Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Michel Talagrand

Une remarque sur les espaces de Banach réticulés

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, n° 2 (1977), exp. n° C14, p. C1-C2
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A19_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
17e année, 1977/78, Communication n° 14, 2 p.

UNE REMARQUE SUR LES ESPACES DE BANACH RÉTICULÉS

par Michel TALAGRAND

Le but de cette communication est de donner une preuve directe et élémentaire d'un résultat de N. GHOUSSOUB [1] (et même d'un résultat plus général) concernant les espaces de Banach réticulés (e. B. r.), et établi par celui-ci à l'aide de la théorie des martingales. On renvoie à [2] pour toutes les définitions et résultats élémentaires concernant les e. B. r.

THEOREME [1]. - <u>Soit E un e. B. r. possédant la propriété de Schur et tel que E' possède un système orthogonal topologique. Alors, il existe un ensemble Γ tel que E soit isomorphe (en tant que e. B. r.) à $\ell^1(\Gamma)$</u> .

<u>Preuve</u>. - La première étape consiste à montrer qu'en fait E' possède un point quasi-intérieur. Pour cela, si $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ désigne un système orthogonal topologique de E' , on va montrer que A est fini. Pour tout α , désignons par F_α la bande de E' engendrée par x_α , et par G_α celle engendrée par les x_β , pour $\beta \neq \alpha$. Puisque $E \not\supset c_0$, G_α est $\sigma(E', E)$-fermée. En particulier, son polaire H_α n'est pas réduit à zéro. Soit donc $y_\alpha \in H_\alpha$, avec $\|y_\alpha\| = 1$. Pour $\beta \neq \alpha$, et $x \in F_\alpha$, on a $x(y_\alpha) = 0$. Puisque la somme algébrique des F_α est dense en norme dans E' , on en déduit que la famille des y_α tend faiblement vers 0 suivant le filtre des parties cofinies de A . Puisque E possède la propriété de Schur, ceci montre que A est fini.

On peut donc maintenant supposer que E' contient un point quasi-intérieur, $u \in E'_+$. Désignons par C le polaire de l'intervalle d'ordre $[-u , u]$ et prouvons que C est borné. Sinon, pour tout n , il existe $x_n \in C$, avec $\|x_n\| \geq n$. Posons $y_n = x_n/\|x_n\|$, et prouvons que la suite y_n converge faiblement vers 0 . Du fait que $ny_n \in A$, il résulte que, pour $t \in [-u , u]$, on a $|t(y_n)| \leq 1/n$. Ainsi, si z est une valeur d'adhérence de la suite y_n dans la boule unité de E'' (pour la topologie $\sigma(E'' , E')$), alors $z = 0$ sur $[-u , u]$. Mais, par hypothèse $\bigcup_n n[-u , u]$ est dense en norme dans E' , et ainsi $z = 0$, ce qui prouve que y_n converge faiblement vers 0 . Puisque E possède la propriété de Schur, cette contradiction montre que C est borné. Puisque $[-u , u]$ étant préfaiblement compact est préfaiblement fermé, il est égal au polaire de C , donc contient une boule.

Il existe donc une norme équivalente sur E telle que la boule unité de E' soit l'intervalle $[-u , u]$. Ainsi E' est un M-espace, et donc E'' , et ainsi E est un L-espace. Pour cette nouvelle norme, E est donc isométrique à un $L^1(\mu)$. Pour conclure il reste à montrer que μ est atomique. Mais, si A est un ensemble mesurable de mesure finie ne contenant aucun atome, l'ensemble des fonctions mesurables, nulles en dehors de A, bornées par 1 sur A, est faiblement compact non compact, ce qui termine tout, puisque E possède la propriété de Schur.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GHOUSSOUB (N.). - Orderamarts : A class of asymptotics martingales, J. of multiv. Analysis, 1978 (à paraître).

[2] SCHAEFER (H. H.). - Banach lattices and positive operators. - Berlin, Springer-Verlag, 1974 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 215).

(Texte reçu le 23 octobre 1978)

Michel TALAGRAND
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05