Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Gilles Godefroy

Contre-exemples associés aux théorèmes de Rosenthal. Quelques propriétés liées à ces résultats

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. n° C6, p. C1-C6
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A16_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
15e année, 1975/76, Communication n° 6, 6 p.

Janvier 1976

CONTRE-EXEMPLES ASSOCIÉS AUX THÉORÈMES DE ROSENTHAL. QUELQUES PROPRIÉTÉS LIÉES À CES RÉSULTATS

par Gilles GODEFROY

Rosenthal [3] a démontré les résultats suivants.

THÉORÈME 1. - *Soient* X *polonais,* F *une partie de* $B_1(X)$, *où*

$$B_1(X) = \{f : X \longrightarrow \underset{\sim}{R} ; f \text{ est de classe de Baire } 1\} .$$

On a l'équivalence :

(i) F *est relativement compacte dans* $B_1(X)$

(ii) *toute suite infinie de* F *admet une sous-suite convergente dans* $B_1(X)$ *(la topologie considérée étant celle de la convergence simple).*

THÉORÈME 2. - *Soit* F *une partie relativement compacte de* $B_1(X)$. *Alors :*

(a) *Si* $g \in \overline{F}$, g *est dans l'adhérence d'une partie dénombrable de* F .

(b) *Supposons* F *uniformément bornée. Soit* μ *une mesure de probabilité sur* X , *supposé localement compact. La restriction à* F *de l'application*

$$f \longmapsto \int f \, d\mu$$

est continue.

On peut se demander si ces propositions admettent des généralisations dans diverses directions. Voici tout d'abord quelques contre-exemples montrant l'impossibilité de certaines généralisations.

CONTRE-EXEMPLE 3. - *Sous les hypothèses du théorème 1, la partie* F *n'est pas toujours métrisable.*

On prend $X = [0 , 1]$, et la partie F de $B_1(X)$ formée des fonctions caractéristiques des intervalles $[0 , \alpha[$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ et des intervalles $[0 , \alpha]$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$. F est compacte, et on vérifie aisément que F n'est pas métrisable. On peut faire la même remarque pour la partie

$$M = \{f : [0 , 1] \longrightarrow [0 , 1] ; f \text{ décroissante}\} .$$

F s'identifie d'ailleurs aux points extrémaux du convexe compact M .

Remarquons cependant qu'on peut affirmer la métrisabilité :

1° dans le cas où F est compact dans $C(X)$ [considérer les fonctions $f \longmapsto f(x_n)$, où $\{x_n\}_{n \in \underset{\sim}{N}}$ est une suite dense dans X].

2° dans le cas où F est compact dans l'ensemble des fonctions s. c. i. sur X [considérer les sur-graphes des fonctions de F] ou dans l'ensemble des fonctions s. c. s. sur X .

CONTRE-EXEMPLE 4. - Dans l'implication (ii) ⟹ (i) du théorème 1, on ne peut remplacer $B_1(X)$ ni par $B_2(X)$, ni par $B(X)$.

On prend $X = [0 , 1]$. Soit Y une partie non borélienne de X . Soit $P_f(Y)$ l'ensemble des parties finies de Y . Si $X \in P_f(Y)$, soit χ_X sa fonction caractéristique. On considère $A = \{\chi_X \; ; \; X \in P_f(Y)\}$; c'est une partie de $B_1(X)$. On voit aisément que toute suite d'éléments de A admet une sous-suite convergente dans $B(X)$, et même dans $B_2(X)$ puisque la sous-suite convergera vers la fonction caractéristique d'un ensemble fini ou dénombrable. Mais A n'est pas relativement compacte dans $B(X)$, car $\chi_Y \in \overline{A}$.

CONTRE-EXEMPLE 5. - Dans l'implication (i) ⟹ (ii) du théorème 1, on ne peut remplacer " X polonais" par " X métrique complet".

En effet, on prend $X = \ell^\infty(\underset{\sim}{N})$, et la suite $(\varphi_n)_{n\in \underset{\sim}{N}}$ des fonctions coordonnées. On a $\overline{\{\varphi_n\}} = \beta\underset{\sim}{N}$. Donc $\overline{\{\varphi_n\}}$ est compact dans $\mathcal{C}(X)^\sim$ pour la topologie de la convergence simple sur X , qui s'identifie à la topologie usuelle de $\beta\underset{\sim}{N}$. Mais on ne peut extraire de la suite $(\varphi_n)_{n\in \underset{\sim}{N}}$ aucune sous-suite convergente.

CONTRE-EXEMPLE 6. - Dans le théorème 2, on ne peut remplacer $B_1(X)$ par $B_2(X)$, ni pour l'affirmation (a), ni pour l'affirmation (b).

En effet, on considère à nouveau $X = [0 , 1]$. L'hypothèse du continu permet d'écrire $X = \{x_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$. On pose alors, pour $\alpha \leq \Omega$,

$$F_\alpha = \{x_{\alpha'} \; ; \; \alpha' < \alpha\} .$$

On pose de plus f_α : fonction caractéristique de F_α , et $A = \{f_\alpha \; ; \; \alpha \leqslant \Omega\}$. A est compacte dans $B_2([0 , 1])$. En effet, f_Ω est la fonction identique à 1 sur X ; et si $\alpha < \Omega$, f_α est la fonction caractéristique d'un ensemble fini ou dénombrable. Donc A est inclus dans $B_2(X)$. De plus, A est l'image continue de $\{\alpha \; ; \; \alpha \leqslant \Omega\}$ muni de la topologie de l'ordre. Donc A est compact.

Par conséquent, $A' = A \setminus \{f_\Omega\}$ est relativement compact dans $B_2(X)$. Cependant $f_\Omega \in \overline{A'}$; et f_Ω n'appartient pas à l'adhérence d'une partie dénombrable de A' , car $[0 , 1] = X$ n'est pas dénombrable.

La propriété (b) n'est pas vérifiée non plus.

En effet, suivant le filtre $\mathfrak{F}$ sur $[1 , \Omega]$ dont une base est formée des ensembles $X_\alpha = \{\alpha' \leqslant \Omega \; ; \; \alpha' > \alpha\}$, où $\alpha < \Omega$, l'ensemble $\{f_\alpha\}_{\alpha\leqslant\Omega}$ converge vers f_Ω . Mais si μ est la mesure de Lebesgue sur $[0 , 1] = X$, on a

$$\int f_\alpha \, d\mu = 0 , \quad \forall \alpha < \Omega .$$

Après cette série de contre-exemples, montrons qu'il existe une généralisation :

PROPOSITION 7 (CH). - Soient X un polonais, F une partie relativement compacte de $B(X)$. Alors, de toute suite de F, on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration. - Si X est un polonais infini, le cardinal de l'ensemble des fonctions boréliennes de X dans $\underset{\sim}{R}$ est $2^{\aleph_0} = c$. En effet, soit $(U_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ une base dénombrable de la topologie de $\underset{\sim}{R}$; soit $A = \{U_n\}$. Soit B l'ensemble des boréliens de X, qui a pour cardinal c. A $f \in B(X)$, on fait correspondre

$$\psi(f) : A \longrightarrow B$$
$$U_n \longmapsto f^{-1}(U_n)$$

ψ est une injection de $B(X)$ dans B^A ; or

$$\text{Card } B^A = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \times \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c .$$

De plus, l'axiome de MARTIN, conséquence de l'hypothèse du continu, permet de montrer que tout compact de cardinal inférieur ou égal à c est séquentiellement compact ; le résultat s'ensuit.

C. Q. F. D.

Nota. - Simultanément à ce travail, et par d'autres méthodes, D. H. FREMLIN a démontré des résultats généralisant la proposition 7, ainsi que les propositions 8 et 9 qui suivent. Ses démonstrations sont plus complexes, mais n'emploient pas l'hypothèse du continu.

PROPOSITION 8. - Soit X un espace polonais. Soient K une partie compacte de $B(X)$, et A une partie de $K \cap \mathcal{C}(X)$. Alors tout point adhérent à A appartient à $B_1(X)$.

Démonstration. - A étant une partie relativement compacte de $B(X)$, on peut extraire de toute suite $(f_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ d'éléments de A une sous-suite $(f_{n_k})_{k \in \underset{\sim}{N}}$ convergente dans $B(X)$; mais puisque A est incluse dans $\mathcal{C}(X)$, la sous-suite $(f_{n_k})_{k \in \underset{\sim}{N}}$ convergera dans $B_1(X)$. L'implication (ii) ==> (i) du théorème 1 de Rosenthal montre alors que A est relativement compacte dans $B_1(X)$.

C. Q. F. D.

On peut encore exprimer ce résultat sous la forme suivante :

PROPOSITION 9. - Soient X un espace polonais, $(f_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}(X)$. Alors, soit toute sous-suite de (f_n) a une sous-suite partout convergente, soit (f_n) a un point adhérent non borélien (ces deux possibilités s'excluant mutuellement).

On remarque, sous cette forme, l'analogie avec un théorème de théorie de la mesure de D. H. FREMLIN (cf. [1], théorème 2F).

Supposons à présent X compact, et soit μ une mesure de Radon sur X. On va voir que, dans la proposition 8, on ne peut remplacer " $B(X)$ " par "l'ensemble des fonctions μ-mesurables", même si $\mathrm{Support}(\mu) = X$. En effet, on a la proposition suivante.

PROPOSITION 10. - Soit $X = [0 , 1]$, muni de la mesure de Lebesgue. Il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}([0 , 1])^+$ telle que :

1° tout point adhérent à (f_n) soit Lebesgue-mesurable.

2° Il existe un point adhérent non borélien.

Démonstration. - D'après la proposition 8, il suffit de construire une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}([0 , 1]^+)$, qui admette un point adhérent de 2e classe de Baire, et telle que tout point adhérent soit mesurable. Or, si la mesure de Lebesgue est notée λ, on a le lemme suivant.

LEMME 11. - Il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}([0 , 1])^+$ telle que :

1° la fonction caractéristique de $\mathbb{Q} \cap [0 , 1]$ appartienne à $\overline{\{f_n\}}_{n \in \mathbb{N}}$

2° $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(f_n) < + \infty$.

En effet, on écrit $\mathbb{Q} \cap [0 , 1] = \{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $(\varphi_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions de $\mathcal{C}([0 , 1])^+$ qui tend vers la fonction caractéristique de $\{x_1 , x_2 , \ldots , x_k\}$ et telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(\varphi_n^k) \leq \frac{1}{2} k$.

On vérifie aisément que la famille $(\varphi_n^k)_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ vérifie les assertions 1° et 2° du lemme.

Soit alors $\varphi \in \overline{\{f_n\}} \setminus \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, où $\{f_n\}$ est ainsi construite. On a, pour tout N,

$$0 \leq \varphi(x) \leq \sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x) , \quad \forall x \in [0 , 1] .$$

D'où $\lambda(\varphi) = 0$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convient donc.

C. Q. F. D.

Enonçons à présent deux corollaires de la proposition 8.

COROLLAIRE 12. - Soit $K = \{0 , 1\}^{\mathbb{N}}$, muni de la topologie produit. Soit K' un sous-ensemble parfait de K, tel que, pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$, $K' \cap \mathcal{U}$ soit borélien. Alors, pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$, $K' \cap \mathcal{U}$ est un $\mathcal{G}_\delta$ (K est identifié à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, donc tout ultrafiltre à une partie de K).

Démonstration. - On a en effet, si $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des restrictions des projections à K',

$(\forall\, \mathcal{U} \in \beta\underset{\sim}{N}$, $K' \cap \mathcal{U}$ est borélien dans $K') \Longrightarrow ((\Pi_n)_{n\in N}$ est relativement compacte dans $B(K')) \Longrightarrow ((\Pi_n)_{n\in N}$ est relativement compacte dans $B_1(K'))$
$\Longrightarrow (\forall\, \mathcal{U} \in \beta\underset{\sim}{N}$, l'ensemble $K'^{\sim} \cap \mathcal{U}$ est un $\mathcal{G}_\delta)$.

En effet, $K' \cap \mathcal{U} = \{x \in K' \; ; \; \lim_{\mathcal{U}} \Pi_n(x) = 1\}$, et la fonction $\lim_{\mathcal{U}} \Pi_n$ est de 1re classe.

C. Q. F. D.

<u>Remarque</u> 13. - Michel TALAGRAND a construit un exemple de parfait K' tel que, pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$, l'ensemble $K' \cap \mathcal{U}$ soit vide ou réduit à un point. On peut, en modifiant légèrement son exemple, construire un parfait K'' tel que, pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$, l'ensemble $K'' \cap \mathcal{U}$ soit vide ou parfait.

COROLLAIRE 14. - <u>Soit</u> K <u>un convexe compact métrisable dans un e. l. c.</u> E . <u>Si les restrictions de toutes les fonctions affines bornées sur</u> K <u>sont boréliennes, elles sont aussi de 1re classe</u>.

<u>Démonstration</u>. - En effet, on peut supposer que K est plongé dans un espace de Hilbert ; d'autre part, le théorème de Hahn-Banach montre que les formes affines continues sont denses dans l'ensemble des formes affines bornées. La proposition 8 termine la démonstration.

C. Q. F. D.

<u>Remarque</u> 15. - Soient E un Banach séparable, K la boule unité du dual E' , munie de la topologie $\sigma(E' , E)$. On a l'équivalence :

$$(\forall\, \varphi \text{ bornée sur } K \,,\; \varphi_{|K} \text{ est borélienne}) \Longleftrightarrow (B \not\supset \ell^1(\underset{\sim}{N})) .$$

Cette équivalence permet de retrouver, par d'autres méthodes, le corollaire 14. L'intérêt de ce corollaire est qu'on a construit (voir [2]) des Banach B ne contenant pas $\ell^1(\underset{\sim}{N})$, et dont le dual n'est pas séparable.

Poursuivons par une proposition liée à ce type de résultats.

PROPOSITION 16. - <u>Soit</u> K <u>un espace Borel-isomorphe à</u> $[0 , 1]$. <u>Alors il existe une suite bornée</u> $(\varphi_n)_{n\in N}$ <u>de fonctions boréliennes sur</u> K , <u>telle que, pour tout ultrafiltre</u> $\mathcal{U}$ <u>non trivial sur</u> $\underset{\sim}{N}$, $\lim_{\mathcal{U}}(\varphi_n)$ <u>ne soit pas borélienne</u>.

<u>Démonstration</u>. - On considère l'espace $K = \{0 , 1\}^{\underset{\sim}{N}}$, muni de la topologie produit. K est un compact parfait métrisable ; il est donc Borel-isomorphe à $[0 , 1]$. On considère la suite $(\varphi_n)_{n\in N}$ des fonctions coordonnées sur K . Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non trivial sur $\underset{\sim}{N}$. L'identification de K avec $\mathcal{P}(\underset{\sim}{N})$ fait correspondre à $\mathcal{U}$, l'ensemble $E_{\mathcal{U}} = \{x \; ; \; \lim_{\mathcal{U}} \varphi_n(x) = 1\}$. Or il est bien connu que $E_{\mathcal{U}}$ est une partie de K qui n'est pas borélienne, ni même mesurable au sens de la propriété de Baire faible. La suite $(\varphi_n)_{n\in N}$ convient donc pour K . La démonstration faite permet d'obtenir immédiatement la conclusion pour tout espace

Borel-isomorphe à $[0, 1]$.

C. Q. F. D.

On peut, dans certains cas, affirmer un peu mieux.

PROPOSITION 17. - Soit K' un espace topologique métrique, Borel-isomorphe à $[0, 1]$. Alors il existe une suite bornée $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur K' telle que pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ non trivial sur $\mathbb{N}$, $\lim_{\mathcal{U}}(\varphi_n)$ ne soit pas borélienne.

Démonstration. - En effet, sous ces hypothèses, K' est analytique, donc contient un sous-ensemble homéomorphe à $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. L'espace K' , étant métrique, est normal. On peut donc prolonger les fonctions (φ_n) , mises en évidence dans la démonstration de la proposition 16, en des fonctions $\tilde{\varphi}_n$ continues sur K' .

La proposition s'ensuit.

C. Q. F. D.

Ce résultat s'applique en particulier à tout polonais non dénombrable.

Terminons par une question.

QUESTION 18. - Soient X un espace polonais, F une partie de $B_1(X)$, relativement compacte dans $B_1(X)$. L'adhérence de F coïncide-t-elle avec l'adhérence séquentielle de F ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] FREMLIN (D. H.). - Pointwise compact sets of measurable functions, Manuscripta Math., Berlin, t. 15, 1975, p. 219-242.

[2] LINDENSTRAUSS (J.) and STEGALL (C.). - Examples of separable Banach spaces which do not contain ℓ^1 and whose duals are non separable, Studia Mathematica, Warszawa, t. 54, 1975, p. 81-105.

[3] ROSENTHAL (H.). -

(Texte reçu le 30 janvier 1976)

Gilles GODEFROY
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05