Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Jean Saint Raymond

# Sur une conjecture de G. Godefroy

*Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, tome 17, n° 2 (1977), exp. n° C12, p. C1-C2
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A17_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
17e année, 1977/78, Communication n° 12, 2 p.



# SUR UNE CONJECTURE DE G. GODEFROY

par Jean SAINT RAYMOND

On démontre ici un résultat conjecturé par G. GODEFROY (et légèrement généralisé). Si $f$ est une fonction continue bornée sur $\underset{\sim}{R}^n$ et $H$ l'espace vectoriel engendré par les translatées de $f$, les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $H$ est fermé pour la topologie de la convergence uniforme ;

(ii) $H$ est de dimension finie ;

(iii) $f$ est combinaison linéaire de fonctions de la forme $x \longrightarrow \exp(i\langle \lambda , x\rangle)$, avec $\lambda \in \underset{\sim}{R}^n$, $\langle . , . \rangle$ désignant le produit scalaire.

Les propositions (iii) implique (ii) et (ii) implique (i) sont immédiates. L'étude des valeurs propres du générateur infinitésimal du groupe d'opérateurs de $H$ défini par les translations et le fait que $f$ est bornée montrent que (ii) implique (iii). Il ne reste donc que la proposition (i) implique (ii).

La restriction de $f$ à la boule $B_p$ de centre $0$ et de rayon $p$ est uniformément continue. On définit donc sur $[0 , 2p]$ une fonction croissante, continue et nulle en $0$, par

$$\rho_p(t) = \sup_{x,y \in B_p, \|y-x\| \leq t} |f(y) - f(x)|$$

qu'on prolonge à $\underset{\sim}{R}_+$ par $\rho_n(t) = \rho_n(2n)$, si $t \geq 2n$.

LEMME 1. - <u>Si $g$ appartient à $H$, il existe un $p$ tel que</u>

$$\sup_{x \in \underset{\sim}{R}^n} \frac{|g(x) - g(0)|}{\rho_p(\|x\|)} < + \infty .$$

Puisque la suite $(\rho_p)$ est croissante, il suffit de prouver cet énoncé quand $g$ est une translatée $f_x$ de $f$ :

Si $p > \|x\|$, la fonction $\underset{\sim}{R}^n - \{0\} \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ définie par

$$y \longmapsto \frac{f(x + y) - f(x)}{\rho_p(\|y\|)}$$

est continue, bornée pour $\|y\| \geq 2p$, et bornée au voisinage de $0$ par définition de $\rho_p$, donc bornée sur $\underset{\sim}{R}^n \setminus \{0\}$.

Soit $C_{p,q}$ le convexe équilibré fermé de $H$ défini par

$$C_{p,q} = \{g \; ; \; \forall x \in \underset{\sim}{R}^n , \; |g(x) - g(0)| \leq q\rho_p(\|x\|)\} .$$

Il résulte du lemme 1 que les $(C_{p,q})_{p,q \in \mathbb{N}}$ recouvrent $H$, et du théorème de Baire que, si $H$ est fermé, il existe $p$ et $q$ tels que $C_{p,q}$ contienne la boule unité de $H$.

On a alors, pour tout $g$ de $H$,

$$\forall x \quad |g(x) - g(0)| \leq q\rho_p(\|x\|)\|g\| .$$

Donc, pour tout $x$ et tout $y$,

$$|f(x + y) - f(x)| \leq q\|f\|\rho_p(\|y\|) .$$

La fonction $f$ est donc uniformément continue sur $\underset{\sim}{R}^n$. Il en résulte que la fonction $F_m$ de $\underset{\sim}{R}^m \times (\underset{\sim}{R}^n)^m$ dans $H$ définie par

$$F_m(\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_m , x_1 , \dots , x_m) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_{x_j}$$

est continue, et l'on a

$$H = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m(\underset{\sim}{R}^m \times \underset{\sim}{R}^{mn}) ,$$

ce qui prouve que $H$ est un $K_\sigma$, donc, d'après le théorème de Baire, que $H$ contient une boule relativement compacte, ce qui prouve enfin que $H$ est de dimension finie.

<u>Remarque</u>. - Si on enlève l'hypothèse que $f$ est bornée et qu'on suppose $H$ fermé dans $\mathcal{C}(\underset{\sim}{R}^n)$ pour la convergence compacte, la fonction $F_m$ ci-dessus est continue et le même argument prouve que $H$ est de dimension finie. Il en résulte que $f$ est combinaison linéaire de fonctions de la forme $P(x)\exp(\langle\lambda , x\rangle)$, où $P$ est un polynôme et $\lambda \in \underset{\sim}{C}^n$.

(Texte reçu le 18 octobre 1978)

Jean SAINT RAYMOND
Mathématiques, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05