

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

RICHARD HAYDON

Sur les espaces de Banach réticulés injectifs

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 16 (1976-1977), exp. n° 14, p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=SC_1976-1977__16__A3_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES ESPACES DE BANACH RÉTICULÉS INJECTIFS

par Richard HAYDON

On considère les espaces de Banach réticulés qui sont injectifs dans le sens isométrique ; c'est-à-dire que E est injectif si, et seulement si, pour tout espace de Banach réticulé F , tout sous-espace vectoriel, fermé et co-réticulé, G de F , et toute application linéaire positive $u \in \mathcal{L}_+(G; E)$, il existe $v \in \mathcal{L}_+(F; E)$ qui satisfait aux deux conditions $v|_G = u$, $\|v\| = \|u\|$. Tout espace $\mathcal{C}(S)$, avec S compact et stonien, est injectif (un résultat qui n'est pas surprenant si on se rappelle la théorie des espaces de Banach de type $\mathcal{P}_1$; voir par exemple [4], p. 160-162). Les premiers résultats d'importance sur les injectifs sont dus à LOTZ [3] et CARTWRIGHT [1]. LOTZ a montré que l'espace $L^1(\mu)$, pour une mesure μ quelconque, est toujours injectif. CARTWRIGHT a formulé une condition, que j'appelle la condition (c), et qui joue pour la théorie latticielle un rôle analogue aux conditions d'intersection (nIP) de LINDERSTRAUSS ([4], p. 158).

DÉFINITION. - L'espace de Banach réticulé E vérifie la condition (c) si, pour des éléments $x_1, x_2, y \in E_+$ et $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$, les inégalités

$$\|x_1\| \leq r_1, \quad \|x_2\| \leq r_2, \quad \|x_1 + x_2 + y\| \leq r_1 + r_2$$

impliquent qu'il existe $y_1, y_2 \in E_+$ tels que

$$y = y_1 + y_2, \quad \|x_1 + y_1\| \leq r_1, \quad \|x_2 + y_2\| \leq r_2.$$

THÉORÈME (CARTWRIGHT). - On considère les propriétés :

- (a) E est injectif ;
- (b) E vérifie (c) ;
- (c) E'' est injectif.

Alors $(a) \implies (b) \iff (c)$.

COROLLAIRE. - E est injectif si, et seulement si, E vérifie les conditions (c) et (P).

Nous utilisons ici la terminologie de [5], et disons que E vérifie (P) s'il existe une rétraction linéaire positive et contractive de E'' sur E . Jusqu'à maintenant on ignore si la propriété (P) est équivalente à la propriété suivante qui est formellement plus faible.

DÉFINITION. - L'espace de Banach réticulé E vérifie la condition (Q) si toute partie filtrante croissante A de la boule unité de E admet un supremum $x = \bigvee A$ qui satisfait $\|x\| \leq 1$.

On annonce ici un résultat de [2].

THÉOREME. - L'espace de Banach réticulé E est injectif si, et seulement si, E vérifie (c) et (Q).

La démonstration est assez longue, et utilise un théorème de représentation pour les espaces avec (c) et (Q) comme espaces d'opérateurs entre des espaces de type $C(S)$.

REFERENCES

- [1] CARTWRIGHT (D. I.). - Extensions of positive operators between Banach lattices, Mem. Amer. math. Soc., Vol. 3, Issue 2, 1975, n° 164.
- [2] HAYDON (R. G.). - Injective Banach lattices, Math. Z. (to appear).
- [3] LOTZ (H. P.). - Extensions and liftings of positive linear mappings on Banach lattices, Trans. Amer. math. Soc., t. 211, 1975, p. 85-100.
- [4] LINDERSTRAUSS (J.) and TZAFRIRI (L.). - Classical Banach spaces. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 338).
- [5] SCHAEFER (H. H.). - Banach lattices and positive operators. - Berlin, Springer-Verlag, 1974 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 215).

(Texte reçu le 18 juillet 1977)

Richard HAYDON
Brasenose College
OXFORD (Grande-Bretagne)
