

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

GILLES GODEFROY

Sur un théorème de Christensen

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. n° C5, p. C1-C5

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A15_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN THÉORÈME DE CHRISTENSEN

par Gilles GODEFROY

J'ai cherché dans ce travail à donner une démonstration nouvelle d'un résultat de CHRISTENSEN (voir [1], pages 76 à 80). Mon but serait d'étendre ce type de résultats à une classe plus vaste d'espaces de Banach. C'est pourquoi j'ai essayé de me passer de certains outils employés dans [1], au profit de techniques d'espaces vectoriels topologiques.

PROPOSITION 1. - Soit φ une forme linéaire sur ℓ^∞ .

Si φ est $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ -borélienne, φ est $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ -continue.

Démonstration. - φ , étant $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ -borélienne, est $\|\cdot\|_\infty$ -borélienne, donc continue. Pour plus de commodité, on considérera φ comme une mesure de Radon sur $\beta\mathbb{N}$. On peut supposer que $\text{Support}(\varphi)$ est inclus dans $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Il faut alors montrer que $\varphi = 0$. On considère la décomposition de Riesz de φ . On peut écrire $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, où $\varphi^+, \varphi^- \geq 0$. Si $f \in (\ell^\infty)^+$, on a

$$\varphi^+(f) = \sup_{0 \leq g \leq f} \varphi(g).$$

On considère l'espace $M = [0, 1]^{\mathbb{N}}$, inclus dans ℓ^∞ . Notons que la topologie produit s'identifie avec la topologie induite par $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$. On appellera ensemble BP-mesurable un sous-ensemble de M ayant la propriété de Baire faible.

LEMME 2. - L'application $\varphi^+|_M$ est BP-mesurable.

Il suffit de démontrer que, pour tout α , $(\varphi^+|_M)^{-1}(]\alpha, +\infty[)$ est BP-mesurable. Considérons alors la relation R définie sur M par

$$fRg \iff f \geq g.$$

Le graphe $\mathcal{S}$ de R est un fermé de $M \times M$. Soient π_1 et π_2 les projections canoniques de $M \times M$ sur les espaces facteurs. Soit $f \in M$. On a

$$\begin{aligned} \varphi^+(f) > \alpha &\iff \exists g \in M, \quad g \leq f, \text{ tel que } \varphi(g) > \alpha, \\ &\iff \exists g \in M \cap \varphi^{-1}(]\alpha, +\infty[), \text{ tel que } g \leq f, \\ &\iff \exists g \in M \cap \varphi^{-1}(]\alpha, +\infty[), \text{ tel que } (f, g) \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Posons $A = M \cap \varphi^{-1}(]\alpha, +\infty[)$. On a donc

$$(\varphi^+|_M)^{-1}(]\alpha, +\infty[) = \pi_1(\pi_2^{-1}(A) \cap \mathcal{S})$$

ce qui montre que $(\varphi^+|_M)^{-1}(]\alpha, +\infty[)$ est analytique, donc BP-mesurable.

LEMME 3. - Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces polonais, et $M = \prod_{n \in \mathbb{N}} M_n$. Pour $x, y \in M$, on pose

$$x \sim y \iff \{n ; x(n) \neq y(n)\} \text{ est fini.}$$

Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ BP-mesurable telle que

$$x \sim y \implies f(x) = f(y) .$$

Alors f est constante sur un $\mathcal{S}_\delta$ résiduel.

Pour une démonstration de ce lemme, voir [1] (cf. aussi la proposition 10). D'après les lemmes 2 et 3, l'application $\varphi^+|_M$ est constante sur un résiduel Ω de M . On considère alors ψ , un homéomorphisme croissant de $[0, 1]$ tel que, pour tout $x \in]0, 1[$, on ait $\psi(x) < x$. On pose $\psi^* = \prod_{n \in \mathbb{N}} (\psi)_n$. L'application ψ^* est un homéomorphisme de M . Soit $\Omega' = \Omega \cap \psi^*(\Omega)$. L'ensemble Ω' est un résiduel de M . D'après la positivité de $\varphi^+|_M$ et les propriétés de ψ^* , on a :

$$x \in \Omega' \implies \forall \mathcal{U} \in \text{Support}(\varphi^+) , \lim_{\mathcal{U}} x \in \{0, 1\} .$$

Or ceci est impossible si $\text{Support}(\varphi^+) \neq \emptyset$. En effet, on a le lemme suivant.

LEMME 4. - Soient X et Y des polonais, $\Omega \subset X \times Y$ un résiduel. Alors

$$\{x \in X \text{ tel que } \Omega \cap \{x\} \times Y \text{ soit un résiduel de } \{x\} \times Y\}$$

est un résiduel de X .

Soit alors $\mathcal{U}$ ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$. On veut démontrer que

$$U = \{x \in M ; \lim_{\mathcal{U}} x \in \{0, 1\}\}$$

ne peut être un résiduel de M . Raisonnons par l'absurde. On vérifie alors aisément que

$$U' = \{(x, y) \in M \times M ; x \in U, y \in U, \frac{1}{2}(x + y) \in U\}$$

est un résiduel de $M \times M$. Soit alors (lemme 4) $x_0 \in U$ tel que $U' \cap \{x_0\} \times M$ soit un résiduel de $\{x_0\} \times M$. Supposons par exemple que $\lim_{\mathcal{U}} x_0 = 0$. D'après le choix de x_0 ,

$$\{y \in M ; \frac{1}{2}(x_0 + y) \in U, y \in U\}$$

est un résiduel de M , donc $\{y \in M ; \lim_{\mathcal{U}} y = 0\}$ est un résiduel de M , ce qui est absurde (considérer l'homéomorphisme $x \mapsto u - x$, où $u = (1, 1, 1, \dots)$). Par conséquent, $\text{Support}(\varphi^+) = \emptyset$, d'où $\varphi^+ = 0$. Le même raisonnement montre que $\varphi^- = 0$, donc que $\varphi = 0$.

C. Q. F. D.

La démonstration faite montre qu'on peut énoncer le corollaire suivant.

COROLLAIRE 5. - Soit φ une forme linéaire positive sur ℓ^∞ , telle que la res-
triction de φ à M soit BP-mesurable. Alors φ est continue pour $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$.

Il suffit en effet de reprendre la démonstration précédente, en la commençant au lemme 3. Ce résultat est une petite extension, dans un cas évidemment bien particulier, du résultat de CHRISTENSEN [1]. Un raisonnement, cette fois tout à fait analogue à celui de CHRISTENSEN [1], permet d'obtenir le corollaire.

COROLLAIRE 6. - Soit $(S, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré, où μ est une mesure positive σ -finie. Toute forme linéaire sur $L^\infty(S, \mathcal{C}, \mu)$, $\sigma(L^\infty, L^1)$ -borélienne est continue pour $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Démonstration. - Soit $\varphi : L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé. On pose, pour $A \in \mathcal{C}$

$$v(A) = \varphi(\chi_A)$$

où χ_A est la fonction caractéristique de A . Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ disjoints. On définit $\varphi^* : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$(\lambda_n) \in \ell^\infty, \quad \varphi^*(\lambda_n) = \varphi\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \chi_{A_n}\right).$$

On voit aisément que l'hypothèse faite sur φ entraîne que φ^* est $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ -borélienne. φ^* est donc induite par un élément de ℓ^1 . On a donc

$$\varphi^*((\lambda_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \varphi(\chi_{A_n}).$$

D'où, en particulier,

$$v\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \varphi\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \chi_{A_n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(\chi_{A_n}) = \sum_{n=0}^{+\infty} v(A_n).$$

v est donc σ -additive. De plus, on a $\mu(A) = 0 \Rightarrow v(A) = 0$. Le théorème de Radon-Nikodym permet d'affirmer qu'il existe $f \in L^1$ telle que

$$\varphi(\chi_A) = \int_A f.d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{C}.$$

Les fonctions en escalier étant denses dans $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, et φ étant continue pour la norme, on en déduit que φ est induite par un élément de L^1 .

C. Q. F. D.

Remarque 7 : On démontre aisément qu'un morphisme d'un groupe topologique métrisable de Baire dans un groupe topologique est continu s'il est borélien. L'intérêt du corollaire 6 est que l'espace $(L^\infty, \sigma(L^\infty, L^1))$ est un groupe topologique maigre.

Disons qu'une dualité (E, E') , où E est un Banach, possède la propriété (M) si toute forme linéaire sur E' , $\sigma(E', E)$ -borélienne, est induite par un élément de E . On pourrait chercher quels sont les couples (E, E') qui vérifient cette propriété. Ceci appelle quelques remarques.

Remarque 8 : Il semblerait intéressant, dans l'optique où l'on essaye d'adapter la démonstration de la proposition 1, de supposer que E est facteur direct dans

son bidual E'' . D'autre part, pour que la dualité (E, E') possède la propriété (M), il est nécessaire que E soit $\sigma(E, E')$ séquentiellement complet, donc (dans l'hypothèse : E non réflexif) que E' ne soit pas séparable.

Remarque 9 : On peut remarquer que le lemme 2 s'étend, mutatis mutandis, à certains espaces réticulés. Quant au lemme 3, on peut le déduire, dans le cas où $M_n = M_0$ pour tout n , de la proposition suivante.

PROPOSITION 10. - Soit M un espace topologique de Baire à base dénombrable d'ouverts. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'homéomorphismes de M telle que, pour tout ouvert O de M , $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}(O) = M$. Soit A un résiduel de M . Alors il existe $x \in A$ tel que $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \cap A$ soit dense dans A .

Démonstration. - Soit $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base de la topologie de M . On pose

$$\Omega_1 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f_k^{-1}(O_n) \right).$$

Ω_1 est un résiduel. On pose de plus $A_n = f_n^{-1}(A)$. A_n est aussi un résiduel, pour tout n . Soit

$$x \in \Omega_1 \cap A \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right).$$

On a $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, et de plus $\overline{\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}} = M$, car $x \in \Omega_1$. Par conséquent x convient.

C. Q. F. D.

Le lemme 3, dans le cas où $M_n = M_0$ pour tout n , se déduit immédiatement de cette proposition en considérant les homéomorphismes (φ_n) qui permutent un nombre fini de coordonnées, et le résiduel A tel que $f|_A$ soit continue.

Quant au lemme 4 et à la fin de la démonstration, une simplification serait apportée par une réponse à la question suivante.

Question 11. - Soient E un Banach non réflexif, et $B_1(E')$ la boule unité de E' munie de $\sigma(E', E)$. Soit $\varphi \in E'' \setminus E$. Est-ce que $\text{Ker } \varphi \cap B_1(E')$ peut être un résiduel de $B_1(E')$?

Une réponse négative, qui semble probable, permettrait peut-être de généraliser la démonstration de la proposition 1 à d'autres dualités ; il serait naturel de considérer par exemple les couples (U, U_1) où U_1 est une algèbre de von Neumann, et U son préduel. Terminons par une question :

Question 12. - Si E est un Banach faiblement séquentiellement complet, la dualité (E, E') possède-t-elle la propriété (M) ?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHRISTENSEN (J.). - Topology and Borel structure. - Amsterdam, North-Holland publishing Company ; New York, American Elsevier publishing Company, 1974 (North-Holland Mathematics Studies, 10 ; Notas de Matematica, 51).

(Texte reçu le 30 janvier 1976)

Gilles GODEFROY
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05
