

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

JEAN-PAUL BERTRANDIAS

Distribution uniforme modulo 1

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 1 (1959-1960), exp. n° 3, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1959-1960__1__A2_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DISTRIBUTION UNIFORME MODULO 1

par Jean-Paul BERTRANDIAS

1. Notations.

On étudie la répartition modulo 1 d'une suite de nombres réels u_n , c'est-à-dire la répartition sur le segment $(0, 1)$ des parties fractionnaires $\underbrace{u_n}_{\downarrow}$ des nombres u_n .

On notera \hat{u}_n la partie entière de u_n (plus grand entier inférieur ou égal à u_n). On a donc :

$$u_n = \hat{u}_n + \underbrace{u_n}_{\downarrow} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \underbrace{u_n}_{\downarrow} < 1$$

Il sera souvent commode de représenter la suite u_n sur la circonférence $\mathcal{C}|z| = 1$ du plan complexe par la suite des nombres complexes $e^{2i\pi u_n}$. Le nombre u_n sera représenté par le point d'angle polaire $2\pi u_n$ et deux nombres égaux modulo 1 seront représentés par le même point.

On appellera intervalle (α, β) [$0 \leq \alpha < \beta \leq 1$] l'ensemble des points de l'arc orienté d'origine $2\pi\alpha$ et d'extrémité $2\pi\beta$ (l'extrémité $2\pi\beta$ n'appartenant pas à l'intervalle) et on dira donc que u_n appartient à l'intervalle (α, β) si

$$\alpha \leq \underbrace{u_n}_{\downarrow} < \beta \quad .$$

2. Définition.

Étant donné un intervalle (α, β) et un nombre entier $N > 0$, soit $N(\alpha, \beta)$ le nombre des termes de la suite u_n d'indices inférieurs ou égaux à N et appartenant à l'intervalle (α, β) .

Si quel que soit l'intervalle (α, β)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(\alpha, \beta)}{N} = \beta - \alpha$$

on dit que la suite u_n est uniformément répartie modulo 1 (u. r. mod 1).

Il est facile de voir que cette définition implique que $\underbrace{u_n}_{\downarrow}$ est dense sur $(0, 1)$.

3. Théorème fondamental (H. WEYL [8])

Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite u_n soit u. r. mod 1 est que pour toute fonction $f(x)$ intégrable au sens de Riemann sur $[0, 1]$ on ait :

$$(2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) = \int_0^1 f(x) dx \quad .$$

a. La condition est suffisante. - (2) est vérifiée pour toute fonction $f(x)$ intégrable au sens de Riemann. Elle est donc vérifiée pour la fonction caractéristique de tout intervalle (α, β) [c'est-à-dire la fonction égale à 1 si $x \in (\alpha, \beta)$ et à 0 si $x \notin (\alpha, \beta)$]. Pour cette fonction :

$$\sum_{n=1}^N f(u_n) = N(\alpha, \beta) \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(x) dx = \beta - \alpha$$

(1) est vérifiée et u_n est donc bien u. r. mod 1 .

b. La condition est nécessaire. - La suite u_n est u. r. mod 1 . D'après la définition, (2) est vérifiée pour les fonctions caractéristiques d'intervalle. (2) est vérifiée aussi pour leurs combinaisons linéaires, c'est-à-dire pour les fonctions en escalier.

Comme $f(x)$ est intégrable au sens de Riemann, on peut trouver deux suites de fonctions en escalier $g_i(x)$ et $G_i(x)$ telles que :

$$g_i(x) \leq f(x) \leq G_i(x) \quad \text{pour tout } x \quad ,$$

et

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^1 g_i(x) dx = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^1 G_i(x) dx = \int_0^1 f(x) dx \quad .$$

On peut écrire :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g_i(u_n) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N G_i(u_n)$$

donc

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g_i(u_n) &= \int_0^1 g_i(x) dx \leq \underline{\lim} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) \leq \overline{\lim} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) \leq \int_0^1 G_i(x) dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N G_i(u_n) \quad . \end{aligned}$$

Puis en faisant tendre i vers l'infini :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) = \int_0^1 f(x) dx \quad .$$

(2) est donc bien vérifiée quelle que soit la fonction $f(x)$ intégrable au sens de Riemann.

4. Critère de Weyl.

Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite u_n soit u. r. mod 1 est que :

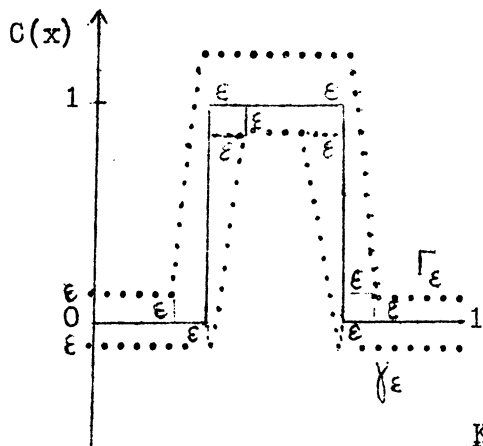
$$(3) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2i\pi k u_n} = 0$$

pour tous les entiers k différents de 0 .

a. La condition est nécessaire. - Si u_n est u. r. mod 1 , l'application du théorème fondamental aux fonctions $f(x) = e^{2i\pi k x}$ montre que (3) est bien vérifiée.

b. La condition est suffisante. - (3) est vérifiée pour tout entier $k \neq 0$. Pour un polynôme trigonométrique sans terme constant, on a donc :

$$(4) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{k=-K \\ k \neq 0}}^K a_k e^{2i\pi k u_n} = 0 \quad .$$



Considérons alors la fonction caractéristique $C(x)$ d'un intervalle (α, β) et approchons-la par les deux fonctions continues γ_ϵ et Γ_ϵ (voir la figure). Ces deux fonctions étant continues et à variation bornée, elles ont des développements en séries de Fourier uniformément convergents et il existe un entier K tel que :

$$\left| \sum_{k=-K}^K c_k e^{2i\pi k x} - \gamma_\epsilon(x) \right| < \epsilon$$

pour tout x .

$$\left| \sum_{k=-K}^K c_k e^{2i\pi k x} - \Gamma_\epsilon(x) \right| < \epsilon$$

On a donc :

On a donc :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{k=-K}^K c_k e^{2i\pi k u_n} < C(u_n) < \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{k=-K}^K c_k e^{2i\pi k u_n} .$$

Lorsque $N \rightarrow \infty$, d'après (4)

$$c_0 \leq \underline{\lim} \frac{N(\alpha, \beta)}{N} \leq \overline{\lim} \frac{N(\alpha, \beta)}{N} \leq C_0$$

Or c_0 et C_0 sont les moyennes de χ_ε et Γ_ε sur $(0, 1)$

$$\beta - \alpha - 2\varepsilon \leq \underline{\lim} \frac{N(\alpha, \beta)}{N} \leq \overline{\lim} \frac{N(\alpha, \beta)}{N} \leq \beta - \alpha + 2\varepsilon .$$

Comme on peut choisir ε arbitrairement petit,

$$\underline{\lim} \frac{N(\alpha, \beta)}{N} = \overline{\lim} \frac{N(\alpha, \beta)}{N} = \beta - \alpha ,$$

et d'après (1) la suite u_n est bien u.r. mod 1.

5. Suite des multiples $n\xi$ d'un nombre ξ .

a. ξ rationnel. - La suite $n\xi$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs qui sont les sommets d'un polygone régulier sur \mathbb{C} . La suite n'est pas dense sur $(0, 1)$; elle est régulièrement répartie mais on ne peut pas dire que la répartition soit uniforme.

b. ξ irrationnel. - La suite est alors uniformément répartie. Appliquons le critère de Weyl :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2i\pi k n \xi} = \frac{1}{N} e^{2i\pi k \xi} \frac{e^{2i\pi k N \xi} - 1}{e^{2i\pi k \xi} - 1} = \frac{1}{N} e^{i\pi k(N+1)\xi} \frac{\sin \pi N k \xi}{\sin \pi k \xi} .$$

Comme ξ est irrationnel, $\sin \pi k \xi$ n'est jamais nul pour k entier non nul, et le numérateur a un module inférieur à 1. Donc :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2i\pi k n \xi} = 0 .$$

Le critère de Weyl indique donc que la suite $n\xi$ est u. r. mod 1 lorsque ξ est irrationnel.

Nous n'étudierons maintenant que des suites $u_n = \varphi(x)$ définies par les valeurs aux points d'abscisses entières d'une fonction $\varphi(x)$ à croissance régulière.

6. Fonctions à croissance plus lente que ξn .

(Exemples : $u_n = \sqrt{n}$, $u_n = \log n$). Dans chaque intervalle (α, β) , il y

aura de plus en plus de points de la suite d'indices consécutifs. On pourra souvent avoir facilement un ordre de grandeur du nombre de ces points, c'est-à-dire sa partie principale en fonction de n , et on pourra savoir alors **assez facilement** si w_n est u. r. mod 1 ou non en utilisant uniquement la définition.

a. EXEMPLE 1. - $u_n = \sqrt{n}$.

Les indices des points de la suite situés dans l'intervalle $(0, \beta)$ sont donnés par les inégalités :

$$k \leq \sqrt{n} < k + \beta \quad (k \text{ entier} = 1, 2, \dots)$$

ou

$$k^2 \leq n < (k + \beta)^2$$

Dans chaque segment $(k, k + \beta)$ il y a donc

$$\widehat{(k + \beta)^2 - k^2} + 1 = (k + \beta)^2 + O(1) = 2\beta k + O(1)$$

points de la suite. On a donc :

$$N(0, \beta) = \sum_{k=1}^K 2\beta k + O(1) + \begin{cases} N - K^2 & \text{si } K^2 \leq N < (K + \beta)^2 \\ (K + \beta)^2 - K^2 & \text{si } (K + \beta) \leq N < (K + 1)^2 \end{cases}$$

$$N(0, \beta) = 2\beta \frac{K(K+1)}{2} + O(K)$$

Or $K^2 \leq N < (K+1)^2 = K^2 + 2K + 1$ donc $N = K^2 + O(K)$. D'où :

$$\frac{N(0, \beta)}{N} = \frac{\beta K(K+1) + O(K)}{K^2 + O(K)} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} \beta$$

Il est facile de voir que cela entraîne bien :

$$\frac{N(\alpha, \beta)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \beta - \alpha$$

quel que soit l'intervalle (α, β) . La suite \sqrt{n} est donc u. r. mod 1.

Cette démonstration peut se généraliser facilement au cas $u_n = n^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$).

b. EXEMPLE 2. - $u_n = \log n$.

On utilise la même méthode :

$$k \leq \log n < k + \beta$$

$$\widehat{e^k} \leq n < \widehat{e^{k+\beta}}$$

$$N(0, \beta) = \sum_{k=1}^K [e^k(e^\beta - 1) + O(1)] + \begin{cases} N - e^K \\ e^K(e^\beta - 1) \end{cases}$$

Choisissons alors deux suites de nombres N :

$$N_1 = e^{\widehat{K}} \quad \text{et} \quad N_2 = e^{\widehat{K} e^\beta} \quad (K = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\frac{N_1(0, \beta)}{N_1} = [(e^\beta - 1) \frac{e^{K+1} - e}{e - 1} + o(K)] \frac{1}{e^K + o(1)} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} (e^\beta - 1) \frac{e}{e - 1} = \ell$$

$$\begin{aligned} \frac{N_2(0, \beta)}{N_2} &= [(e^\beta - 1) \frac{e^{K+2} - e}{e - 1} + o(K)] \frac{1}{e^K e^\beta + o(1)} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} (e^\beta - 1) \frac{e^2}{(e - 1)e^\beta} \\ &= \ell e^{1-\beta} \end{aligned}$$

Si β est différent de 1, ces deux limites sont différentes et :

$$\underline{\lim} \frac{N(0, \beta)}{N} \leq \ell < \ell e^{1-\beta} \leq \overline{\lim} \frac{N(0, \beta)}{N} \quad .$$

La suite $u_n = \log n$ n'est donc certainement pas u. r. mod 1.

Ces démonstrations n'utilisent pas le théorème ou le critère de Weyl. D'ailleurs avant H. WEYL, FEJER ([5], p. 237) avait démontré le théorème général suivant, un des premiers connus sur la répartition uniforme modulo 1 :

THÉOREME. - Si $\varphi(x)$ est une fonction continue, monotone, dérivable sur $(1, \infty)$ si $\varphi'(x)$ est monotone et tend vers zéro, et si $x \varphi'(x)$ tend vers l'infini lorsque x augmente, alors $\varphi(x)$ est u. r. mod 1.

7. Fonctions à croissance polynômiale.

La répartition mod 1 des fonctions à croissance polynômiale est encore assez bien connue. Pour l'étudier on peut utiliser la méthode suivante (J. BASS [1]) :

La formule (3) peut être considérée comme exprimant que les moyennes $\mathcal{M}_F^k(t)$ des puissances entières de la fonction :

$$F(t) = e^{2i\pi \widehat{\varphi}(t)}$$

sont nulles. Cette fonction est définie pour tout $t \geq 1$ et est constante dans chaque intervalle $[\widehat{t}, \widehat{t} + 1[$.

Le critère de Weyl s'exprime alors de la façon suivante : pour que $\varphi(x)$ soit u. r. mod 1, il faut et il suffit que les fonctions $F^k(t)$ aient une moyenne nulle quel que soit k entier non nul.

Pour étudier les fonctions $F^k(t)$, on peut introduire leurs "fonctions de

corrélation" :

$$\Gamma_k(h) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F^k(t+h) \overline{F^k(t)} dt \quad .$$

a. Allure de $\Gamma_k(h)$.

$$\Gamma_k(h) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_n^{n+1} e^{2i\pi k[\psi(\widehat{t+h}) - \psi(\widehat{t})]} dt \quad .$$

Si on pose $t = n + \zeta$, $\widehat{t+h} = \begin{cases} n + \widehat{h} & \text{si } \zeta < 1 - h \\ n + \widehat{h} + 1 & \text{si } \zeta \geq 1 - h \end{cases}$

$$\Gamma_k(h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^{1-h} e^{2i\pi k[\psi(n+\widehat{h}) - \psi(n)]} d\zeta \\ & + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{1-h}^1 e^{2i\pi k[\psi(n+\widehat{h}+1) - \psi(n)]} d\zeta \end{aligned} \right.$$

$$= (1-h) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi k[\psi(n+\widehat{h}) - \psi(n)]}$$

$$+ h \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi k[\psi(n+\widehat{h}+1) - \psi(n)]} \quad .$$

Si les deux limites de cette égalité existent, on obtient :

$$\Gamma_k(h) = (1-h) \Gamma_k(\widehat{h}) + h \Gamma_k(\widehat{h}+1) \quad .$$

Donc si $\Gamma_k(h)$ existe pour les valeurs de h entières, elle est une fonction continue de h, et elle est linéaire entre les points d'abscisse entière.

b. Relation entre les moyennes de $F^k(t)$ et $\Gamma_k(h)$

En appliquant l'inégalité de Schwartz

$$\left| \int_0^T h(t) g(t) dt \right|^2 \leq \int_0^T |h(t)|^2 dt \int_0^T |g(t)|^2 dt$$

aux fonctions

$$h(t) = 1 \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{1}{A} \int_0^A F^k(t+h) dh \quad ,$$

on obtient :

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{A} \int_0^A F^k(t+h) dh \right|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{A} \int_0^A F^k(t+h_1) dh_1 \frac{1}{A} \int_0^A \overline{F^k(t+h_2)} dh_2$$

et en prenant les limites lorsque T augmente indéfiniment :

$$(5) \quad |\mathfrak{M}F^k(t)|^2 \leq \frac{1}{A^2} \int_0^A \int_0^A \Gamma_k(h_2 - h_1) dh_2 dh_1 \quad .$$

En faisant le changement de variable $h_2 - h_1 = \lambda$, $h_2 + h_1 = \mu$, le second membre de (5) s'écrit :

$$I_A = \frac{1}{A^2} \int_0^A d\mu \int_{-\mu}^{+\mu} \Gamma_k(\lambda) d\lambda \quad .$$

Si $\Gamma_k(h)$ a une moyenne $\mathfrak{M}\Gamma_k(h)$, on a :

$$|I_A - \mathfrak{M}\Gamma_k(h)| \leq \frac{1}{A^2} \int_0^A 2|\mu| d\mu \left| \frac{1}{2\mu} \int_{-\mu}^{+\mu} \Gamma_k(\lambda) d\lambda - \mathfrak{M}\Gamma_k(h) \right| \quad .$$

Étant donné $\varepsilon > 0$ on peut alors choisir H tel que

$$\left| \frac{1}{2\mu} \int_{-\mu}^{+\mu} \Gamma_k(\lambda) d\lambda - \mathfrak{M}\Gamma_k(h) \right| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad \mu > H$$

et alors pour $A^2 > \varepsilon H^2$ on a :

$$|I - \mathfrak{M}\Gamma_k(h)| < 2\varepsilon \quad .$$

Donc $\lim_{A \rightarrow \infty} I_A = \mathfrak{M}\Gamma_k$ et l'inégalité (5) devient

$$(6) \quad \boxed{|\mathfrak{M}F^k(t)|^2 \leq \mathfrak{M}\Gamma_k(h)}$$

c. Application : conditions suffisantes pour que $\varphi(x)$ soit u. r. mod 1 . Si toutes les moyennes $\mathfrak{M}\Gamma_k(h)$ sont nulles, les moyennes $\mathfrak{M}F^k(t)$ sont toutes nulles et $\varphi(x)$ est u. r. mod 1 .

En particulier : si $\Gamma_k(h) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow \infty$ (ou bien est nulle si $h \geq H$) quel que soit k entier $\neq 0$, $\varphi(x)$ est u. r. mod 1 .

Si on remarque que $\Gamma_k(\hat{h})$ est la moyenne de $e^{2i\pi k[\varphi(\hat{t}+\hat{h})-\varphi(\hat{t})]}$ et si on suppose que $\Gamma_k(\hat{h}) = 0$ pour tous les entiers k et $\hat{h} \neq 0$, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME de VAN DEN CORPUT [7]. -- Une condition suffisante pour que $\varphi(x)$ soit u. r. mod 1 est que toutes les suites $\varphi(x+p) - \varphi(x)$ (p entier > 0) soient u. r. mod 1.

Ces conditions ne peuvent être que suffisantes. Un contre-exemple évident est la suite des multiples d'un nombre irrationnel.

d. Répartition modulo 1 des polynômes.

On appellera polynôme de Weyl un polynôme de la forme :

$$\varphi(x) = An^{\nu} + A_1 n^{\nu-1} + \dots + A_{\nu}$$

où A est irrationnel et $\nu \geq 1$.

Pour montrer que la suite $P(x)$ est un u. r. mod 1, raisonnons par récurrence sur ν : si $\nu \geq 2$, $P(x+p) - P(x)$ est un polynôme de degré $\nu - 1$ dont le terme de plus haut degré est $p^{\nu} An^{\nu-1}$ qui a lui aussi un coefficient irrationnel quel que soit p entier > 0 . Si donc on suppose qu'un polynôme de Weyl de degré $\nu - 1$ est u. r. mod 1, le théorème de Van den Corput montre que tout polynôme de Weyl de degré ν est u. r. mod 1. Comme pour $\nu = 1$ la propriété est vraie, elle est vraie quel que soit ν .

On peut étendre facilement ce résultat au cas où c'est un coefficient autre que celui du terme du plus haut degré qui est irrationnel. On pose :

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x)$$

$$P_1(x) = An^{\nu} + \dots + A_{\nu-k-1} n^{k+1}$$

$A, A_1, \dots, A_{\nu-k-1}$ étant des nombres rationnels de dénominateur commun q .

$$P_2(x) = A_{\nu-k} n^k + \dots + A_{\nu}$$

étant un polynôme de Weyl. On a :

$$F^k(t) = e^{2i\pi k P_1(\hat{t})} e^{2i\pi k P_2(\hat{t})}$$

Si on pose $n = rq + s$ et $N = Rq + S$ ($0 \leq s < q$)

$$\mathcal{M}_F^k(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\sum_{r=0}^{q-1} e^{2i\pi k P_1\left(\frac{s}{q}\right)} \sum_{r=0}^{R-1} e^{2i\pi k P_2(rq+s)} + o(S) \right]$$

Comme S est borné par q , on a :

$$\mathcal{M}_F^k(t) = \frac{1}{q} \sum_{s=0}^{q-1} e^{2i\pi k P_1 \left(\frac{s}{q}\right)} \left[\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \sum_{r=0}^{R-1} e^{2i\pi k P(rq+s)} \right] .$$

$P_2(rq + s)$ étant un polynôme de Weyl en r , la limite intervenant est nulle quels que soient s et k . Donc $\mathcal{M}_F^k(t) = 0$ et par suite d'après le critère de Weyl :

Si un polynôme $P(x)$ a au moins un coefficient (autre que le terme constant) irrationnel, la suite $P(x)$ est u. r. mod 1.

Si $P(x)$ n'a pas de coefficient irrationnel, la suite $P(x)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs et ne peut évidemment pas être u. r. mod 1.

8. Fonctions à croissance rapide.

On n'a plus beaucoup de résultats sur les fonctions qui croissent plus vite que les polynômes : les résultats connus se présentent sous forme de théorèmes "vrais presque partout" mais on ne connaît pas explicitement de suites $\varphi(x)$ à croissance rapide qui soient u. r. mod 1. Nous démontrerons ici à titre d'exemple un théorème sur les fonctions à croissance exponentielle dû à KOKSMA [3].

THÉORÈME de KOKSMA. - La suite $\varphi(x) = \theta^n$ est uniformément répartie modulo 1 pour presque tout $\theta > 1$.

C'est-à-dire que si on considère les nombres θ appartenant à l'intervalle $[(\lambda, \mu)]$ ($\mu > \lambda > 1$), l'ensemble des nombres θ tels que θ^n ne soit pas u. r. mod 1 est de mesure nulle. Considérons l'intégrale :

$$I_N = \int_{\lambda}^{\mu} |\sigma_N(\theta)|^2 d\theta$$

où

$$\sigma_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2i\pi k \theta^n}$$

et montrons que $|\sigma_N|^2 \rightarrow 0$ pour presque tous les $\theta \in [(\lambda, \mu)]$.

Pour cela nous nous servons d'un théorème de la théorie de la mesure déduit du lemme de FATOU [2].

THÉORÈME de FATOU. - Étant donnée une suite de fonctions $U_i(x)$ positives mesurables, si la série de terme général

$$I_i = \int_{\lambda}^{\mu} U_i(t) dt$$

est convergente, la série de terme général $U_i(x)$ converge presque partout sur (λ, μ) et par suite $U_i(x)$ tend vers 0 presque partout.

$$I_N = \int_{\lambda}^{\mu} \frac{1}{N^2} \left(\sum_{p=1}^N e^{2i\pi k \theta^p} \right) \cdot \left(\sum_{q=1}^N e^{-2i\pi k \theta^q} \right) d\theta \quad .$$

Les termes $p = q$ donnent une participation $\frac{\mu - \lambda}{N}$ et les termes $p \neq q$ se groupent :

$$I_N = \frac{\mu - \lambda}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{q=1}^N \sum_{p>q} \int_{\lambda}^{\mu} \cos 2\pi k(\theta^p - \theta^q) d\theta \quad .$$

L'intégrale s'écrit :

$$J = \int_{\lambda}^{\mu} \frac{d[\sin 2\pi k(\theta^p - \theta^q)]}{2\pi k(p\theta^{p-1} - q\theta^{q-1})} d\theta$$

et on peut lui appliquer le second théorème de la moyenne car la fonction

$$\psi(\theta) = \frac{1}{2\pi k(p\theta^{p-1} - q\theta^{q-1})}$$

est une fonction de θ positive et décroissante.

$$J = \psi(\lambda) \int_{\lambda}^{\mu} d(\sin 2\pi k(\theta^p - \theta^q))$$

Comme $\psi(\lambda) < \psi(0) = \frac{1}{2\pi(k)(p-q)}$ et comme l'intégrale a une valeur absolue certainement inférieure ou égale à 2 ,

$$|J| < \frac{1}{\pi |k| (p-q)} < \frac{1}{p-q} \quad .$$

On a :

$$\left| \sum_{p>q} \frac{1}{p \dots q} \right| \leq \sum_{p>q} \frac{1}{p \dots q} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N-q} < \log N$$

et

$$\frac{1}{N^2} \sum_{q=1}^N \log N < \frac{N \log N}{N^2} = \frac{\log N}{N} \quad .$$

Donc :

$$I_N = \frac{\mu - \lambda}{N} + o\left(\frac{\log N}{N}\right) \quad .$$

Si on prend alors $N = m^2$, la série $\sum_{m=1}^{\infty} I_{m^2}$ est convergente et d'après le théorème de Fatou $\sigma_m^2(\theta)$ tend vers 0 presque partout. Il me reste plus alors qu'à montrer que pour une valeur de θ telle que $\sigma_m^2(\theta)$ tende vers 0 , $\sigma_N(\theta)$ tend

