{n\leqslant x \\ n\in A}} \gamma^{k[f(n)-r]} = o[x] \qquad \text{pour } k = 1, 2, \dots, q-1 .$$

Pour $k = 0$, on a évidemment $\Sigma = Dx + o[x]$.

Par addition, on obtient

$$\sum_{\substack{n\leq x \\ n\in A \\ f(n)\equiv r \pmod q}} q = Dx + o[x] \quad .$$

1.1.1. - Notons que, si, pour $|z| = 1$ et $z \neq 1$,

$$\sum_{\substack{n\leq x \\ n\in A}} z^{f(n)} = o[x] \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty ,$$

quel que soit l'entier $q > 1$ et quel que soit l'entier r , l'ensemble des n appartenant à A tels que

$$f(n) \equiv r \pmod q$$

possède une densité égale à $\frac{D}{q}$.

1.2. - On peut aussi, au lieu de considérer une seule fonction, en considérer simultanément plusieurs, par exemple deux, soient f et g .

Soient donc f et g deux fonctions arithmétiques à valeurs entières, A un ensemble d'entiers naturels ayant une densité positive D , et q et q' deux entiers > 1 .

Nous nous posons la question suivante : les restes de division de $f(n)$ par q et de $g(n)$ par q' prennent-ils, avec la même fréquence, tous les systèmes de valeurs possibles a priori, c'est-à-dire tous les systèmes (i , j) , où $0 \leq i < q$, $0 \leq j < q'$? Autrement dit, est-il vrai que, quels que soient les entiers r et r' , l'ensemble des n appartenant à A , et tels que

$$f(n) \equiv r \pmod q \quad \text{et} \quad g(n) \equiv r' \pmod{q'} ,$$

possède une densité égale à $\frac{D}{qq'}$?

On voit comme plus haut que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que pour

$$u = \exp[\tfrac{2\,k\pi i}{q}] , \text{ avec } k \not\equiv 0 \pmod q ,$$

et

$$v = \exp[\tfrac{2\,k'\pi i}{q'}] , \text{ avec } k' \not\equiv 0 \pmod{q'} ,$$

$$\sum_{\substack{n\leq x \\ n\in A}} u^{f(n)}\, v^{g(n)} = o[x] \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty \quad .$$

1.2.1. - Si l'on a

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}} u^{f(n)}\, v^{g(n)} = o[x]$$

pour $|u| = |v| = 1$ et u ou $v \neq 1$, la propriété a lieu quels que soient q et $q' > 1$.

Si

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}} u^{f(n)}\, v^{g(n)} = o[x]$$

pour $|u| = |v| = 1$ et $uv \neq 1$, la propriété a lieu quand $(q , q') = 1$.

1.3. - Au lieu de considérer des fonctions à valeurs entières, on peut aussi considérer une fonction f à valeurs réelles, et chercher si ses valeurs sont distribuées uniformément modulo 1 quand n parcourt A. (On entend par là que, pour tout t réel satisfaisant à $0 \leqslant t < 1$, l'ensemble des n appartenant à A, pour lesquels l'excès de $f(n)$ sur le plus grand entier $\leqslant f(n)$ est au plus égal à t, possède une densité égale à tD).

D'après une extension triviale d'un théorème bien connu de H. WEYL, pour que ceci ait lieu, il faut et il suffit que, quel que soit m entier $\neq 0$, on ait, pour x infini,

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}} \exp\{2\, m\pi i\, f(n)\} = o[x] \quad .$$

1.3.1. - Notons que, d'après cela, si f est une fonction arithmétique à valeurs entières, et si, pour $|z| = 1$ et $z \neq 1$,

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}} z^{f(n)} = o[x] \quad \text{quand } x \text{ tend vers } +\infty ,$$

quel que soit λ irrationnel, les nombres $\lambda f(n)$ sont distribués uniformément modulo 1 quand n parcourt A.

On a des résultats analogues pour un système de deux ou plusieurs fonctions. En particulier, si f et g sont deux fonctions arithmétiques à valeurs entières, et si, pour $|u| = |v| = 1$ et u ou $v \neq 1$,

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}} u^{f(n)}\, v^{g(n)} = o[x] \quad \text{quand} \quad x \quad \text{tend vers} \quad +\infty ,$$

on a le résultat suivant :

Quels que soient les nombres irrationnels λ et μ, si

ξ_n = excès de $\lambda f(n)$ sur le plus grand entier $\leqslant \lambda f(n)$

et

η_n = excès de $\mu g(n)$ sur le plus grand entier $\leqslant \mu g(n)$,

les points $\{\xi_n , \eta_n\}$ se répartissent uniformément dans le carré

$$0 \leqslant \xi \leqslant 1 , \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1 ,$$

lorsque n parcourt A ; autrement dit, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $0 \leqslant t' \leqslant 1$, l'ensemble des n appartenant à A pour lesquels

$$\xi_n \leqslant t \quad \text{et} \quad \eta_n \leqslant t'$$

possède une densité égale à $tt'D$.

Si l'on suppose seulement que

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}} u^{f(n)}\, v^{g(n)} = o[x] \quad \text{quand} \quad |u| = |v| = 1 \quad \text{et} \quad uv \neq 1 ,$$

le résultat a lieu quels que soient les nombres irrationnels λ et μ tels que l'équation

$$\lambda X + \mu Y = Z$$

n'ait pas d'autre solution en entiers rationnels que $X = Y = Z = 0$.

1.4. - Nous définirons la valeur moyenne d'une fonction arithmétique réelle ou complexe F comme étant la limite de l'expression

$$\frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} F(n)$$

lorsque x tend vers $+\infty$, si cette limite existe et est finie.

Nous désignerons cette valeur moyenne par M(F) . $M(F) = 0$ signifie donc que, pour x tendant vers $+\infty$,

$$\sum_{n\leqslant x} F(n) = o[x] \quad .$$

Ainsi, si l'on désigne par γ_A la fonction caractéristique de l'ensemble A, c'est-à-dire la fonction définie par

$$\gamma_A(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A , \\ 0 & \text{si } n \notin A , \end{cases}$$

les conditions

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in A}} z^{f(n)} = o[x] , \qquad \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in A}} u^{f(n)} v^{g(n)} = o[x]$$

et

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in A}} \exp\{2 \pi i f(n)\} = o[x] ,$$

rencontrées plus haut, expriment que les fonctions arithmétiques égales respectivement à

$$\gamma_A(n)\, z^{f(n)} , \quad \gamma_A(n)\, u^{f(n)} v^{g(n)} \quad \text{et} \quad \gamma_A(n) \exp\{2 \pi i f(n)\}$$

possèdent des valeurs moyennes nulles.

1.4.1. - Si A est l'ensemble N de tous les entiers positifs ou l'ensemble Q des entiers positifs "quadratfrei", si $|z| = 1$, $|u| = |v| = 1$, et si les fonctions f et g sont additives, les différentes fonctions ci-dessus sont multiplicatives et de module $\leqslant 1$.

2. Existence d'une valeur moyenne nulle pour une fonction de la classe $\mathfrak{M}_0$.

Ceci nous conduit au problème suivant :

Désignons par $\mathfrak{M}_0$ la classe des fonctions arithmétiques réelles ou complexes multiplicatives, non identiquement nulles, et de module $\leqslant 1$, autrement dit la classe des fonctions arithmétiques réelles ou complexes f ayant les propriétés suivantes :

1° $f(1) = 1$;

2° $f(mn) = f(m)\, f(n)$ quand $(m , n) = 1$;

3° $|f(n)| \leqslant 1$ quel que soit n.

f étant une fonction de la classe $\mathfrak{M}_0$, cherchons à quelles conditions $M(f)$ existe, et égale 0.

On peut voir que, pour que $M(f)$ existe et égale 0, il faut que :

- ou bien $\sum \frac{1 - \mathcal{R}f(p)}{p} = +\infty$, (p parcourant l'ensemble des nombres premiers)
- ou bien $f(2^r) = -1$ pour tout $r \geqslant 1$.

Par exemple, la fonction de Möbius et la fonction égale à 1 si n est impair, et à -1 si n est pair, sont des fonctions de la classe $\mathfrak{M}_0$, et possèdent chacune une valeur moyenne nulle. La fonction de Möbius satisfait à la première condition, et la fonction égale à 1 si n est impair, et à -1 si n est pair, satisfait à la deuxième.

Je ne connais pas de conditions à la fois nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction de la classe $\mathfrak{M}_0$ possède une valeur moyenne nulle.

Des conditions suffisantes sont les suivantes :

1° Il existe une constante réelle ou complexe ρ telle que, pour x infini,

$$\sum_{p \leqslant x} f(p) \log p = \rho x + o[x] ;$$

2° Si $\rho = 1$, $\sum \frac{1 - \mathcal{R}f(p)}{p} = +\infty$ (1).

2.1. - Pour démontrer ce théorème, j'établis en premier lieu le résultat suivant :

Soit $f \in \mathfrak{M}_0$, et soit $\theta_f(x) = \sum_{p \leqslant x} f(p) \log p$.

Alors, on a pour x infini :

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = \frac{1}{\log x} \sum_{n \leqslant x} f(n)\, \theta_f\left(\frac{x}{n}\right) + o[x] .$$

Ceci peut s'établir sans aucun appel à la théorie des séries de Dirichlet, mais

(1) On voit sans peine que la condition 1 entraîne

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{f(p)}{p} = \rho \log\log x + o[\log\log x]$$

et par suite

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1 - \mathcal{R}f(p)}{p} = [1 - \mathcal{R}\rho] \log\log x + o[\log\log x] .$$

Comme, par ailleurs, ρ est évidemment de module $\leqslant 1$, si $\rho \neq 1$, la condition 1° entraîne

$$\sum \frac{1 - \mathcal{R}f(p)}{p} = +\infty .$$

ici il sera plus avantageux, en vue de la suite, d'utiliser ces séries.

2.1.1. - D'abord, on a, pour $\Re s > 1$,

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod \left[1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}}\right] \quad .$$

On voit ensuite que, pour chaque p ,

$$1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}} = \exp\left\{\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{C_r^{(p)}}{rp^{rs}}\right\} \quad ,$$

où les coefficients $C_r^{(p)}$ sont déterminés par

$$C_1^{(p)} = f(p)$$

et, pour $r \geq 2$,

$$C_r^{(p)} = rf(p^r) - \sum_{j=1}^{r-1} C_j^{(p)} f(p^{r-j}) \quad ,$$

de sorte que $|C_r^{(p)}| \leq 2^r - 1$.

Il résulte de là que, pour $\Re s > 1$,

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \exp\left\{\sum_{p,r} \frac{C_r^{(p)}}{rp^{rs}}\right\} \quad .$$

On en déduit, en prenant la dérivée logarithmique,

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{f(n) \log n}{n^s} = \left\{\sum_{1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right\} \sum_{p,r} \frac{C_r^{(p)} \log p}{p^{rs}} \quad ,$$

ce qui entraîne

$$f(n) \log n = \sum_{p^r \, m=n} C_r^{(p)} f(m) \log p \quad .$$

Par suite, pour $x > 0$,

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ 2 \nmid n}} f(n) \log n = \sum_{\substack{m \leq x \\ 2 \nmid m}} f(m) \, \psi_f\left(\frac{x}{m}\right) \quad , \quad (2)$$

---

(2) La notation $a|b$ signifie : a divise b .
La notation $a \nmid b$ signifie : a ne divise pas b .

où $\psi_f(x) = \sum_{\substack{p>2 \\ p^r \leqslant x}} C_r^{(p)} \log p$.

2.1.2. - On peut écrire $\psi_f(x) = \theta_f(x) + \delta_f(x)$.

Alors on a

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ 2 \nmid n}} f(n) \log n = \sum_{\substack{m \leqslant x \\ 2 \nmid m}} f(m)\, \theta_f\left(\frac{x}{m}\right) + \eta(x) \quad ,$$

où $\eta(x) = \sum_{\substack{m \leqslant x \\ 2 \nmid m}} f(m)\, \delta_f\left(\frac{x}{m}\right)$.

On voit que

$$\delta_f(x) = O[x^\alpha] \ , \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{1}{2} + \frac{\log 2}{\log 5} < 1 \quad .$$

En effet, pour $x > 2$,

$$\delta_f(x) = - f(2) \log 2 + \sum_{\substack{p>2 \\ p^r \leqslant x \\ r>1}} C_r^{(p)} \log p \quad .$$

Pour $x \geqslant 9$,

$$\left| \sum_{\substack{p>2 \\ p^r \leqslant x \\ r>1}} C_r^{(p)} \log p \right| \leqslant \sum_{\substack{2<p\leqslant\sqrt{x} \\ p^r \leqslant x}} 2^r \log p = \sum_{2<p\leqslant\sqrt{x}} (\log p) \left\{ \sum_{r \leqslant (\log x)/(\log p)} 2^r \right\} .$$

Mais

$$\sum_{r \leqslant (\log x)/(\log p)} 2^r \leqslant 2^{(\log x)/(\log p)+1} = 2x^{(\log 2)/(\log p)} \quad .$$

Donc

$$\sum_{2<p\leqslant\sqrt{x}} (\log p) \left\{ \sum_{r \leqslant (\log x)/(\log p)} 2^r \right\} \leqslant 2x^{(\log 2)/(\log 3)} + 2 \sum_{p\leqslant\sqrt{x}} x^{(\log 2)/(\log 5)} \log p .$$

De ce que $\delta_f(x) = O[x^\alpha]$, avec $\alpha < 1$, on déduit

$$\eta(x) = O[x] \quad .$$

2.1.3. - Maintenant, on peut remarquer que les conditions

$$n \leq x \ , \quad 2^q / n \ , \quad 2^{q+1} \not/ n \ , \qquad (\text{avec } q \geq 0)$$

sont équivalentes à

$$n = 2^q m \ , \qquad \text{avec } m \leq \frac{x}{2^q} \ , \ 2 \not/ m \ .$$

On a donc

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ 2^q / n \\ 2^{q+1} \not/ n}} f(n) \log n = \sum_{\substack{m \leq x/2^q \\ 2 \not/ m}} f(2^q m) \log(2^q m) \ ,$$

$$= f(2^q) \sum_{\substack{m \leq x/2^q \\ 2 \not/ m}} f(m) \log m + q f(2^q) \log 2 \sum_{m \leq x/2^q} f(m) \ ,$$

$$= f(2^q) \sum_{\substack{m \leq x/2^q \\ 2 \not/ m}} f(m) \, \theta_f\left(\frac{x}{2^q m}\right) + f(2^q) \, \eta\left(\frac{x}{2^q}\right) + q f(2^q) \log 2 \sum_{m \leq x/2^q} f(m) \ ,$$

$$= \sum_{\substack{n \leq x \\ 2^q / n \\ 2^{q+1} \not/ n}} f(n) \, \theta_f\left(\frac{x}{n}\right) + f(2^q) \, \eta\left(\frac{x}{2^q}\right) + q f(2^q) \log 2 \sum_{m \leq x/2^q} f(m) \ .$$

En donnant à q toutes les valeurs entières depuis 0 jusqu'à la partie entière de $\frac{\log x}{\log 2}$, et en additionnant, on obtient

$$\sum_{n \leq x} f(n) \log n = \sum_{n \leq x} f(n) \, \theta_f\left(\frac{x}{n}\right) + O[x] \ .$$

Pour avoir le résultat annoncé, il suffit d'observer que

$$\sum_{n \leq x} f(n) \log n = \left\{ \sum_{n \leq x} f(n) \right\} \log x + O[x] \ .$$

Cela résulte immédiatement de ce que, pour $x > 1$,

$$\left| \sum_{n \leq x} f(n) \log \frac{x}{n} \right| \leq \sum_{n \leq x} \log \frac{x}{n} = \int_1^x E[t] \frac{dt}{t} \ ,$$

où $E[t]$ est la partie entière de t .

2.2. - Maintenant, si l'on a, pour x infini,

$$\theta_f(x) = \sum_{p \leq x} f(p) \log p = \rho x + o[x] \quad ,$$

(2) montre que

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \frac{\rho x}{\log x} \sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n} + o[x] \quad .$$

La démonstration du théorème sera donc achevée si l'on prouve que

$$\sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n} = o[\log x] \quad .$$

Mais, pour $\mathcal{R}s > 1$,

$$\frac{1}{\zeta(s)} \sum_1^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod \left[1 - \frac{1}{p^s}\right] \left[1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}}\right] \quad ,$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left[1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{f(2^r)}{2^{rs}}\right] \exp\left\{\sum_{p>2} \frac{C_r^{(p)} - 1}{r p^{rs}}\right\} \quad ,$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left[1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{f(2^r)}{2^{rs}}\right] \exp\left\{- \sum_{p>2} \frac{1 - f(p)}{p^s} + \sum_{\substack{p>2 \\ r>1}} \frac{C_r^{(p)} - 1}{r p^{rs}}\right\} \quad .$$

Comme, pour $\mathcal{R}s > 1$ et $r > 1$,

$$\left| \frac{C_r^{(p)} - 1}{r p^{rs}} \right| < \frac{2^{r-1}}{p^r}$$

et comme, pour $p > 2$, $\sum_{r=2}^{+\infty} \frac{2^{r-1}}{p^r} = \frac{2}{p(p-2)}$,

on déduit de là que, pour s réel > 1 ,

$$(3) \quad \left| \frac{1}{\zeta(s)} \sum_1^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \exp\left\{- \sum_{p>2} \frac{1 - \mathcal{R}f(p)}{p^s} + \sum_{p>2} \frac{2}{p(p-2)}\right\} \quad .$$

Du fait que $\sum \frac{1 - \mathcal{R}f(p)}{p} = + \infty$ ([3]), ceci entraîne que, quand s tend vers 1 par valeurs supérieures,

$$\frac{1}{\zeta(s)} \sum_1^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} \text{ tend vers zéro} \quad ,$$

autrement dit $\sum_1^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = o\left[\frac{1}{s-1}\right]$.

([3]) cf. note ([1]).

Un théorème taubérien classique permet de déduire de là que, quand x tend vers $+\infty$,

$$\sum_{n\leq x} \frac{f(n)}{n} = o[\log x] \quad .$$

3. Applications.

3.1. - Désignons par $\omega(n)$ le nombre des diviseurs premiers de l'entier positif n, et par $\Omega(n)$ le nombre total des facteurs dans la décomposition de n en facteurs premiers.

3.1.1. - Comme, d'après le théorème des nombres premiers, on a pour x infini

$$\sum_{p\leq x} \log p = x + o[x] \quad ,$$

on voit immédiatement que, si $|z| = 1$ et $z \neq 1$, les fonctions arithmétiques égales respectivement à

$$z^{\omega(n)} \quad , \quad z^{\Omega(n)} \quad \text{et} \quad |\mu(n)|\, z^{\omega(n)}$$

satisfont aux hypothèses du théorème établi ci-dessus.

Donc, si $|z| = 1$ et $z \neq 1$, on a, pour x infini,

$$\sum_{n\leq x} z^{\omega(n)} = o[x] \quad , \qquad \sum_{n\leq x} z^{\Omega(n)} = o[x] \quad ,$$

et

$$\sum_{\substack{n\leq x \\ n\in Q}} z^{\omega(n)} = o[x] \quad .$$

D'après ce qui a été dit aux paragraphes (1.1.1) et (1.3.1), ceci entraîne les résultats suivants :

1° ([7] et [9]) quel que soit l'entier $q > 1$, et quel que soit l'entier r, l'ensemble des entiers positifs n tels que

$$\omega(n) \equiv r \pmod q$$

possède une densité égale à $\frac{1}{q}$, et il en est de même de l'ensemble des entiers positifs n tels que

$$\Omega(n) \equiv r \pmod q \quad .$$

L'ensemble des entiers positifs "quadratfrei" tels que

$$\omega(n) \equiv r \pmod{q}$$

possède une densité égale à $\frac{1}{q} \cdot \frac{6}{\pi^2}$.

2° ([3]) quel que soit le nombre irrationnel λ , les nombres $\lambda\omega(n)$ et les nombres $\lambda\Omega(n)$ sont distribués uniformément modulo 1 quand n parcourt l'ensemble de tous les entiers positifs et quand n parcourt l'ensemble des entiers positifs "quadratfrei".

3.1.2. - Si $|u| = |v| = 1$ et $uv \neq 1$, la fonction égale à $u^{\omega(n)}\, v^{\Omega(n)}$ satisfait aussi aux hypothèses du théorème.

Donc, si $|u| = |v| = 1$ et $uv \neq 1$, on a pour x infini

$$\sum_{n \leqslant x} u^{\omega(n)}\, v^{\Omega(n)} = o[x] \quad .$$

D'après ce qui a été dit au paragraphe (1.2.1), ceci entraîne que, si q et q' sont deux entiers > 1 et premiers entre eux, quels que soient les entiers r et r' , l'ensemble des entiers positifs tels que

$$\omega(n) \equiv r \pmod{q} \qquad \text{et} \quad \Omega(n) \equiv r' \pmod{q'}$$

possède une densité égale à $\frac{1}{qq'}$.

D'après ce qui a été dit au paragraphe (1.3.1), on a aussi une propriété de distribution uniforme modulo 1 pour les systèmes $[\lambda\omega(n)\ ,\ \mu\Omega(n)]$, si λ et μ sont deux nombres irrationnels tels que l'équation

$$\lambda X + \mu Y = Z$$

n'ait pas d'autre solution en entiers rationnels que $X = Y = Z = 0$ [3].

3.2. - E étant un ensemble de nombres premiers, désignons par $\omega_E(n)$ le nombre des diviseurs premiers de n qui appartiennent à E , et par $\Omega_E(n)$ le nombre total des facteurs appartenant à E dans la décomposition de n en facteurs premiers.

Soit $\mathcal{C}$ la classe des ensembles E de nombres premiers ayant les propriétés suivantes :

1° Il existe un $\alpha \geqslant 0$ tel que, pour x infini, le nombre des nombres de E au plus égaux à x soit

$$\alpha \frac{x}{\log x} + o\left[\frac{x}{\log x}\right] \quad ;$$

autrement dit, E possède une densité α par rapport à l'ensemble de tous les nombres premiers ;

2° Si $\alpha = 0$, on a $\sum_{p \in E} \frac{1}{p} = +\infty$ (4).

3.2.1. - On voit que, si E appartient à la classe $\mathcal{C}$, les fonctions ω_E et Ω_E possèdent les propriétés établies plus haut pour ω et Ω.

3.2.2. - Soient maintenant E_1 et E_2 deux ensembles de la classe $\mathcal{C}$ tels que l'un au moins des ensembles $E_2 - E_1$ et $E_1 - E_2$ appartienne aussi à la classe $\mathcal{C}$, et soient f l'une des fonctions ω_{E_1} et Ω_{E_1}, et g l'une des fonctions ω_{E_2} et Ω_{E_2}.

On voit alors que, si $|u| = |v| = 1$ et u ou $v \neq 1$, les fonctions égales à $u^{f(n)} v^{g(n)}$ et $|\mu(n)| u^{f(n)} v^{g(n)}$ possèdent chacune une valeur moyenne nulle. Autrement dit, on a pour x infini

$$\sum_{n \leq x} u^{f(n)} v^{g(n)} = o[x] \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in Q}} u^{f(n)} v^{g(n)} = o[x] \quad .$$

D'après ce qui a été dit au paragraphe (1.2), il résulte de là que, quels que soient les entiers q et $q' > 1$, et quels que soient les entiers r et r', l'ensemble des entiers positifs n tels que

$$f(n) \equiv r \pmod{q} \qquad \text{et} \quad g(n) \equiv r' \pmod{q'}$$

possède une densité égale à $\frac{1}{qq'}$, et l'ensemble des entiers positifs "quadratfrei" qui satisfont aux mêmes conditions possède une densité égale à $\frac{1}{qq'} \cdot \frac{6}{\pi^2}$.

On a aussi, d'après ce qui a été dit au paragraphe (1.3.1), une propriété de distribution uniforme modulo 1 pour les systèmes $[\lambda f(n) , \mu g(n)]$, où λ et μ sont des nombres irrationnels quelconques.

3.3. - On a, par ailleurs, le théorème général suivant :

Soit F une fonction réelle additive.

Supposons que :

1° Pour chaque m entier > 0, il existe une constante ρ_m telle que l'on ait, pour x infini,

---

(4) Quand $\alpha > 0$, 1 entraîne la même relation.

$$\sum_{p \leqslant x} \exp\{2 m\pi i F(p)\} \log p = \rho_m x + o[x] ;$$

2° Si $\rho_m = 1$, $\sum \frac{1 - \cos 2 m\pi F(p)}{p} = + \infty$.

Alors les nombres F(n) sont distribués uniformément modulo 1 quand n parcourt l'ensemble de tous les entiers positifs et quand n parcourt l'ensemble des entiers positifs "quadratfrei".

Cela résulte immédiatement de ce que, quel que soit m entier positif, on a pour x infini

$$\sum_{n \leqslant x} \exp\{2 m\pi i F(n)\} = o[x]$$

et

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in Q}} \exp\{2 m\pi i F(n)\} = o[x] \quad .$$

3.3.1. - Un cas particulier simple est celui où F(p) tend vers zéro quand le nombre premier p tend vers $+ \infty$, et l'on a

$$\sum \frac{F(p)^2}{p} = + \infty \quad .$$

On retrouve ainsi un résultat dû à ERDÖS ([5] et [2]).

3.3.2. - Un autre exemple simple est $F(n) = \lambda S(n)$, où S(n) est la somme des diviseurs premiers de n et λ un nombre irrationnel quelconque.

4. Conditions pour qu'une fonction de la classe $\mathcal{M}_0$ ait une valeur moyenne non nulle.

Nous allons maintenant chercher à quelles conditions une fonction de la classe $\mathcal{M}_0$ possède une valeur moyenne qui n'est pas nulle.

Cette fois, le problème est entièrement résolu par les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. - Soit $f \in \mathcal{M}_0$ et supposons que M(f) existe et soit différent de 0 . Alors :

1° La série $\sum \frac{1 - f(p)}{p}$, où les p sont rangés par ordre croissant, est convergente ;

2° On n'a pas $f(2^r) = -1$ pour tout $r \geqslant 1$.

THÉORÈME 2. - Soit $f \in \mathbb{M}_0$, et supposons que la série $\sum \frac{1 - f(p)}{p}$ soit convergente.

Alors $M(f)$ existe et est égale au produit infini

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left[1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{f(p^r)}{p^r}\right] \quad ,$$

où les p sont encore rangés par ordre croissant.

Ceci n'est nul que si l'on a $f(2^r) = -1$ pour tout $r \geq 1$.

4.1. - Pour établir le théorème 1, on part de la formule suivante, valable pour $\Re s > 1$, et déjà utilisée au paragraphe (2.2) :

$$\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left[1 + \sum_{1}^{+\infty} \frac{f(2^r)}{2^{rs}}\right] \exp\left\{- \sum_{p>2} \frac{1 - f(p)}{p^s} + \sum_{\substack{p>2 \\ r>1}} \frac{C_r^{(p)} - 1}{r p^{rs}}\right\} \quad .$$

Si $M(f)$ existe et égale α , quand s tend vers 1 par valeurs supérieures, le premier membre tend vers α .

Au second membre, le produit des 2 premiers facteurs tend vers

$$\frac{1}{2}\left[1 + \sum_{1}^{+\infty} \frac{f(2^r)}{2^r}\right] \quad .$$

Comme, pour s réel > 1 , le troisième facteur est de module au plus égal à

$$\exp\left\{\sum_{p>2} \frac{2}{p(p-2)}\right\} \quad ,$$

si $\alpha \neq 0$, on a nécessairement $1 + \sum_{1}^{+\infty} \frac{f(2^r)}{2^r} \neq 0$, c'est-à-dire que l'on n'a pas $f(2^r) = -1$ pour tout $r \geq 1$.

Alors, quand s tend vers 1 par valeurs supérieures,

$$\exp\left\{- \sum_{p>2} \frac{1 - f(p)}{p^s} + \sum_{\substack{p>2 \\ r>1}} \frac{C_r^{(p)} - 1}{r p^{rs}}\right\}$$

tend vers une limite finie non nulle.

Comme $\sum_{\substack{p>2 \\ r>1}} \frac{C_r^{(p)} - 1}{r p^{rs}}$ tend vers $\sum_{\substack{p>2 \\ r>1}} \frac{C_r^{(p)} - 1}{r p^r}$, on voit que l'expression

$$\sum_{p>2} \frac{1 - f(p)}{p^s} \quad ,$$

qui est une fonction continue de s pour s réel > 1 , tend vers une limite finie, de sorte qu'il en est de même de

$$\sum \frac{1 - f(p)}{p^s} \quad .$$

Autrement dit, quand s tend vers zéro par valeurs positives,

$$\sum \frac{1 - f(p)}{p} \cdot \frac{1}{p^s}$$

tend vers une limite finie.

Un théorème taubérien classique permet d'en déduire la convergence de la série

$$\sum \frac{1 - f(p)}{p} \quad .$$

4.1.1. - Ajoutons que, comme on le voit en passant à la limite dans l'inégalité (3) du paragraphe (2.2), et tenant compte de ce que $\frac{1 - \mathcal{R}f(2)}{2} \leqslant 1$, on a

$$\sum \frac{1 - \mathcal{R}f(p)}{p} \leqslant \log \frac{1}{|M(f)|} + 1 + \sum_{p>2} \frac{2}{p(p-2)} \quad ,$$

$$\leqslant 2 + \log \frac{1}{|M(f)|} \quad .$$

4.2. - Pour démontrer le théorème 2, on traite d'abord le cas où $f(p)$ tend vers 1 quand p tend vers $+\infty$.

On a alors, pour x infini,

$$\theta_f(x) = x + o[x] \quad ,$$

et la formule (2) donne

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f(n) = \frac{1}{\log x} \sum_{n \leqslant x} \frac{f(n)}{n} + o[1] \quad .$$

Mais la formule écrite au début du paragraphe (4.1) montre que l'expression

$$\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

tend vers une limite finie quand s tend vers 1 par valeurs supérieures, et le théorème taubérien utilisé à la fin du paragraphe (2.2) permet d'en déduire que

$$\frac{1}{\log x} \sum_{n \leqslant x} \frac{f(n)}{n}$$

tend vers la même limite quand x tend vers $+\infty$.

On voit donc que $M(f)$ existe.

4.2.1. - Le cas général se traite de la façon suivante :

La convergence de la série $\sum \frac{1 - f(p)}{p}$ entraîne évidemment celle de la série à termes réels positifs ou nuls $\sum \frac{1 - \Re f(p)}{p}$.

On peut trouver une fonction positive $\varphi(p)$ tendant vers $+\infty$ avec p, mais telle que la série

$$\sum \varphi(p) \frac{1 - \Re f(p)}{p}$$

soit encore convergente.

Soit alors E l'ensemble formé du nombre 2 et des $p > 2$ tels que

$$1 - \Re f(p) > \frac{1}{\varphi(p)} .$$

On voit que l'on a $\sum_{p \in E} \frac{1}{p} < +\infty$ car, si $p \in E$ et $p > 2$,

$$\frac{1}{p} < \varphi(p) \frac{1 - \Re f(p)}{p} .$$

Soit g la fonction multiplicative déterminée par

$$g(p^r) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in E ; \\ f(p^r) & \text{si } p \notin E . \end{cases}$$

Il est clair que $g \in \mathcal{M}_0$ et l'on voit que la série

$$\sum \frac{1 - g(p)}{p}$$

est convergente.

De plus, $g(p)$ tend vers 1 quand p tend vers $+\infty$ car on a, pour tout p,

$$1 - \mathcal{R}g(p) \leqslant \frac{1}{\varphi(p)} \quad .$$

Donc $M(g)$ existe.

On en déduit l'existence de $M(f)$ grâce au lemme suivant, qui est intéressant en lui-même :

Soient f et $g \in \mathcal{M}_0$, et supposons que

1° $\sum \frac{|f(p) - g(p)|}{p} < +\infty$;

2° $M(g)$ existe ;

3° On n'a pas $|g(2)| = 1$ et $g(2^r) = (-1)^{r+1} g(2)^r$ pour $r > 1$.

Alors $M(f)$ existe.

La démonstration de ce lemme est basée sur la remarque simple suivante :

Si l'on a

$$f(n) = \sum_{d/n} h(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right) \quad ,$$

si $M(g)$ existe, et si $\sum_1^{+\infty} \frac{|h(n)|}{n} < +\infty$, $M(f)$ existe, et est égale à

$$M(g) \sum_1^{+\infty} \frac{h(n)}{n} \quad .$$

4.2.2. - Une fois l'existence de $M(f)$ établie, on détermine sa valeur en utilisant encore une fois la formule écrite au début du paragraphe (4.1) et en faisant tendre s vers 1 par valeurs supérieures.

4.3. - Le théorème 2 peut être complété par la remarque suivante :

Si, pour chaque n, $f(n)$ est une fonction continue d'un paramètre t qui parcourt un certain ensemble contenu dans un espace topologique, et si la série $\sum \frac{1 - f(p)}{p}$ est uniformément convergente sur cet ensemble, $M(f)$ est une fonction continue de t.

5. Applications.

5.1. - Considérons maintenant une fonction arithmétique réelle f, et soit $N_f(x, u)$ le nombre des n au plus égaux à x tels que

$$f(n) \leqslant u \quad .$$

On dit que la fonction arithmétique f possède une loi de distribution s'il existe une fonction réelle σ non-décroissante sur R telle que

$$\lim_{u \to -\infty} \sigma(u) = 0 , \qquad \lim_{u \to +\infty} \sigma(u) = 1 ,$$

et que, pour chaque u pour lequel σ est continue,

$$\frac{1}{x} N_f(x , u) \text{ tend vers } \sigma(u) \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty$$

(ce qui revient à dire que l'ensemble des n tels que $f(n) \leqslant u$ possède une densité égale à $\sigma(u)$).

Si l'on pose $\frac{1}{x} N_f(x , u) = \sigma_x(u)$, il résulte d'un théorème bien connu du calcul des probabilités que, pour que ceci ait lieu, il faut et il suffit que, quand x tend vers $+\infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iut} \, d\sigma_x(u)$$

converge pour tout t réel, et que la limite $\Phi(t)$ soit une fonction continue de t .

La fonction σ est alors déterminée ([5]) par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iut} \, d\sigma(u) = \Phi(t) .$$

Il faut noter que l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iut} \, d\sigma_x(u) = \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} \exp\{it \, f(n)\} .$$

La condition est donc que, si

$$g_t(n) = \exp\{it \, f(n)\} ,$$

$M[g_t]$ existe pour tout t réel et soit une fonction continue de t .

5.2. - Notons que, si f est additive, $g_t \in \mathcal{M}_0$.

C'est pourquoi les théorèmes établis plus haut fournissent une nouvelle solution du problème - déjà résolu par ERDÖS et WINTNER ([4] et [6]) qui consiste à chercher

---

([5]) Du moins si l'on convient de ne pas distinguer deux fonctions non décroissantes qui ont les mêmes points de discontinuité et sont égales en tous leurs points de continuité.

des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction réelle additive f possède une loi de distribution.

5.2.1. - Les conditions indiquées par ERDÖS et WINTNER sont les suivantes :

Si f^* est la fonction définie par

$$f^*(n) = \begin{cases} f(n) & \text{quand } |f(n)| \leqslant 1 , \\ 1 & \text{quand } |f(n)| > 1 , \end{cases}$$

les séries

$$\sum \frac{f^*(p)}{p} \qquad \text{et} \quad \sum \frac{f^*(p)^2}{p}$$

doivent être convergentes (les p étant rangés par ordre croissant, au moins dans la première série).

On voit sans peine que ces conditions sont équivalentes aux suivantes :

Quel que soit $K > 0$, on a

$$\sum_{|f(p)|>K} \frac{1}{p} < +\infty , \qquad \sum_{|f(p)|\leqslant K} \frac{f(p)^2}{p} < +\infty$$

et la série

$$\sum_{|f(p)|\leqslant K} \frac{f(p)}{p}$$

est convergente.

On voit d'ailleurs immédiatement que, si ceci a lieu pour un $K > 0$, il en est de même pour tous.

5.2.2. - Supposons d'abord que f possède une loi de distribution.

Alors $M[g_t]$ existe pour tout t réel, et est une fonction continue de t .

Comme $M[g_0] = 1$, il existe un $K > 0$ assez grand pour que

$$|M[g_t]| \geqslant \frac{1}{2} \qquad \text{pour} \quad |t| \leqslant \frac{2}{K} .$$

D'après la remarque du paragraphe (4.1.1), ceci entraîne que, pour $|t| \leqslant \frac{2}{K}$,

$$\sum \frac{1 - \mathcal{R} g_t(p)}{p} \leqslant 2 + \log 2 ,$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad \sum \frac{1 - \cos tf(p)}{p} \leqslant 2 + \log 2 \quad .$$

Il en résulte que, pour $|t| \leqslant \frac{2}{K}$,

$$\sum_{|f(p)|>K} \frac{1 - \cos tf(p)}{p} \leqslant 2 + \log 2 \quad .$$

En intégrant sur l'intervalle $[0 , \frac{2}{K}]$ et en multipliant par $\frac{K}{2}$, on en déduit

$$\sum_{|f(p)|>K} \frac{1}{p}\left[1 - \frac{K}{2f(p)} \sin \frac{2}{K} f(p)\right] \leqslant 2 + \log 2 \quad .$$

Comme le crochet est $\geqslant \frac{1}{2}$, ceci donne

$$(5) \qquad \sum_{|f(p)|>K} \frac{1}{p} \leqslant 2(2 + \log 2) \quad .$$

D'autre part, (4) entraîne que, pour $|t| \leqslant \frac{2}{K}$,

$$\sum_{|f(p)|\leqslant K} \frac{1 - \cos tf(p)}{p} \leqslant 2 + \log 2 \quad .$$

Comme, pour $|\theta| \leqslant 2$, $1 - \cos \theta \geqslant \frac{1 - \cos 2}{4} \theta^2$, il en résulte, en prenant $t = \frac{2}{K}$, que

$$\sum_{|f(p)|\leqslant K} \frac{f(p)^2}{p} \leqslant \frac{K^2}{1 - \cos 2} [2 + \log 2] \quad .$$

Enfin, la série $\sum \frac{\sin tf(p)}{p}$ est convergente et (5) entraîne qu'il en est de même de

$$\sum_{|f(p)|\leqslant K} \frac{\sin tf(p)}{p} \quad .$$

Comme, pour $|f(p)| \leqslant K$,

$$|\sin tf(p) - tf(p)| \leqslant \frac{|tf(p)|^3}{6} \leqslant \frac{K|t|^3}{6} |f(p)|^2 \quad ,$$

on en déduit la convergence de

$$\sum_{|f(p)|\leqslant K} \frac{f(p)}{p} \quad .$$

5.2.3. - Supposons maintenant que les conditions indiquées aient lieu.

Alors on va voir que, quel que soit T positif, la série

$$\sum \frac{1 - g_t(p)}{p}$$

est uniformément convergente pour $|t| \leqslant T$, ce qui entraînera, d'après le théorème 2 et ce qui a été dit au paragraphe (4.3), que $M[g_t]$ existe pour tout t réel et est une fonction continue de t.

En effet, fixons un $K > 0$.

Comme

$$\left| \frac{1 - g_t(p)}{p} \right| \leqslant \frac{2}{p} \quad ,$$

l'expression

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ |f(p)| > K}} \frac{1 - g_t(p)}{p}$$

converge uniformément, quand x tend vers $+\infty$, vers

$$\sum_{|f(p)| > K} \frac{1 - g_t(p)}{p} \quad .$$

On a par ailleurs

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ |f(p)| \leqslant K}} \frac{1 - g_t(p)}{p} =$$

$$- it \sum_{\substack{p \leqslant x \\ |f(p)| \leqslant K}} \frac{f(p)}{p} + \sum_{\substack{p \leqslant x \\ |f(p)| \leqslant K}} \frac{1 - \cos tf(p)}{p} + i \sum_{\substack{p \leqslant x \\ |f(p)| \leqslant K}} \frac{tf(p) - \sin tf(p)}{p} .$$

Il est clair que le premier terme du second membre converge uniformément pour $|t| \leqslant T$ quand x tend vers $+\infty$, et il en est de même des deux autres parce que, quand $|f(p)| \leqslant K$ et $|t| \leqslant T$,

$$\left| \frac{1 - \cos tf(p)}{p} \right| \leqslant \frac{1}{2p} |tf(p)|^2 \leqslant \frac{T^2}{2} \cdot \frac{f(p)^2}{p}$$

et

$$\left| \frac{tf(p) - \sin tf(p)}{p} \right| \leqslant \frac{1}{6p} |tf(p)|^3 \leqslant \frac{T^3 K}{6} \cdot \frac{f(p)^2}{p} \quad .$$

5.2.4. - Il est à noter que les conditions indiquées sont satisfaites en particulier si

$$\sum \frac{|f(p)|}{p} < +\infty \quad \text{et} \quad \sum \frac{f(p)^2}{p} < +\infty \quad ,$$

par exemple si $f(p)$ est borné et

$$\sum \frac{|f(p)|}{p} < +\infty \quad .$$

5.3. - On peut noter aussi que ces résultats permettent encore de déterminer si une fonction multiplicative positive F possède une loi de distribution.

Il suffit de considérer $f(n) = \log F(n)$ au lieu de $F(n)$. En effet, pour $u \leqslant 0$, il n'y a aucun n tel que $F(n) \leqslant u$, tandis que pour $u > 0$, $F(n) \leqslant u$ équivaut à $f(n) \leqslant \log u$.

L'existence d'une loi de distribution pour F est donc équivalente à celle d'une loi de distribution pour f , et, si σ est la fonction de distribution relative à f , celle relative à F peut être prise égale à 0 pour $u < 0$ et $\sigma(\log u)$ pour $u > 0$.

Mais f est additive.

Par exemple, si φ est la fonction d'Euler ($\varphi(n)$ = nombre des entiers positifs $< n$ et premiers avec n), la fonction égale à $\frac{\varphi(n)}{n}$ est multiplicative et positive.

Si $f(n) = \log \frac{\varphi(n)}{n}$, on voit que f satisfait aux conditions indiquées plus haut et possède donc une loi de distribution.

On peut prouver que la fonction σ est continue en utilisant le théorème général d'après lequel, si

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iut}\, d\sigma(u) \quad ,$$

pour que σ soit continue partout, il faut et il suffit que, quand T tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\Phi(t)|^2\, dt \quad \text{tende vers zéro} \quad .$$

On retrouve ainsi le résultat établi par SCHOENBERG [8] en 1928, à savoir que, pour $0 < t \leqslant 1$, l'ensemble des n tels que

$$\varphi(n) \leqslant tn$$

possède une densité qui est une fonction continue de t .

On obtiendrait de même le résultat analogue établi par DAVENPORT [1] en 1933 pour la fonction égale à la somme des diviseurs de n (avec cette fois $t > 0$ au lieu de $0 < t \leq 1$).

5.3.1. - En ce qui concerne la fonction φ , on aurait pu remarquer que, quel que soit l'entier positif q , la fonction égale à $[\frac{\varphi(n)}{n}]^q$ appartient à la classe $\mathcal{M}_0$ et le théorème 2 permet de conclure que l'on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} [\frac{\varphi(n)}{n}]^q = \prod [1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}(1 - \frac{1}{p})^q] \quad .$$

Ceci permettrait aussi d'établir le résultat de Shoenberg.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DAVENPORT (Harold). - Über numeri abondantes, Sitzungsberitche der preussischen Akad. Wiss., 1933, p. 830-837.

[2] DELANGE (Hubert). - On a theorem of Erdös, Scripta Math., t. 23, 1957, p. 109-116.

[3] DELANGE (Hubert). - On some arithmetical functions, Illinois J. Math., t. 2, 1958, p. 81-87.

[4] ERDÖS (Paul). - On the density of some sequences of numbers, III., J. London math. Soc., t. 13, 1938, p. 119-127.

[5] ERDÖS (Paul). - On the distribution function of additive functions, Annals of Math., Series 2, t. 47, 1946, p. 1-20.

[6] ERDÖS (P.) and WINTNER (A.). - Additive arithmetical functions and statistical independence, Amer. J. of Math., t. 61, 1939, p. 713-721.

[7] PILLAI (S. S.). - Generalization of a theorem of Mangoldt, Proc. Indian Acad. of Sc., Section A, t. 11, 1940, p. 13-20.

[8] SCHOENBERG (I.). - Über die asymptotische Verteilung reeller Zahlen mod 1 , Math. Z., t. 28, 1928, p. 171-199.

[9] SELBERG (Sigmund). - Zur Theorie der quadratfreien Zahlen, Math. Z., t. 44, 1939, p. 306-318.