

# SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

JEAN SAINT RAYMOND

## Sur une conjecture de G. Godefroy

*Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, tome 17, n° 2 (1977-1978), exp. n° C12, p. C1-C2

[http://www.numdam.org/item?id=SC\\_1977\\_\\_17\\_2\\_A17\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A17_0)

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE CONJECTURE DE G. GODEFROY

par Jean SAINT RAYMOND

On démontre ici un résultat conjecturé par G. GODEFROY (et légèrement généralisé). Si  $f$  est une fonction continue bornée sur  $\mathbb{R}^n$  et  $H$  l'espace vectoriel engendré par les translatées de  $f$ , les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i)  $H$  est fermé pour la topologie de la convergence uniforme ;

(ii)  $H$  est de dimension finie ;

(iii)  $f$  est combinaison linéaire de fonctions de la forme  $x \mapsto \exp(i\langle \lambda, x \rangle)$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désignant le produit scalaire.

Les propositions (iii) implique (ii) et (ii) implique (i) sont immédiates. L'étude des valeurs propres du générateur infinitésimal du groupe d'opérateurs de  $H$  défini par les translations et le fait que  $f$  est bornée montrent que (ii) implique (iii). Il ne reste donc que la proposition (i) implique (ii).

La restriction de  $f$  à la boule  $B_p$  de centre 0 et de rayon  $p$  est uniformément continue. On définit donc sur  $(0, 2p)$  une fonction croissante, continue et nulle en 0, par

$$\rho_p(t) = \sup_{x, y \in B_p, \|y-x\| \leq t} |f(y) - f(x)|$$

qu'on prolonge à  $\mathbb{R}_+$  par  $\rho_n(t) = \rho_n(2n)$ , si  $t \geq 2n$ .

LEMME 1. - Si  $g$  appartient à  $H$ , il existe un  $p$  tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|g(x) - g(0)|}{\rho_p(\|x\|)} < +\infty.$$

Puisque la suite  $(\rho_p)$  est croissante, il suffit de prouver cet énoncé quand  $g$  est une translatée  $f_x$  de  $f$  :

Si  $p > \|x\|$ , la fonction  $\mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$y \mapsto \frac{f(x+y) - f(x)}{\rho_p(\|y\|)}$$

est continue, bornée pour  $\|y\| \geq 2p$ , et bornée au voisinage de 0 par définition de  $\rho_p$ , donc bornée sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Soit  $C_{p,q}$  le convexe équilibré fermé de  $H$  défini par

$$C_{p,q} = \{g ; \forall x \in \mathbb{R}^n, |g(x) - g(0)| \leq q\rho_p(\|x\|)\}.$$

Il résulte du lemme 1 que les  $(C_{p,q})_{p,q \in \mathbb{N}}$  recouvrent  $H$ , et du théorème de Baire que, si  $H$  est fermé, il existe  $p$  et  $q$  tels que  $C_{p,q}$  contienne la boule unité de  $H$ .

On a alors, pour tout  $g$  de  $H$ ,

$$\forall x \quad |g(x) - g(0)| \leq q_p(\|x\|) \|g\|.$$

Donc, pour tout  $x$  et tout  $y$ ,

$$|f(x+y) - f(x)| \leq q\|f\|_{p_p}(\|y\|).$$

La fonction  $f$  est donc uniformément continue sur  $\underline{\mathbb{R}}^n$ . Il en résulte que la fonction  $F_m$  de  $\underline{\mathbb{R}}^m \times (\underline{\mathbb{R}}^n)^m$  dans  $H$  définie par

$$F_m(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, x_1, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^m \lambda_j f_{x_j}$$

est continue, et l'on a

$$H = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m(\underline{\mathbb{R}}^m \times \underline{\mathbb{R}}^{mn}),$$

ce qui prouve que  $H$  est un  $K_{\sigma}$ , donc, d'après le théorème de Baire, que  $H$  contient une boule relativement compacte, ce qui prouve enfin que  $H$  est de dimension finie.

Remarque. - Si on enlève l'hypothèse que  $f$  est bornée et qu'on suppose  $H$  fermé dans  $C(\underline{\mathbb{R}}^n)$  pour la convergence compacte, la fonction  $F_m$  ci-dessus est continue et le même argument prouve que  $H$  est de dimension finie. Il en résulte que  $f$  est combinaison linéaire de fonctions de la forme  $P(x)\exp(\langle \lambda, x \rangle)$ , où  $P$  est un polynôme et  $\lambda \in \underline{\mathbb{C}}^n$ .

(Texte reçu le 18 octobre 1978)

Jean SAINT RAYMOND  
 Mathématiques, Tour 46  
 Université Pierre et Marie Curie  
 4 place Jussieu  
 75230 PARIS CEDEX 05

---