SÉMINAIRE CHOQUET.
INITIATION À L'ANALYSE

MICHÈLE CAPON

Sur les fonctions affines qui vérifient le calcul barycentrique

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. n° 1, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A1_0>

Séminaire CHOQUET
Initiation à l'analyse
15e année, 1975/76, n° 1, 6 p.

23 octobre 1975

SUR LES FONCTIONS AFFINES QUI VÉRIFIENT LE CALCUL BARYCENTRIQUE

par Michèle CAPON

1. Position du problème et définitions.

Rappelons le problème qui a été posé dans [1] :

Etant donné un convexe compact K, on notera $\mathcal{S}(K)$ l'espace des fonctions qui vérifient le calcul barycentrique sur K, $\mathcal{B}_\alpha(K)$ l'espace des fonctions qui sont de classe de Baire α sur K, et $\mathcal{A}_\alpha(K)$ l'espace des fonctions de classe affine α sur K.

On a évidemment toujours $\mathcal{A}_\alpha(K) \subset \mathcal{B}_\alpha(K) \cap \mathcal{S}(K)$ pour tout ordinal α.

On se propose de chercher une inclusion du type

$$\mathcal{B}_\alpha(K) \cap \mathcal{S}(K) \subset \mathcal{A}_\gamma(K) .$$

Nous allons rappeler les résultats de [1], et en donner de nouveaux qui donnent des réponses dans certains cas particuliers. Nous traiterons également le cas de $[0 , 1]^{\underset{\sim}{N}}$, qui a de nombreuses applications.

2. Méthodes qui permettent de simplifier le problème.

La proposition suivante est démontrée dans [1], et permet de ramener le problème à un convexe compact métrisable.

PROPOSITION 1. - *Soient* K *un convexe compact, et* f *un élément de* $\mathcal{B}_\alpha(K) \cap \mathcal{S}(K)$. *Il existe un convexe compact métrisable* Y, *une surjection affine continue* φ *de* K *sur* Y, *un élément* $\tilde{f}$ *de* $\mathcal{B}_\alpha(Y) \cap \mathcal{S}(Y)$ *tel que* $\tilde{f} \circ \varphi = f$. *Si* K *est un simplexe,* Y *est aussi un simplexe.*

La seconde proposition va nous permettre de supposer que K est un convexe compact symétrique.

PROPOSITION 2. - *Soit* K *un convexe compact plongé dans* $A'(K)$, *soit* f *un élément de* $\mathcal{B}_\alpha(K) \cap \mathcal{S}(K)$, *alors le prolongement canonique de* f *à*

$$B = \operatorname{conv}(K \cup - K)$$

est un élément de $\mathcal{B}_{1+\alpha}(B) \cap \mathcal{S}(B)$.

Démonstration. - Considérons le triplet $(Y , \varphi , \tilde{f})$ donné par la proposition 1. Notons encore φ la surjection affine continue de $A'(K)$ sur $A'(Y)$ qui prolonge φ.

Soit F le prolongement canonique de f à $B = \mathrm{conv}(K \cup -K)$.

Soit $\tilde{F}$ le prolongement canonique de f à $Z = \mathrm{conv}(Y \cup -Y)$. On a évidemment $F = \tilde{F} \circ \varphi$.

Il suffit donc de montrer que $\tilde{F}$ est dans $\mathcal{B}_{1+\alpha}(Z) \cap \mathcal{S}(Z)$. Toute mesure maximale sur Z étant portée par $(Y \cup -Y)$, il est facile de voir que $\tilde{F}$ vérifie le calcul barycentrique maximal sur Z . Or Z est métrisable, donc $\tilde{F}$ vérifie le calcul barycentrique sur Z .

D'autre part, considérons la surjection h de $[0 , 1] \times Y \times Y$ sur Z , donnée par

$$h(\lambda , x , y) = \lambda x - (1 - \lambda)y .$$

Soit s une section de première classe de Baire de h

$$s(z) = (\lambda(z) , x(z) , y(z)) .$$

On peut écrire :

$$\tilde{F}(z) = \lambda(z)\, \tilde{f}[x(z)] - (1 - \lambda(z))\, \tilde{f}[y(z)] .$$

On vérifie aisément que le second membre est une fonction de classe $(1 + \alpha)$ au plus.

3. Résultats obtenus par ces méthodes.

Rappelons les résultats obtenus dans [1].

THÉORÈME 3. - <u>Pour tout simplexe</u> S , <u>on a</u> $\mathcal{B}_\alpha(S) \cap \mathcal{S}(S) \subset \mathcal{A}_{\alpha+1}(S)$.

THÉORÈME 4. - <u>Soit</u> K <u>un</u> α-<u>polytope</u> (<u>au sens de PHELPS</u> [4]), <u>alors</u>

$$\mathcal{B}_\alpha(K) \cap \mathcal{S}(K) \subset \mathcal{A}_{\alpha+1}(K) .$$

THÉORÈME 5. - <u>Soit</u> K <u>la boule unité du dual d'un espace de Lidenstrauss</u>, <u>alors</u> $\mathcal{B}_\alpha(K) \cap \mathcal{S}(K) \subset \mathcal{A}_{\alpha+1}(K)$.

THÉORÈME 6. - <u>Soit</u> S <u>un simplexe</u>, <u>et soit</u> K <u>un sous convexe compact de</u> S <u>tel que</u> $A'(K)$ <u>soit complémenté dans</u> $A'(S)$, <u>alors</u> :

$$\mathcal{B}_\alpha(K) \cap \mathcal{S}(K) \subset \mathcal{A}_{1+\alpha+1}(K) .$$

<u>Démonstration</u>. - On peut identifier $A'(S)$ a un produit

$$A'(S) = A'(K) \times E .$$

Notons B l'enveloppe convexe de $(K \cup -K)$, et E_1 la boule unité de E . En remplaçant S par kS , on peut supposer que S est contenu dans $B \times E_1$.

Soit f un élément de $\mathcal{B}_\alpha(K) \cap \mathcal{S}(K)$. D'après la proposition 2, le prolongement canonique de f à B est dans $\mathcal{B}_{1+\alpha}(B) \cap \mathcal{S}(B)$. Nous le noterons encore f . Posons $F(x , h) = f(x)$ pour tout $(x , h) \in B \times E_1$. Il est aisé de vérifier que

F est un élément de $\mathcal{B}_{1+\alpha}(B \times E_1) \cap \mathcal{S}(B \times E_1)$, donc $F|_S$ est un élément de $\mathcal{B}_{1+\alpha}(S) \cap \mathcal{S}(S)$. En appliquant le théorème 3 au simplexe S , on en déduit que $F|_S$ est de classe affine $(1 + \alpha + 1)$ sur K .

Définition. - Rappelons que K est un β-polytope au sens de Phelps s'il existe un simplexe S et des fonctions $(h_i)_{i \leq n}$ affines continues sur S , telles que

$$K = \{x \in S : h_1(X) = h_2(X) = \dots = h_n(X) = 0\} .$$

PHELPS a démontré que $A'(K)$ est alors un sous-espace complémenté dans $A'(S)$ [4].

Nous pouvons donc énoncer le corollaire suivant.

COROLLAIRE 7. - Soit K un β-polytope, alors

$$\mathcal{B}_\alpha(K) \cap \mathcal{S}(K) \subset \mathcal{A}_{1+\alpha+1}(K) .$$

4. Cas particulier de $[0 , 1]^{\mathbb{N}}$ et ses applications.

CHRISTENSEN a démontré dans [3] le résultat suivant :

THÉORÈME 8. - Toute fonction affine borélienne sur $[0 , 1]^{\mathbb{N}}$ est continue.

Pour une démonstration de ce résultat, on peut aussi voir [2]. Nous allons tirer de ce théorème de nombreuses conséquences concernant l'étude des fonctions affines boréliennes sur un convexe compact K .

THÉORÈME 9. - Soit K la boule unité de $L^\infty(T , \Sigma , \mu)$, où μ est une mesure σ-finie, alors toute fonction affine borélienne sur K est continue.

Démonstration. - Soit f une fonction affine borélienne sur K , et soit A un élément de la tribu Σ , posons

$$m(A) = f(\underset{\sim}{1}_A) .$$

m est une fonction additive d'ensemble sur Σ , nous allons montrer que c'est une mesure absolument continue par rapport à μ . Soit en effet, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles deux à deux disjoints, chaque A_n étant élément de Σ . Considérons l'application θ de $[0 , 1]^{\mathbb{N}}$ dans K , définie par

$$\theta((X_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \underset{\sim}{1}_{A_n} .$$

On vérifie aisément que θ est affine continue, donc $f \circ \theta$ est affine borélienne sur $[0 , 1]^{\mathbb{N}}$, $(f \circ \theta)$ est donc continue, et on en déduit l'égalité

$$f \circ \theta((X_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \, m(A_n) .$$

Prenons $X_n = 1$ pour tout n , alors $\theta((X_n)) = \underset{\sim}{1}_{\cup_n A_n}$.

On a donc $f(\underset{\sim}{1}_{\cup_n A_n}) = m(\cup_n A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.

Ceci montre que m est une mesure, et on voit aisément sur la définition qu'elle est absolument continue par rapport à μ. Il existe donc un élément g de $L'(\mu)$ tel que

$$\int \underset{\sim}{1}_A . g \, d\mu = f(\underset{\sim}{1}_A) \quad \text{pour tout} \quad A \in \Sigma .$$

Comme les combinaisons linéaires des fonctions caractéristiques sont denses en norme dans $L^{\infty}(\mu)$, cette égalité reste vraie sur K.

$$\int \varphi . g \, d\mu = f(\varphi) \quad \text{pour toute} \quad \varphi \in K .$$

Ceci prouve que f est continue.

THÉORÈME 10. - <u>Toute fonction affine borélienne sur un convexe compact</u> K <u>vérifie le calcul barycentrique dénombrable</u>. <u>En particulier</u>, <u>elle est bornée</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soit f affine borélienne sur K, et soit $x_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$, où $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum \lambda_i = 1$ et $x_i \in K$.

Nous supposerons $x_0 = f(x_0) = 0$.

Considérons l'application $\theta : [0, 1]^{\underset{\sim}{N}} \longrightarrow K$, définie par

$$\theta((\alpha_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \lambda_n) x_n .$$

Comme précédemment, on montre que θ est affine continue, donc $(f \circ \theta)$ est continue.

On en tire l'égalité $f \circ \theta((\alpha_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n f(x_n)$. En prenant $\alpha_n = 1$ pour tout n, on obtient

$$f(x_0) = {}_{n=1}^{\infty} \lambda_n f(x_n) .$$

La seconde partie du théorème est une conséquence facile de la première.

Nous allons maintenant démontrer la stabilité par produit d'une famille de convexes compacts pour lesquels on sait résoudre le problème posé au début.

THÉORÈME 11. - <u>Soit</u> $(K_i)_{i \in I}$ <u>une famille de convexes compacts qui vérifient</u> $\mathcal{B}_{\alpha}(K_i) \cap \mathcal{S}(K_i) \subset \mathcal{A}_{\beta}(K_i)$ <u>pour tout</u> i, <u>alors si on pose</u> $K = \prod_{i \in I} K_i$, <u>on a</u> :

$$\mathcal{B}_{\alpha}(K) \cap \mathcal{S}(K) \subset \mathcal{A}_{\beta+1}(K) .$$

<u>Démonstration</u>. - Nous supposerons que 0 est dans K_i. Soit f un élément de $\mathcal{B}_{\alpha}(K)$, il est facile de voir que $f(X)$ ne dépend que d'une infinité dénombrable d'indices X_i.

D'une manière précise, il existe $J \subset I$, dénombrable, tel que si on note u_J l'injection canonique de $\prod_{i \in J} K_i$ dans K (en mettant 0 pour toute coordonnée non dans J), et P_J la projection de K sur $\prod_{i \in J} K_i$, alors on peut écrire

$$f = f \circ u_J \circ P_J .$$

Il suffit donc de démontrer que $(f \circ u_J)$ est de classe affine $(\beta + 1)$ sur $\prod_{i \in J} K_i$. Ceci nous permet de supposer que $K = \prod_{n \in \underset{\sim}{N}} K_n$. Notons encore u_n

[resp. : P_n] l'injection [resp. : projection] canonique de K_n dans K [resp. : de K sur K_n].

LEMME 12. - <u>Pour tout</u> $X = (X_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ <u>dans</u> K , <u>on a</u>

$$f(X) = \sum_{n=1}^{\infty} (f \circ u_n)(X_n) .$$

En effet, soit θ l'application de $[0 , 1]^{\underset{\sim}{N}}$ dans K définie par

$$\theta((\alpha_n)) = (\alpha_n X_n)_{n \in \underset{\sim}{N}} .$$

θ est affine continue, donc $f \circ \theta$ est aussi continue. On en tire

$$f \circ \theta((\alpha_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (f \circ u_n)(X_n) .$$

Si $\alpha_n = 1$ pour tout n , $\theta(\alpha_n) = X$, donc

$$f(X) = \sum_{n=1}^{\infty} (f \circ u_n)(X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f \circ u_n \circ P_n .$$

Or, pour tout n , $(f \circ u_n)$ est dans $\mathcal{B}_\alpha(K_n) \cap \mathcal{S}(K_n)$, donc dans $\mathcal{A}_\beta(K_n)$. Par conséquent, $f \circ u_n \circ P_n$ est de classe affine β sur K . Les sommes finies $\sum_{n=1}^{k} f \circ u_n \circ P_n$ sont encore de classe affine β , donc f est de classe affine $(\beta + 1)$.

<u>Remarque</u>. - Si on considère, pour chaque n , un X_n dans K_n tel que

$$|f \circ u_n(X_n)| \geq \|f \circ u_n\| - \varepsilon/2^n$$

on montre facilement que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f \circ u_n\| \leq 4 \|f\| .$$

La convergence de la série a lieu en norme, mais $\mathcal{A}_\beta(K)$ n'est pas fermé en norme en général dès que $\beta \geq 2$ (voir WILLIAMS [6]). Cependant il l'est si $\beta = 0$ ou 1 , d'après un résultat de WILLIAMS [5]. On a donc le corollaire suivant.

COROLLAIRE 13. - <u>Soit</u> $(K_i)_{i \in I}$ <u>une famille de convexes compacts qui vérifient</u>

$$\mathcal{B}_\alpha(K_i) \cap \mathcal{S}(K_i) \subset \mathcal{A}_0(K_i) \quad [\text{resp. } \mathcal{A}_1(K_i)] ;$$

<u>alors</u> $K = \prod_{i \in I} K_i$ <u>vérifie</u>

$$\mathcal{B}_\alpha(K) \cap \mathcal{S}(K) \subset \mathcal{A}_0(K) \quad [\text{resp. } \mathcal{A}_1(K)] .$$

Nous allons maintenant donner une dernière application qui permet d'utiliser le théorème 10.

THÉORÈME 14. - <u>Soit</u> K <u>un convexe compact tel que</u> $\mathcal{E}K$ <u>soit dénombrable, alors toute fonction affine, et dans</u> $\mathcal{B}_\alpha(K)$, <u>est dans</u> $\mathcal{A}_1(K)$.

D'après la proposition 1, il existe en effet un convexe compact métrisable Y , φ une surjection affine continue de K sur Y , et $\tilde{f}$ élément de $\mathcal{B}_\alpha(Y)$ tel que $\tilde{f} \circ \varphi = f$. Comme il est facile de voir que $\varphi(\mathcal{E}K) \supset \mathcal{E}Y$, $\mathcal{E}Y$ est donc dénombrable, et porte toute mesure maximale. D'après le théorème 10, $\tilde{f}$ vérifie le calcul barycentrique maximal sur Y, donc le calcul barycentrique, et par conséquent f le vérifie sur K. Il suffit de voir que $\tilde{f}$ est dans $\mathcal{A}_1(Y)$.

D'autre part, $\mathcal{E}Y$ étant dénombrable, on peut trouver une suite a_n de $A(Y)$ telle que

1° $\|a_n\| \leq \|\tilde{f}\|$,

2° $a_n(X) \longrightarrow \tilde{f}(X)$ pour tout $x \in \mathcal{E}Y$.

D'après le théorème de Lebesgue, on a

$$\tilde{f}(X) = \lim_{n\to\infty} a_n(X) \quad \text{pour tout } X \text{, car } \tilde{f} \in \mathcal{B}(Y) .$$

COROLLAIRE 15. - Soit K un convexe compact tel que $\overline{\mathcal{E}K}$ soit clairsemé, alors toute fonction affine, et dans $\mathcal{B}_\alpha(K)$, est dans $\mathcal{A}_1(K)$.

Considérons le triplet $(Y, \varphi, \tilde{f})$ donné par la proposition 1. Comme $\overline{\mathcal{E}Y} \subset \varphi(\overline{\mathcal{E}K})$, $\overline{\mathcal{E}Y}$ est un compact métrisable clairsemé, donc dénombrable.

D'après le théorème 14, $\tilde{f}$ est de première classe affine, donc il en est de même pour f.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CAPON (M.). - Sur les fonctions qui vérifient le calcul barycentrique C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, 1974, Série A, p. 339-341.

[2] CAPON (M.). - Etude des fonctions affines boréliennes sur la boule unité de $\ell^\infty(\underline{N})$. Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 14e année, 1974/75, Communication n° 1, 4 p.

[3] CHRISTENSEN (J. P. R.). - Borel structures and a topological zero-one law, Math. Scand., t. 29, 1971, p. 245-255.

[4] PHELPS (R.). - Infinite dimensional compact convex polytopes, Math. Scand., t. 24, 1969, p. 5-26.

[5] WILLIAMS (R. D.). - A note on weak sequential convergence, Pacific J. of Math., t. 12, 1962, p. 333-335.

[6] WILLIAMS (R. D.). - Iterated w^*-sequential closure of a Banach space in its second conjugate, Proc. Amer. math. Soc., t. 16, 1965, p. 1195-1199.

(Texte reçu le 7 novembre 1975)

Michèle CAPON
Mathématiques, Bâtiment 425
Université de Paris-Sud
91405 ORSAY