Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

François Apéry

Étude de certaines topologies semi-vectorielles

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. n° C12, p. C1-C9
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A21_0>

ÉTUDE DE CERTAINES TOPOLOGIES SEMI-VECTORIELLES

par François APÉRY

Le but de ce travail est de prouver qu'une topologie définie sur un $\underset{\sim}{R}$-espace vectoriel de dimension finie, invariante par translation, séparée, et admettant une base de voisinages de 0 équilibrés et absorbants, est compatible avec la stucture d'espace vectoriel. Ce résultat est faux si on ne suppose pas la topologie séparée. Ces propriétés définiront une classe de topologies, dite classe τ, contenant la classe θ introduite par LELONG dans [3]. Nous donnerons un critère d'appartenance à la classe θ qui rectifiera la proposition 3 de [3].

E designera un $\underset{\sim}{R}$-espace vectoriel, T une topologie sur E, et $\Lambda(E)$ l'ensemble des sous-espaces de dimension finie de E.

DÉFINITION 1. - *T est dite semi-vectorielle si T est invariante par translation et si elle induit une topologie vectorielle sur chaque sous-espace de dimension finie de* E.

La plus fine des topologies semi-vectorielles sur E est la topologie *finement ouverte* définie par

$$T_f = \{\Omega \subseteq E \ ; \ \forall\, M \in \Lambda(E)\ , \ \Omega \cap M \in T_M\}$$

où T_M désigne la topologie vectorielle séparée sur M. KABUTANI et KLEE montrent dans [1] que T_f est vectorielle si, et seulement si,

$$\dim E \leq \aleph_0 .$$

LEMME 2. - *On suppose que T est séparée, invariante par translation, et admet une base de voisinages de 0 symétriques. On suppose de plus que, pour un $M \in \Lambda(E)$ donné, la trace T_M de T sur M est vectorielle. Alors M est fermé pour T.*

Preuve. - Soit $x_0 \in \overline{M}$, et soit v un voisinage de 0 ouvert symétrique tel que $\overline{v \cap M}^{T_M}$ soit compact. On a

$$\exists\, m_0 : \ m_0 \in M \cap (x_0 + v) \ ;$$

on pose $v_0 = m_0 + v$. v étant symétrique, on a $x_0 \in V_0$, et T étant invariante par translation, $v_0 \in T$. Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre plus fin que la trace du filtre des voisinages de x_0 sur $\overline{v_0 \cap M}^{T_M}$. $\overline{v_0 \cap M}^{T_M}$ est compact, donc $\mathfrak{U}$ converge vers $x_1 \in \overline{v_0 \cap M}^{T_M}$, et T étant séparée $x_1 = x_0$, donc $x_0 \in M$.

L'utilité de ce lemme vient de ce que T n'est pas nécessairement uniformisable, comme le montre l'exemple suivant.

Soient E et F deux $\underset{\sim}{R}$-espaces vectoriels en dualité biséparante, et soit $\mathcal{T}$ une topologie localement convexe séparée sur E compatible avec la dualité, on note $\mathcal{T}^f$ la topologie la plus fine sur F coïncidant avec $\sigma(F, E)$, sur les ensembles $\mathcal{T}$-équicontinus de F. Dans [2], p. 270, KÖTHE montre que $\mathcal{T}^f$ est invariante par translation, séparée, et admet une base de voisinages de 0 équilibrés et absorbants. Dans [4], VALDIVIA construit un exemple où $\mathcal{T}^f$ n'est pas régulière, donc non uniformisable.

On note A_e l'union des intervalles ouverts symétriques contenus dans une partie A de E.

LEMME 3. - <u>On suppose que</u> T <u>est invariante par translation et admet une base de voisinages de</u> 0 <u>équilibrés. Soit</u> M <u>un hyperplan de</u> E. <u>Alors</u> M <u>est fermé pour</u> T, <u>si, et seulement si, il existe une forme linéaire continue</u> f <u>sur</u> E, <u>telle que</u>

$$\ker f = M .$$

<u>Preuve</u>. - Soit M un hyperplan fermé, et $f \in E^*$ tel que $\ker f = M$. Soit $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) > 0$, on a $E\setminus M \in T$, et T étant invariante par translation

$$\begin{cases} (E\setminus M) - x_0 \in T \\ 0 \in (E\setminus M) - x_0 . \end{cases}$$

T admettant une vase de voisinages de 0 équilibrés, $((E\setminus M) - x_0)_e$ est un voisinage de 0, or

$$x_0 + ((E\setminus M) - x_0)_e = (E\setminus(M - x_0))_e + x_0 = \{y \in E : f(y) > 0\} ,$$

donc $\{y \in E , f(y) > 0\}$ est un voisinage de chacun de ses points, c'est donc un ouvert, et f est continue.

LEMME 4. - <u>Si</u> T <u>est invariante par translation et admet une base de voisinages de</u> 0 <u>équilibrés, alors il en est de même de la topologie quotient de</u> E/M <u>pour tout sous-espace</u> M <u>de</u> E.

Ce résultat est évident.

DÉFINTION 5. - <u>On dira que</u> T <u>est de la classe</u> τ <u>si</u> T <u>est invariante par translation et admet une base de voisinages de</u> 0 <u>équilibrés et absorbants</u>.

LEMME 6. - <u>Si</u> T <u>est de la classe</u> τ, T <u>est moins fine que la topologie finement ouverte</u> T_f.

<u>Preuve</u>. - Il suffit de démontrer le résultat en dimension finie.

En dimension 1, il est vrai, et on le suppose vrai en dimension inférieure ou égale à n. On se place dans le cas

$$\dim E = n + 1 .$$

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E , et Σ la sphère unité associée. Soit Ω un voisinage T-ouvert de 0 , on pose

$$j_\Omega(x) = \inf\{|\lambda| \;;\; \lambda x \notin \Omega\}$$

et on suppose que

$$\inf\{j_\Omega(x) \;;\; x \in \Sigma\} = 0$$

Σ étant compacte pour la norme $\|\cdot\|$, il existe une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ de Σ et $x_0 \in \Sigma$ tels que

$$\lim_{n\to\infty} j_\Omega(y_n) = 0 \;,\quad \lim_{n\to\infty} \|y_n - x_0\| = 0$$

T étant de la classe τ , on a

$$\begin{cases} \exists\, U \in T \,,\; 0 \in U \,,\; U \subseteq \Omega_e \\ \exists\, x_1 = \lambda_1 x_0 \,,\; \lambda_1 \neq 0 \,,\; x_1 \in U \,. \end{cases}$$

Soit H un hyperplan vectoriel ne contenant pas x_1 . La topologie T étant invariante par translation, d'après l'hypothèse de récurrence, la trace de T sur $H + x_1$ est moins fine que la topologie de la norme $\|\cdot\|$, donc

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \{x \in H + x_1 \;;\; \|x - x_1\| < \varepsilon\} \subseteq U \cap (H + x_1) \,.$$

On note D_n la droite vectorielle passant par y_n , et $\{z_n\} = D_n \cap (H + x_1)$ quand $D_n \cap (H + x_1) \neq \emptyset$. On a alors

$$\exists\, N : n \geq N \Rightarrow \begin{cases} D_n \cap (H + x_1) \neq \emptyset \\ \text{et} \\ \|z_n - x_1\| < \varepsilon \end{cases}$$

donc

$$n \geq N \Rightarrow z_n \in U$$

et comme $U \subseteq \Omega_e$, on a

$$n \geq N \Rightarrow j_\Omega(z_n) > 1$$

ce qui contredit $\lim_{n\to\infty} j_\Omega(y_n) = 0$, donc

$$\inf\{j_\Omega(x) \;;\; x \in \Sigma\} = \alpha > 0$$

et

$$\frac{\alpha}{2}\{(x) \;;\; \|x\| \leq 1\} \subseteq \Omega_e \subseteq \Omega \,.$$

PROPRIETE 7. - <u>Si</u> T <u>est de la classe</u> τ <u>séparée, alors</u> T <u>est semi-vectorielle.</u>

<u>Preuve</u>. - Il suffit de démontrer le résultat en dimension finie. La propriété est vraie en dimension 1, on la suppose vraie en dimension inférieure ou égale à n , et on se place dans le cas où $\dim E = n + 1$.

Soit $E = M \oplus N$ une décomposition en somme directe algébrique de E, où

$$\dim M = n .$$

D'après le lemme 2, M est fermé pour T et, d'après les lemmes 3 et 4, la topologie quotient de E/M est vectorielle séparée. La projection sur N parallèlement à M

$$E \xrightarrow{\pi_M} N$$

est donc continue et par suite l'application coordonnée

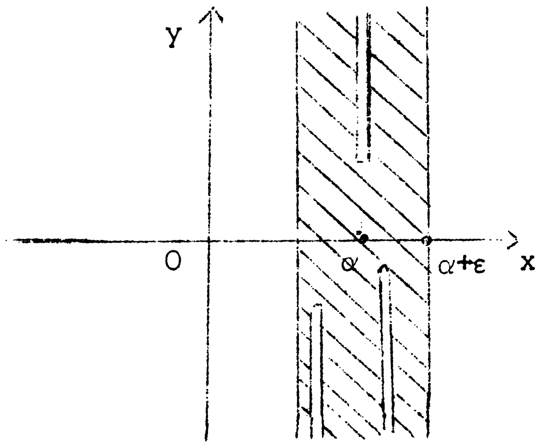
$$E \to \underset{\sim}{R}^{n+1} ,$$

suivant une base de E, est également continue, ce qui montre que la topologie vectorielle séparée sur E est moins fine que T, et d'après le lemme 6, on a $T = T_f$.

Si T n'est pas séparée, la propriété 7 n'est plus vraie ; en effet, si on pose $E = \underset{\sim}{R}^2$, et si $\mathcal{B}$ désigne l'ensemble des bandes verticales

$$\{(x, y) \in \underset{\sim}{R}^2 ; |x - \alpha| < \varepsilon\} , \alpha \in \underset{\sim}{R} , \varepsilon > 0$$

où l'on a enlevé un nombre fini de demi-droites verticales,



alors $\mathcal{B}$ est une base pour une topologie T invariante par translation et admettant une base de voisinages de 0 équilibrés et absorbants. Il est aisé de constater que l'addition $(x, y) \to x + y$ n'est pas continue quand E est muni de la topologie T.

La raison essentielle en est que, pour un voisinage de 0 ouvert Ω, Ω_e n'est pas nécessairement ouvert.

On peut appliquer la propriété 7 à la classe Θ dont voici la définition.

DÉFINITION 8. - T <u>est dite de la classe</u> Θ <u>si les applications</u>

$$\begin{cases} x \to x + a \\ (\lambda , x) \to \lambda x \end{cases}$$

<u>sont continues</u>.

La propriété suivante a comme conséquence que la classe τ contient la classe θ.

PRORRIÉTÉ 9. - T <u>est de la classe θ si, et seulement si, T est invariante par translation et admet une base $\mathcal{B}$ de voisinages de 0 équilibrés, stable par homothétie non nulle, telle que</u> :

(α) $\quad \forall x \in E \,,\; \forall B \in \mathcal{B} \,,\; \exists B' \in \mathcal{B} \,,\; \exists \varepsilon > 0 : \; B' +]-\varepsilon x \,,\, \varepsilon x[\subseteq B$.

PREUVE.

<u>Condition suffisante</u> : Les voisinages de $\mathcal{B}$ étant équilibrés, l'application

$$(\lambda \,,\, x) \to \lambda x$$

est continue en $(0 \,,\, 0)$. Soit $\lambda_0 \neq 0$, et Ω un voisinage ouvert de 0, on a

$$\exists B \in \mathcal{B} : \; B \subseteq \Omega$$

et $\mathcal{B}'$ étant stable par homothétie, $B/2\lambda_0 \in \mathcal{B}$, de plus

$$|\lambda - \lambda_0| < |\lambda_0| \Rightarrow \frac{\lambda B}{2\lambda_0} \subseteq \Omega$$

donc l'application $(\lambda \,,\, x) \to \lambda x$ est continue en $(\lambda_0 \,,\, 0)$ pour tout λ_0 réel. La condition (α) implique la continuité de l'application $(\lambda \,,\, x) \to x + \lambda x_0$ en $(0 \,,\, 0)$, d'autre part les translations sont continues, donc l'application

$$(\lambda \; x) \to \lambda(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0 + \lambda_0 \, x_0 = \lambda x$$

est continue en $(\lambda_0 \,,\, x_0)$;

<u>Condition nécessaire</u> : La continuité des translations et de l'application

$$(\lambda \,,\, x) \to \lambda x$$

entraîne celle des applications $(\lambda \,,\, x) \to x + \lambda a$, ce qui donne la condition (α).

Nous allons donner maintenant deux exemples de topologies qui vérifient certaines conditions de la propriété 9, et qui ne sont ni de la classe θ, ni de la classe τ.

<u>Exemple 10</u>. - On considère les groupes topologiques quotients

$$\underset{\sim}{E} \xrightarrow{\varphi_\mu} \underset{\sim}{R}/\mu\underset{\sim}{Z} \,,\quad \mu > 0 \,,$$

et on définit T comme la topologie initiale des morphismes φ_μ. Les applications $(\lambda \,,\, x) \to x + \lambda a$ sont continues, et T est une topologie de groupe, séparée, sur $\underset{\sim}{R}$, mais aucun voisinage de 0 n'est borné, donc le seul voisinage de 0 équilibré est $\underset{\sim}{R}$, et T n'est pas de la classe τ.

<u>Exemple 11</u>. - On suppose $\dim E = \aleph_0$, et on note $(e_0 \,,\, e_1 \,,\, \dots \,,\, e_n \,,\, \dots)$ une base de E. On définit l'application $E \xrightarrow{\Phi} \underset{\sim}{R}^+$ par

$$\Phi(\pm\, 2^n . e_n) = \frac{1}{2^n} \,,$$

$$x \neq \pm 2^n . e_n \Rightarrow \Phi(x) = \sup_n |x_n| \,,$$

où x_n est la composante de x suivant e_n.

On pose

$$N(x) = \inf\{\textstyle\sum_{i=1}^m \Phi(y^i) \; : \; \sum_{i=1}^m y^i = x\} \,.$$

On a

$$\begin{cases} N \geq 0 \,, \quad N(0) = 0 \,, \quad N(x) = N(-x) \\ \lim_{\alpha\to 0} N(\alpha x) = 0 \,, \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y) \,; \end{cases}$$

soit $x \neq 0$, on suppose

$$\exists (y^i)_{1\leq i\leq m} \,, \quad \textstyle\sum_{i=1}^m \Phi(y^i) \leq \frac{1}{2^k} \,, \quad \sum_{i=1}^m y^i = x \,,$$

alors

$$\forall\, i \,, \quad 1 \leq i \leq m \,, \begin{cases} \sup_n |y_n^i| \leq \frac{1}{2^k} \,, \\ \text{ou} \\ y^i = \pm 2^{p_i} . e_{p_i} \quad p_i \geq k \,. \end{cases}$$

On pose

$$\alpha = \sum_{\{\sup_n |y_n^i| \leq \frac{1}{2^k}\}} y^i \quad , \; \beta = \sum_{\{y^i = \pm 2^{p_i} . e_{p_i}\}} y^i$$

$$J = \{1 \leq j \leq m \; ; \; \sup_n |y_n^j| \leq \frac{1}{2^k}\}$$

on a

$$\alpha = \textstyle\sum_m (\sum_{j\in J} y_n^j) . e_n \,, \quad \alpha_n = \sum_{j\in J} y_n^j \,,$$

or

$$|\alpha_n| \leq \textstyle\sum_{j\in J} |y_n^j| \leq \sum_{j\in J} \Phi(y^j) \leq \frac{1}{2^k} \,,$$

donc

$$\sup_n |\alpha_n| \leq \frac{1}{2^k} \,,$$

or $x = \alpha + \beta$, et en prenant k suffisamment grand, et en raisonnant sur les composantes de x, on a $x \neq \alpha + \beta$, donc

$$N(x) \neq 0 \,.$$

Finalement <u>la topologie</u> T, <u>définie par</u> N <u>sur</u> E, <u>est une topologie de groupe séparée</u>. Soit $M \in \Lambda(E)$, alors

$$\exists\, n_0 \,, \quad n \geq n_0 \Rightarrow e_n \notin M \,,$$

soit $x \in M$ tel que $N(x) < \frac{1}{2^{n_0}}$, alors

$$\exists\, (y^i)_{1\leq i\leq m} \,, \quad \textstyle\sum_{i=1}^m \Phi(y^i) < \frac{1}{2^{n_0}} \,, \quad \sum_{i=1}^m y^i = x$$

avec

$$\forall\ i \quad \text{ou} \begin{cases} \sup_n |y_n^i| < \frac{1}{2^{n_0}} \\ y_n^i = \pm 2^{p_i} . e_{p_i} \ , \quad p_i \geqslant n_0 \ . \end{cases}$$

Or $e_{p_i} \notin M$, donc on peut supposer, en supprimant éventuellement certains y^i dans la décomposition de x, que

$$\forall\ i\ , \quad \sup_n |y_n^i| < \frac{1}{2^{n_0}}\ ,$$

donc

$$|x_n| = |\Sigma_i\ y_n^i| \leqslant \Sigma_i |y_n^i| \leq \Sigma_i\ \Phi(y^i) < \frac{1}{2^{n_0}}\ ,$$

donc

$$\sup_n |x_n| < \frac{1}{2^{n_0}}\ .$$

Réciproquement, on a

$$N(x) \leq \sup_n |x_n|\ ,$$

donc les suites qui tendent vers 0 <u>dans M</u>, pour N, et pour la norme $\sup_n |x_n|$, sont les mêmes ; par suite, les topologies correspondantes sont identiques. Finalement,

$\mathcal{T}$ <u>est semi-vectorielle</u> .

D'autre part, on a

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} N(2^n . e_n) = 0\ , \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0\ , \end{cases}$$

et $N(e_n) = 1$, donc l'application $(\lambda\ , x) \to \lambda x$ n'est pas continue en 0, et

$\mathcal{T}$ <u>n'est pas de la classe</u> τ .

<u>Application à l'étude des convexes compacts d'un espace vectoriel topologique.</u> — Nous allons donner un procédé de construction d'une topologie de classe τ à partir d'une topologie vectorielle. Ce procédé utilise les convexes compacts d'un e. v. t., et peut trouver une application dans le théorème de Krejn-Mil'man. On pose

$$\overline{\mathcal{T}} = \{\Omega \subseteq E\ ;\ \forall\ K \text{ convexe , } \mathcal{T}\text{-compact, } \exists\ \Omega' \in \mathcal{T}\ ,\ \Omega \cap K = \Omega' \cap K\}\ .$$

$\overline{\mathcal{T}}$ est la topologie la plus fine ayant les mêmes convexes compacts que $\mathcal{T}$. Si on note $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties convexes équilibrées absorbantes de E, et

$$\mathcal{T}_\omega = \{\Omega \subseteq E\ ;\ \forall\ x \in \Omega\ ,\ \exists\ B \in \mathcal{B}\ ,\ B + x \subseteq \Omega\}\ .$$

$\mathcal{T}_\omega$ est la topologie localement convexe la plus fine sur E. On a $\overline{\mathcal{T}}_\omega = \mathcal{T}_f$, ce qui montre que <u>si</u> $\mathcal{T}$ <u>est vectorielle séparée</u>, $\overline{\mathcal{T}}$ <u>n'est pas nécessairement vectorielle</u>.

PROPOSITION 12. - Si T est vectorielle séparée, $\overline{T}$ est de la classe τ séparée.

Preuve. - $\overline{T}$ est invariante par translation, et séparée. D'autre part, tout segment $[-x, x]$ est convexe T-compact, donc les $\overline{T}$-voisinages de 0 sont absorbants. De plus les homothéties $x \to \lambda x$ sont $\overline{T}$-continues. Soit $\Omega \in \overline{T}$, $0 \in \Omega$, et soit K un convexe T-compact non vide. On pose $K' = \mathrm{conv}(K \cup -K)$ enveloppe convexe de $K \cup -K$, K' est un compact équilibré convexe, donc

$$\exists\, \Omega' \in T,\quad 0 \in \Omega' :\quad \Omega' \cap 2K = \Omega \cap 2K,$$

donc

$$\Omega_e \cap (2K')_e = \Omega'_e \cap (2K')_e ;$$

or $K \subseteq K' \subseteq (2K')_e$, donc

$$\Omega_e \cap K = \Omega'_e \cap K ;$$

or $\Omega'_e \in T$, donc on a $\Omega_e \in \overline{T}$, ce qui montre que $\overline{T}$ admet une base de voisinages de 0 équilibrés.

En utilisant la topologie $\overline{T}$ on démontre la propriété suivante : si T est vectorielle séparée, et si pour tout $x \neq 0$, il existe un hyperplan vectoriel H ne contenant pas x et intersectant tout convexe compact suivant un compact, alors le théorème de Krejn-Mil'man est vrai pour T (tout convexe compact est l'enveloppe fermée de ses points extrêmaux).

G. CHOQUET m'a fait remarquer que sans utiliser la topologie $\overline{T}$ on pouvait démontrer la propriété beaucoup plus générale suivante :

PROPOSITION 13. - On suppose que tout point x de E admet une base de T-voisinages étoilés en x et que, pour tout convexe T-compact K et tout couple (x, y) de points distincts de K, il existe un hyperplan affine séparant strictement x et y, et dont tous les translatés coupent K suivant un compact. Alors T vérifie le théorème de Krejn-Mil'man.

Preuve. - Soit K un convexe T-compact de E et $\ell \in E^*$. Supposons

$$(a + \ker \ell) \cap K, \quad \text{T-compact}, \quad \forall\, a \in E,$$

et soit $x, y \in K$ tels que $\ell(x) < \ell(a) < \ell(y)$, alors il existe un voisinage V de x étoilé en x tel que

$$K \cap V \subseteq \{z \in K ;\ \ell(z) \neq \ell(a)\}$$

or $K \cap V$ est étoilé en x, donc

$$K \cap V \subseteq \{z \in K ;\ \ell(z) < \ell(a)\} ;$$

par suite $\{z \in K ;\ \ell(z) < \ell(a)\}$ et de même $\{z \in K ;\ \ell(z) > \ell(a)\}$ sont des ouverts relatifs de K . a étant choisi arbitrairement, ℓ est continue sur K . Donc une forme linéaire est continue sur K si, et seulement si, tous les translatés de son noyau coupent K suivant un compact.

On note F_K l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur K . D'après l'hypothèse, la topologie faible $\sigma(E, F_K)$ est séparée sur K , or sa restriction à K est moins fine que la restriction de T à K qui est compacte, donc K est compact pour la topologie localement convexe $\sigma(E, F_K)$. On a finalement

$$K = \overline{\mathrm{conv}(\mathcal{E}(K))}^{\sigma(E,F_K)} = \overline{\mathrm{conv}(\mathcal{E}(K))}^{T} ,$$

où $\mathcal{E}(K)$ désigne l'ensemble des points extrêmaux de K .

BIBLIOGRAPHIE

[1] KABUTANI (S.) and KLEE (V.). - The finite topology of a linear space, Archiv der Math., t. 14, 1963, p. 55-58.

[2] KÖTHE (G.). - Topologische lineare Räume. - Berlin, Springer-Verlag, 1960 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 107).

[3] LELONG (P.). - Topologies semi-vectorielles. Applications à l'analyse complexe, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 25, 1975, Fasc. 3-4, p. 381-407.

[4] VALDIVIA (M.). - On certain topologies on a vector space, Manuscripta Math., t. 14, 1974, p. 241-247.

(Texte reçu le 28 octobre 1976)

François APÉRY
552 rue d'Epron
LEBISEY
14200 HEROUVILLE-SAINT-CLAIR