

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

MICHEL TALAGRAND

Une remarque sur les espaces de Banach mesure-compacts

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, n° 2 (1977-1978), exp. n° C7, p. C1-C2

http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A12_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE REMARQUE SUR LES ESPACES DE BANACH MESURE-COMPACTS

par Michel TALAGRAND

On dit qu'un espace de Banach E est mesure-compact (m. c.) si, pour tout espace probabilisé (Ω, Σ, μ) et toute application $f : \Omega \rightarrow E$ scalairement mesurable bornée, il existe une application g de Ω dans E , Bochner-mesurable et scalairement équivalente à f (c'est-à-dire, pour $x' \in E'$, on a $x' \circ f = x' \circ g$, μ -presque-partout).

On dit qu'un cardinal $\aleph$ n'est pas réel-mesurable si toute mesure σ -additive, définie sur la tribu des sous-ensembles d'un ensemble de cardinal $\aleph$, est atomique. Le but de cette remarque est de prouver le résultat suivant, qui est établi dans [1] par G. A. EDGAR, avec l'hypothèse supplémentaire inutile que F' contient une suite normante (c'est-à-dire une suite (y_n) telle que, pour $x \in F$, $\|x\| = \sup_n |y_n(x)|$).

THÉOREME. - Soit Γ un ensemble dont le cardinal n'est pas réel-mesurable. Soit $(E_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ des espaces de Banach m. c. Alors, la ℓ_1 -somme $F = (\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma)_1$ est m. c.

Preuve. - Soit (Ω, Σ, μ) un espace probabilisé, et $\omega \rightarrow h(\omega) = (h_\gamma(\omega))_{\gamma \in \Gamma}$ une application bornée scalairement mesurable de Ω dans F .

Montrons que l'ensemble D des γ tels que h_γ ne soit pas scalairement équivalente à 0 est dénombrable. Pour $\gamma \in D$, il existe $y_\gamma \in E'_\gamma$, avec $\|y_\gamma\| < 1$, de sorte que $\omega \rightarrow y_\gamma(h_\gamma(\omega))$ ne soit pas égal à 0 presque-partout. Si D n'est pas dénombrable, alors il existe $a > 0$ et un sous-ensemble D' de D tels que, pour $\gamma \in D'$, on ait $\mu(T_\gamma) \geq a$, où l'on a posé

$$T_\gamma = \{\omega ; |y_\gamma(h_\gamma(\omega))| \geq a\}.$$

Il existe alors $\omega \in \Omega$ tel que l'ensemble H des γ avec $\omega \in T_\gamma$, soit infini. Pour $\gamma \in H$, on a donc $|y_\gamma(h_\gamma(\omega))| \geq a$. Puisque $\|y_\gamma\| \leq 1$, ceci montre que $\|h_\gamma(\omega)\| \geq a$, ce qui est absurde puisque

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \|h_\gamma(\omega)\| = \|h(\omega)\| < +\infty.$$

Désignons par g la fonction $\omega \rightarrow g(\omega) = (h'_\gamma(\omega))_{\gamma \in \Gamma}$, où $h'_\gamma = h_\gamma$ pour $\gamma \in D$, et $h'_\gamma = 0$ sinon. Prouvons que g est scalairement équivalente à h . Il suffit de prouver que, pour toute famille $(y_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, où $y_\gamma \in E'_\gamma$ et $\|y_\gamma\| \leq 1$, on a

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} y_\gamma(h_\gamma(\omega)) = \sum_{\gamma \in D} y_\gamma(h_\gamma(\omega)) \text{ presque-partout,}$$

c'est-à-dire que

$$\sum_{\gamma \in \Gamma \setminus D} y_\gamma(h_\gamma(\omega)) = 0 \text{ presque-partout.}$$

Il suffit de prouver pour cela que, pour tout $X \in \Sigma$, on a

$$\int_X \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus D} y_\gamma(h_\gamma(\omega)) d\mu(\omega) = 0 .$$

Pour toute partie A de $\Gamma' = \Gamma \setminus D$, posons

$$\lambda(A) = \int_X \sum_{\gamma \in A} y_\gamma(h_\gamma(\omega)) d\mu(\omega) .$$

On définit ainsi une mesure σ -additive sur l'ensemble Γ' des parties de Γ' . Puisque, pour $\gamma \in \Gamma'$, la fonction h_γ est scalairement équivalente à 0, on a $\lambda(\{\gamma\}) = 0$. Puisque le cardinal de Γ' n'est pas réel-mesurable, λ est identiquement nulle. Ainsi $\lambda(\Gamma') = 0$.

Puisque chaque E_γ est m. c., pour $\gamma \in D$, soit h''_γ une fonction Bochner-mesurable scalairement équivalente à h'_γ et $h''_\gamma = 0$, pour $\gamma \in D$. La fonction $f = (h''_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est alors Bochner-mesurable et scalairement équivalente à h .

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] EDGAR (G. A.). - Mesurability in a Banach space, II, Indiana J. of Math. (à paraître).

(Texte reçu le 19 juin 1978)

Michel TALAGRAND
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05
