

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

MICHÈLE CAPON

Sous-espaces complémentés de $L^p[0, 1]$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, n° 2 (1977-1978), exp. n° 16, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A1_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOUS-ESPACES COMPLÉMENTÉS DE $L^p(0, 1)$

par Michèle CAPON

Résumé. - Nous allons étudier les principales propriétés des sous-espaces complémentés de $L^p(0, 1)$. Pour $1 < p < \infty$, cette notion est intimement liée à celle des $\mathcal{E}_p$ -espaces que nous étudierons d'abord.

1. Les espaces $\mathcal{E}_p$. Définition et propriétés.

Ces espaces ont été introduits par LINDENSTRAUSS et PELCZYŃSKI dans [12].

Définition. - Soient X un Banach, et $1 \leq p \leq +\infty$. X est un $\mathcal{E}_p$ -espace s'il existe un réel $\lambda \geq 1$ tel que, pour tout sous-espace de dimension finie F de X , il existe un sous-espace de dimension finie E de X , contenant F , et tel que $d(E, \ell_p^{\dim E}) \leq \lambda$.

Rappelons que la distance de deux espaces de Banach U et V est

$$d(U, V) = \inf\{\|T\| \|T^{-1}\|; T \text{ isomorphisme entre } U \text{ et } V\}.$$

Comme exemple, nous citerons les espaces $L^p(\mu)$ qui sont des $\mathcal{E}_{p, 1+\varepsilon}$, pour tout $\varepsilon > 0$, et les espaces $\mathcal{C}(K)$ qui sont $\mathcal{E}_{\infty, 1+\varepsilon}$.

Nous allons maintenant énoncer les principales propriétés des $\mathcal{E}_p$ -espaces, et voir ainsi le lien avec les sous-espaces complémentés de $L^p(0, 1)$.

PROPOSITION. - Si X est un $\mathcal{E}_p$ -espace, alors X'' est isomorphe à un sous-espace complémenté d'un $L^p(\mu)$.

Cette proposition est démontrée dans [12]. Nous allons en donner une démonstration par la méthode des ultraproducts qui sont très utiles lorsqu'il s'agit d'étudier des propriétés locales.

On considère la famille $\mathfrak{F}$ des sous-espaces de dimension finie B de X qui sont isomorphes à un ℓ_p^n et $d(B, \ell_p^n) \leq \lambda$.

Pour chacun d'eux, on peut trouver un isomorphisme φ_B de B sur $\ell_p^{\dim B}$ tel que

$$\|x\| \leq \|\varphi_B x\| \leq \lambda \|x\|.$$

La famille $\mathfrak{F}$ est filtrante croissante, et la réunion de ses éléments est X . On prend alors un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\mathfrak{F}$, plus fin que le filtre des sections, et l'ultraproduit est défini comme le quotient de $(\bigoplus_{B \in \mathfrak{F}} B)_{\ell_\infty}$ par la relation d'équivalence

$$(x_B) \sim (y_B) \iff \lim_{B \in \mathcal{U}} \|x_B - y_B\| = 0.$$

On le note $(\bigoplus_{B \in \mathfrak{F}} B)_{\ell_\infty} / \mathcal{U}$ et la norme sur cet espace de Banach est définie par $\|(x_B)\| = \lim_{B \in \mathcal{U}} \|x_B\|$.

On définit de même l'ultraproduit $(\bigoplus_B \ell_p^{\dim B})_{\mathcal{U}} / \mathcal{U}$, et on voit facilement que l'on peut définir sur ce dernier une relation d'ordre en posant

$x \geq 0 \iff$ il existe un représentant (x_B) avec $x_B \geq 0$, pour tout B .

Cette relation vérifie la propriété suivante

$$x \wedge y = 0 \implies \|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p.$$

Cette dernière propriété caractérise les espaces isométriques à $L^p(\mu)$ ($p < \infty$). D'autre part, la famille des isomorphismes (φ_B) introduit un isomorphisme entre $(\bigoplus B)_{\mathcal{U}} / \mathcal{U}$ et $(\bigoplus \ell_p^{\dim B})_{\mathcal{U}} / \mathcal{U} = L^p(\mu)$.

Comme X se plonge de manière évidente dans $(\bigoplus B)_{\mathcal{U}} / \mathcal{U}$ par l'isométrie

$$j(x) = \text{classe de } (x_B) \text{ avec } \begin{cases} x_B = x, & \text{si } x \in B \\ x_B = 0, & \text{si } x \notin B \end{cases}.$$

On obtient donc un plongement de X dans un espace $L^p(\mu)$. Ceci nous montre déjà que, si $1 < p < \infty$, X est réflexif.

Soit X_1 le sous-espace de $(\bigoplus \ell_p^{\dim B})_{\mathcal{U}} / \mathcal{U} = L^p(\mu)$ qui est isomorphe à X : On définit une application Q de $L^p(\mu)$ dans X_1'' en posant

$$Q[\text{classe de } (x_B)] = \lim_{B \in \mathcal{U}} x_B,$$

la limite étant au sens faible $(\sigma(X_1'', X_1'))$. Il est clair que $Q \circ j = \text{id}_{X_1}$.

$$\begin{array}{ccc} (\bigoplus B)_{\mathcal{U}} / \mathcal{U} & \xrightarrow{\varphi} & L^p(\mu) \\ \uparrow j & & \uparrow j \\ X & \xrightarrow{\varphi|_X} & X_1 \end{array}$$

1er cas: $1 < p < \infty$. - Alors $X_1'' = X_1$, et l'application $j \circ Q$ est une projection de $L^p(\mu)$ sur $j(X_1)$ qui est isomorphe à X .

2e cas: $p = 1$. - En prenant les transposées de j et Q , on obtient le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{j} & L^1(\mu) & \xrightarrow{Q} & X_1'' \\ X_1' \subset X_1''' & \xrightarrow{Q^*} & L^\infty(\mu) & \xrightarrow{j^*} & X_1' \end{array}$$

Il est facile de voir que $j^* \circ Q^*|_{X_1'} = \text{id}_{X_1'}$, et par suite $Q^*|_{X_1'} \circ j^*$ est une projection de $L^\infty(\mu)$ sur un espace isomorphe à X_1' . C'est donc que X_1'' est isomorphe à un sous-espace complété du dual de $L^\infty(\mu)$ qui est lui-même un espace $L^1(\nu)$.

Il nous reste à étudier le cas où $p = +\infty$. La proposition 1 sera vérifiée si on démontre que X'' est un espace injectif. D'après LINDENSTRAUSS [10], il suffit pour cela de montrer que, pour tout Banach Z contenant X , on peut plonger l'injection canonique de X dans X'' en un opérateur de norme bornée (indépendamment de Z).

$$\begin{array}{ccc} Z & & T \\ \cup & \searrow & \\ X & \xrightarrow{i} & X'' \end{array}$$

Soit F un sous-espace de dimension finie de Z . $F \cap X$ est contenue dans un sous-espace E de X avec

$$d(E, \mathcal{L}_\infty^{\dim E}) \leq \lambda.$$

On peut donc trouver un opérateur i_F avec

$$\|i_F\| \leq \lambda, \quad i_F|_{F \cap X} = \text{id}$$

$$\begin{array}{ccc} F & & \\ \cup & \searrow i_F & \\ F \cap X \subset E & \approx_\lambda & \mathcal{L}_\infty^{\dim E} \end{array}$$

Posons, alors,

$$\begin{cases} T_F(x) = i_F(x), & \text{si } x \in F \\ = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur la famille filtrante croissante des sous-espaces de dimension finie de Z . On posera

$$T(x) = \lim_{x \in \mathcal{U}} T_F(x), \text{ limite pour } \sigma(X'', X').$$

Il est clair que T répond à la question.

C. Q. F. D.

Une conséquence facile de cette proposition est la proposition suivante.

PROPOSITION 2. - Les espaces $\mathcal{E}_2$ sont exactement ceux qui sont isomorphes à des espaces de Hilbert.

Remarquons aussi que, dans la proposition 1, si X est séparable et $1 < p < \infty$, alors on peut prendre pour $L^p(\mu)$ l'espace $L^p(0, 1]$ lui-même.

LINDENSTRAUSS et ROSENTHAL ont montré dans [11] une réciproque à la proposition 1.

PROPOSITION 3. - Tout sous-espace complété d'un espace $L^p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, est soit un espace $\mathcal{E}_p$, soit un espace $\mathcal{E}_2$.

Pour $1 < p < \infty$, on peut maintenant caractériser les $\mathcal{E}_p$ -espaces. X est un $\mathcal{E}_p$ -espace (resp. $\mathcal{E}_p$ -espace séparable) ou un $\mathcal{E}_2$ -espace (resp. $\mathcal{E}_2$ -espace séparable) si, et seulement si, X est isomorphe à un sous-espace complété d'un $L^p(\mu)$ (resp. de $L^p(0, 1]$).

On pourra trouver dans l'étude de LINDENSTRAUSS et ROSENTHAL des propriétés supplémentaires très intéressantes des $\mathcal{E}_p$ -espaces. Citons, par exemple, les propriétés suivantes.

PROPOSITION 4. - Tout sous-espace complété d'un $\mathcal{E}_p$ -espace est, soit $\mathcal{E}_p$, soit $\mathcal{E}_2$.

PROPOSITION 5. - Le dual d'un espace $\mathcal{E}_p$ est un espace $\mathcal{E}_q$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) .

Nous allons maintenant étudier de manière plus précise les sous-espaces complémentés de $L^p(0, 1)$, $1 < p < \infty$.

2. Sous-espaces complémentés de $L^p(0, 1)$, $1 < p < \infty$.

L'étude précédente montre que ces espaces sont, soit isomorphes à $\mathcal{L}_2$, soit des $\mathcal{E}_p$ -espaces séparables. L'étude de LINDENSTRAUSS et PELCZYŃSKI [12] ne permettait d'exhiber qu'un nombre fini de tels espaces (à un isomorphisme près), à savoir L^p , $\mathcal{L}_p$, $\mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_p$ et $(\bigoplus \mathcal{L}_2)_{\mathcal{L}_p}$. ROSENTHAL a montré dans [15] que l'espace X_p engendré dans $L^p(0, 1)$ par une suite de variables aléatoires symétriques, indépendantes, ne prenant que trois valeurs, n'est isomorphe à aucun des espaces cités plus haut et est un $\mathcal{E}_p$ -espace. A partir de cet espace X_p , SCHECHTMAN a montré dans [16] que l'on peut construire une suite de $\mathcal{E}_p$ -espaces séparables, deux à deux non isomorphes entre eux. En effet, il a montré que l'espace $X_p^{(\times)n} \subset L^p(0, 1)^n$ ne peut contenir aucun isomorphe à $\mathcal{L}_{p_1} \otimes \mathcal{L}_{p_2} \dots \otimes \mathcal{L}_{p_n}$ si $p < p_1 < p_2 \dots < p_n < 2$. Par contre, l'espace $X_p^{(\times)2n}$ contient toujours un tel espace. On voit alors que la suite $X_p^{(\times)2^k}$ est donc une suite de $\mathcal{E}_p$ -espaces séparables et deux à deux non isomorphes entre eux.

Tous les $\mathcal{E}_p$ -espaces séparables que nous connaissons possèdent des bases inconditionnelles. On ne sait pas si cette propriété est générale. ZIPPIN, JOHNSON et ROSENTHAL ont étudié dans [5], les structures des $\mathcal{E}_p$ -espaces séparables, et ont obtenu les deux résultats suivants.

THÉOREME 1. - Les $\mathcal{E}_p$ -espaces séparables, $1 < p < \infty$, possèdent une base.

THÉOREME 2. - Soit X un $\mathcal{E}_p$ -espace, $1 < p < \infty$, tel que X' soit séparable, alors X possède une "shrinking f. d. d.". C'est-à-dire qu'il existe une suite X_n de sous-espaces de dimension finie de X telle que tout élément x s'écrive de manière unique $x = \sum_n P_n x$, $P_n x \in E_n$, et P_n étant une projection de X sur X_n , les espaces $P_n^*(X^*)$ engendrent X^* .

Le théorème 2 s'applique en particulier aux $\mathcal{E}_p$ -espaces séparables, $1 < p < \infty$, et il a permis à JOHNSON et ZIPPIN dans [6] de caractériser les $\mathcal{E}_p$ -espaces qui se plongent dans $\mathcal{L}_p$.

THÉOREME 3. - Tout $\mathcal{E}_p$ -espace qui se plonge dans $\mathcal{L}_p$ est isomorphe à $\mathcal{L}_p$.

L'étude des sous-espaces de $L^p(0, 1)$ qui se plongent dans $\mathcal{L}_p$ a été faite par JOHNSON et ODELL, pour $p > 2$. Ils ont démontré dans [4] que tout sous-espace de $L^p(0, 1)$, $p > 2$, qui ne contient aucun isomorphe à $\mathcal{L}_2$ est plongeable dans $\mathcal{L}_p$. Ce résultat, joint au théorème 3, montre que, pour $p > 2$, un $\mathcal{E}_p$ -espace séparable qui ne contient aucun isomorphe à $\mathcal{L}_2$ est isomorphe à $\mathcal{L}_p$. Pour $2 > p$, on utilise alors un résultat supplémentaire démontré par PELCZYŃSKI et ROSENTHAL

dans [14].

PROPOSITION 6. - Si un sous-espace de $L^p(0, 1)$ contient un isomorphe à ℓ_2 , alors il contient un sous-espace complémenté isomorphe à ℓ_2 .

En appliquant ce résultat au dual X' de X , on voit que, si X ne contient aucun isomorphe à ℓ_2 , alors X' n'en contient pas non plus (car X est réflexif). De plus, si X est un $\mathcal{E}_p$ -espace, alors X' est un $\mathcal{E}_q$ -espace, et $q > 2$. Donc, d'après ce qui précède, X' est isomorphe à ℓ_q , et par conséquent X est isomorphe à ℓ_p . On peut donc énoncer le résultat suivant.

THÉOREME 4. - Tout sous-espace complémenté de $L^p(0, 1)$, $1 < p < \infty$, qui ne contient aucun isomorphe à ℓ_2 est isomorphe à ℓ_p .

Signalons encore une dernière propriété des sous-espaces complémentés de $L^p(0, 1)$ démontrée par KADEC et PELCZYŃSKI dans [7].

THÉOREME 5. - Soit X un sous-espace complémenté de $L^p(0, 1)$
 1° ou bien X est isomorphe à ℓ_2
 2° ou bien X contient un sous-espace isomorphe à ℓ_p et complémenté dans X .

Ayant étudié les sous-espaces complémentés de $L^p(0, 1)$, il est naturel de se demander quels sont les espaces X qui sont plongeables dans $L^p(0, 1)$ et Y sont toujours complémentés. La réponse à ce problème est maintenant totale et donnée par le résultat suivant.

THÉOREME 6. - La classe est vide, si $p < 2$.
La classe est réduite aux espaces de Hilbert pour $p \geq 2$.

Il est clair en effet que, si tout plongement de X dans $L^p(0, 1)$ est complémenté dans $L^p(0, 1)$, alors X est, soit isomorphe à ℓ_2 , soit un $\mathcal{E}_p$ -espace séparable. On sait, d'après le travail de KADEC et PELCZYŃSKI [7], que, pour $p \geq 2$, tout isomorphe à ℓ_2 est complémenté dans $L^p(0, 1)$. Par contre, le résultat récent de BENNET, DOR, GOODMAN, JOHNSON et NEWMAN [2] montre que ceci est faux pour $1 < p < 2$.

Il est facile de voir que si X est dans la classe étudiée, alors tout sous-espace complémenté de X Y est aussi. Par conséquent, la classe ne peut contenir un $\mathcal{E}_p$ -espace que si elle contient déjà ℓ_p . Or, on sait qu'il existe dans L^p des sous-espaces isomorphes à ℓ_p et non complémentés. Ce résultat est dû à ROSENTHAL [15] pour $p > 2$, et à BENNET, DOR, GOODMAN, JOHNSON et NEWMAN [2] pour $p < 2$.

On peut toutefois se demander si, dans L^p , un sous-espace suffisamment proche de L^p n'est pas complémenté dans L^p .

Problème. - Existe-t-il une constante λ_p telle que, si X est un sous-espace de L^p qui vérifie $d(X, L^p) \leq \lambda_p$, alors X est complémenté dans L^p ?

Signalons pour conclure que L^p est un espace primaire pour $1 \leq p < \infty$ [1].

Nous allons maintenant étudier les sous-espaces complémentés de $L^1(0, 1)$, mais cette étude ne se ramène pas aux $\mathcal{E}_1$ -espaces séparables.

3. Sous-espaces complémentés de $L^1(0, 1)$.

Nous avons déjà vu que tout sous-espace complémenté de $L^1(0, 1)$ est un $\mathcal{E}_1$ -espace, mais la réciproque est fausse. LINDENSTRAUSS a construit un contre-exemple dans [9].

Jusqu'à présent on ne connaît que deux types d'isomorphismes pour les sous-espaces complémentés de L^1 , à savoir L^1 et $\mathcal{L}_1$.

Signalons deux propriétés très intéressantes de ces sous-espaces.

PROPOSITION 7. - Tout sous-espace complémenté de L^1 contient un sous-espace complémenté isomorphe à $\mathcal{L}_1$.

En effet, un tel espace ne peut être réflexif puisque son dual est un espace injectif. La proposition résulte alors du travail de KADEC et PELCZYŃSKI [7].

PROPOSITION 8. - Tout sous-espace complémenté de L^1 qui possède la propriété de Radon-Nybdim est isomorphe à $\mathcal{L}_1$.

Ce résultat est dû à LEWIS et STEGALL [8].

Comme au paragraphe précédent, on peut se demander quelle est la classe des Banach X telle que tout plongement de X dans L^1 soit complémenté dans L^1 . En utilisant la proposition 7 et la même remarque que pour L^p , on voit que si la classe n'est pas vide elle contient nécessairement $\mathcal{L}_1$. Le problème pour $\mathcal{L}_1$ se ramène facilement à la question suivante : "Est-ce-que tout plongement de $\mathcal{L}_1$ dans lui-même est complémenté dans $\mathcal{L}_1$?".

En liaison avec ce problème, signalons le résultat de DOR [3] qui donne une réponse partielle.

PROPOSITION 9. - Il existe une constante $\lambda \geq 4/3$ telle que, si X est un sous-espace de L^1 vérifiant $d(X, L^1) \leq \lambda$, alors X est complémenté dans L^1 .

Le problème est donc d'augmenter cette constante λ , éventuellement jusqu'à l'infini.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALSPACH (D.), ENFLO (P.) and ODELL (E.). - On the structure of $\mathcal{E}_p$ -spaces ($1 < p < \infty$), Studia Math., Warszawa, t. 60, 1977, p. 79-90.
- [2] BENNET (G.), DOR (L. E.), GOODMAN (V.), JOHNSON (W. B.) and NEWMAN (C. M.). - On uncomplemented subspaces of L_p , $1 < p < 2$, Israel J. Math., t. 26, 1977, p. 178-187.

- [3] DOR (L. E.). - On projections on L_1 , Annals of Math., Series 2, t. 102, 1975, p. 463-474.
- [4] JOHNSON (W. B.) and ODELL (E.). - Subspaces of L_p which imbed into ℓ_p , Compositio Math., Groningen, t. 28, 1974, p. 37-49.
- [5] JOHNSON (W. B.), ROSENTHAL (H. P.) and ZIPPIN (M.). - On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces, Israel J. Math., t. 9, 1971, p. 488-506.
- [6] JOHNSON (W. B.) and ZIPPIN (M.). - On subspaces of quotients of $(\sum G_n)_{\ell_p}$ and $(\sum G_n)_{c_0}$, Israel J. Math., t. 13, 1972, p. 311-316.
- [7] KADEC (M. I.) and PELCZYŃSKI (A.). - Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p , Studia Math., Warszawa, t. 21, 1962, p. 161-176.
- [8] LEWIS (D. R.) and STEGALL (C.). - Banach spaces whose duals are isomorphic to $\ell_1(\Gamma)$, J. funct. Analysis, t. 12, 1973, p. 177-187.
- [9] LINDENSTRAUSS (J.). - On a certain subspace of ℓ_1 , Bull. Acad. polon. Sc., Série Sc. math., astr. et phys., 3e série, t. 12, 1964, p. 539-542.
- [10] LINDENSTRAUSS (J.). - Extension of compact operators. - Providence, American mathematical Society, 1964 (Memoirs of the American mathematical Society, 48).
- [11] LINDENSTRAUSS (J.) and ROSENTHAL (H. P.). - The ℓ_p -spaces, Israel J. Math., t. 7, 1969, p. 325-349.
- [12] LINDENSTRAUSS (J.) and PELCZYŃSKI (A.). - Absolutely summing operators in ℓ_p -spaces and their applications, Studia Math., Warszawa, t. 29, 1967, p. 275-326.
- [13] PELCZYŃSKI (A.). - Projections in certain Banach spaces, Studia Math., Warszawa, t. 19, 1960, p. 209-228.
- [14] PELCZYŃSKI (A.) and ROSENTHAL (H. P.). - Localization techniques in L^p spaces, Studia Math., Warszawa, t. 52, 1974/75, p. 263-289.
- [15] ROSENTHAL (H. P.). - On the subspaces of L^p ($p > 2$) spanned by sequences of independent Random variables, Israel J. Math., t. 8, 1970, p. 273-303.
- [16] SCHECHTMAN (G.). - Examples of ℓ_p -spaces ($1 < p \neq 2 < \infty$), Israel J. Math., t. 22, 1975, p. 138-147.

(Texte reçu le 3 avril 1978)

Michèle CAPON
 9 Résidence Les Côteaux
 Chemin du Bois des Rames
 91400 ORSAY
