

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

RICHARD HAYDON

Sur les espaces de Banach injectifs qui sont des bidiaux

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 16 (1976-1977), exp. n° 16, p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=SC_1976-1977__16__A4_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES ESPACES DE BANACH INJECTIFS QUI SONT DES BIDUAUX

par Richard HAYDON

On dit qu'un espace de Banach X est injectif (ou que X est un espace de type $\mathcal{P}_\infty$) si, pour tout espace de Banach Z , tout sous-espace vectoriel fermé Y de Z , et toute application linéaire continue $u \in \mathcal{L}(Y; X)$, il existe $v \in \mathcal{L}(Z; X)$ qui satisfait $v|_Y = u$.

Si on demande de plus que l'extension v satisfasse $\|v\| = \|u\|$, on a la définition d'espace de type $\mathcal{P}_1$. Les espaces de type $\mathcal{P}_1$ sont bien-compris (voir par exemple, [2], p. 160-162), mais il reste beaucoup de problèmes sur les injectifs. La plupart des résultats connus sur les injectifs sont dus à ROSENTHAL [3]; on sait, en particulier, que si l'espace injectif X est isomorphe à un sous-espace de ℓ^∞ , alors X est isomorphe à ℓ^∞ .

ROSENTHAL a montré aussi que, pour une mesure finie μ , l'espace $L^\infty(\mu)$ (qui est toujours de type $\mathcal{P}_1$) est isomorphe à un espace bidual si, et seulement si, $L^\infty(\mu)$ est isomorphe à ℓ^∞ . Donc il existe des espaces injectifs qui ne sont isomorphes à aucun espace bidual.

Le théorème qu'on annonce ici caractérise d'une façon précise les injectifs qui sont isomorphes à des biduaux.

THÉORÈME. - Si X est un espace de Banach, et X'' est injectif, alors il existe un ensemble Γ tel que X'' est isomorphe à $\ell^\infty(\Gamma)$.

La démonstration suit un programme suggéré par ROSENTHAL dans son article [3], où il remarque qu'il suffit de démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION. - Soit X un espace de Banach tel que X'' soit injectif. Désignons par τ le caractère de densité de X' (cardinal minimal d'une partie partout dense pour la topologie métrique), et par Γ un ensemble avec $|\Gamma| = \tau$. Alors, il existe un sous-espace Y de X' tel que Y soit isomorphe à $\ell^1(\Gamma)$.

Pour cette proposition, on utilise quelques améliorations des techniques de [1].

RÉFÉRENCES

- [1] HAYDON (R. G.). - On Banach spaces containing $\mathcal{L}^1(\tau)$ and types of measures on compact spaces, Israel J. Math., 1977 (to appear).
- [2] LINDENSTRAUSS (J.) and TZAFRIRI (L.). - Classical Banach spaces. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 338).
- [3] ROSENTHAL (H. P.). - On injective Banach spaces and the spaces $L^\infty(\mu)$ for finite measures μ , Acta Math., Uppsala, t. 124, 1970, p. 205-248.

(Texte reçu le 18 juillet 1977)

Richard HAYDON
Brasenose College
OXFORD (Grande-Bretagne)
