

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

JEAN SAINT RAYMOND

Fonctions séparément continues sur le produit de deux espaces polonais

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. n° C2, p. C1-C3

http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A12_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS SÉPARÉMENT CONTINUES
SUR LE PRODUIT DE DEUX ESPACES POLONAIS

par Jean SAINT RAYMOND

Soient P et Q deux espaces polonais, et f une fonction numérique séparément continue sur $P \times Q$. On démontre ici qu'il existe un point x de P tel que f soit continue en chaque point de $\{x\} \times Q$.

LEMME 1. - Soient L et M deux espaces métriques compacts, et f une fonction séparément continue sur $L \times M$. Il existe un point a de L où l'application $x \mapsto f(x, \cdot)$ de L dans $\mathcal{C}(M)$ est continue.

Ce résultat est déjà connu. Soit $(\varphi_{i,n})_i$ une partition finie de l'unité sur M , subordonnée à un recouvrement par des ouverts de diamètre inférieur à 2^{-n} . Soient $y_{i,n}$ des points de M tels que $\varphi_{i,n}(y_{i,n}) > 0$. Il résulte de la continuité uniforme des fonctions $f(x, \cdot)$ que, pour tout x , on a :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x, \cdot) - \sum_i f(x; y_{i,n}) \varphi_{i,n}\|.$$

Soient g et g_n les applications de L dans $\mathcal{C}(M)$ définies par

$$\begin{cases} g(x) = f(x, \cdot) \\ g_n(x) = \sum_i f(x; y_{i,n}) \varphi_{i,n} \end{cases}$$

On voit aisément que g_n est continue, puisque les fonctions $x \mapsto f(x; y_{i,n})$ le sont, et que g est limite simple de la suite (g_n) . Puisque $\mathcal{C}(M)$ est métrisable et séparable, la fonction de première classe g possède un point de continuité a , ce qu'il fallait démontrer.

Il résulte de ce qui précède et de la continuité de $f(a, \cdot)$ que f est continue en chaque point de $\{a\} \times M$.

THÉORÈME 2. - Soient P et Q deux espaces polonais, et f une application séparément continue de $P \times Q$ dans $\mathbb{R}$. Alors il existe une partie X maigre de P telle que f soit continue en tout point de $(P \setminus X) \times Q$.

Désignons par D l'ensemble des points de discontinuité de f , par D_ε l'ensemble des points de $P \times Q$ où l'oscillation de f est supérieure à 2ε . L'ensemble D_ε est fermé dans $P \times Q$, et D est la réunion des $D_{1/n}$. Nous noterons π_1 et π_2 les projections de $P \times Q$ sur P et Q respectivement. Nous désignerons encore par $(\omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (resp. $(\omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$) une base de la topologie de P (resp. Q), et nous munirons P et Q de distances pour lesquelles ils sont complets.

Puisque nous voulons montrer que $\pi_1(D)$ est maigre, il suffit de montrer que $\pi_1(D_\varepsilon)$ est maigre pour tout $\varepsilon > 0$. Supposons donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$\pi_1(D_\varepsilon)$ ne soit pas maigre. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $\pi_1[D_\varepsilon \cap (\omega_i \times W_j)]$ est analytique ; il existe donc un ouvert $U_{i,j}$ de P , et un F_σ maigre $R_{i,j}$ de P tels que :

$$U_{i,j} \setminus R_{i,j} \subset \pi_1[D_\varepsilon \cap (\omega_i \times W_j)] \subset U_{i,j} \cup R_{i,j}.$$

Nous posons $R = \bigcup_{i,j} R_{i,j}$ qui est un F_σ maigre et

$$P_1 = P \setminus R.$$

Nous construisons par récurrence sur la longueur $|s|$ de la suite finie s d'entiers ≥ 1 , des points $(x_s)_{s \in S}$ de P_1 , des points $(y_s)_{s \in S}$ et $(z_s)_{s \in S}$ de Q tels que

$$\begin{cases} (a) & (x_s, y_s) \in D_\varepsilon \\ (b) & d(x_s; x_{s,n}) \leq 2^{-v(s,n)} \\ (c) & d(y_s; y_{s,n}) \leq 2^{-v(s,n)} \\ (d) & d(y_s; z_{s,n}) \leq 2^{-v(s,n)} \\ (e) & |f(x_s; z_{s,n}) - f(x_{s,n}; z_{s,n})| > \frac{\varepsilon}{4}, \end{cases}$$

où l'on pose $v(s) = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ quand s est la suite $(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Puisque $\pi_1(D_\varepsilon)$ n'est pas maigre, il n'est pas contenu dans R . Il existe donc $x_\emptyset \in P_1 \cap \pi_1(D_\varepsilon)$. Il existe donc $y_\emptyset \in Q$ tel que $(x_\emptyset, y_\emptyset) \in D_\varepsilon$, et on pose $z_\emptyset = y_\emptyset$.

Si x_s, y_s et z_s sont déterminés, il existe pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ des voisinages ouverts ω_i et W_j de x_s et y_s tels que :

$$\begin{cases} \text{diam } \omega_i \leq 2^{-v(s,n)} \\ \text{diam } W_j \leq 2^{-v(s,n)} \\ \forall y \in W_j, \quad |f(x_s, y) - f(x_s, y_s)| < \frac{\varepsilon}{4}. \end{cases}$$

Puisque $x_s \in \pi_1[D_\varepsilon \cap (\omega_i \times W_j)]$ et $x_s \notin R_{i,j}$, on a $x_s \in U_{i,j}$. Par définition de D_ε , il existe $x'_{s,n} \in U_{i,j}$ et $z_{s,n} \in W_j$ tels que

$$|f(x'_{s,n}; z_{s,n}) - f(x_s, y_s)| > \frac{3\varepsilon}{4}.$$

L'ensemble $U_{i,j} \cap \{x; |f(x; z_{s,n}) - f(x'_{s,n}; z_{s,n})| < \frac{\varepsilon}{4}\}$ est un voisinage de $x'_{s,n}$, non contenu dans R . Il existe donc $x_{s,n} \in U_{i,j} \cap P_1$ tel que $\frac{\varepsilon}{4} > |f(x_{s,n}; z_{s,n}) - f(x'_{s,n}; z_{s,n})|$. On en déduit que

$$|f(x_{s,n}; z_{s,n}) - f(x_s; z_{s,n})| > \frac{\varepsilon}{4}.$$

Et, puisque $x_{s,n} \in U_{i,j} \cap P_1 \subset U_{i,j} \setminus R_{i,j} \subset \pi_1[D_\varepsilon \cap (\omega_i \times W_j)]$, il existe $y_{s,n} \in W_j$ tel que $(x_{s,n}, y_{s,n}) \in D_\varepsilon$.

On voit alors aisément que $x_{s,n}, y_{s,n}$ et $z_{s,n}$ satisfont aux conditions exigées.

Nous posons

$$L_k = \{x_s ; |s| \leq k\}$$

$$M_k = \{y_s ; |s| \leq k\} \cup \{z_s ; |s| \leq k\}$$

et nous démontrons par récurrence que L_k et M_k sont compacts. C'est immédiat pour $L_0 = \{x_\emptyset\}$. Si c'est vrai pour L_k , et si l'on désigne par L_k^η l'ensemble fermé $\{x \in P ; d(x, L_k) \leq \eta\}$, on a

$$L_{k+1} = \bigcap_{\eta > 0} (L_k^\eta \cup (L_{k+1} \setminus L_k^\eta)) ,$$

et la condition (b) fait que $L_{k+1} \setminus L_k^\eta$ est fini, donc compact.

Il en résulte que, puisque L_k est compact, L_{k+1} est précompact et fermé donc compact, puisque P est complet. On démontre de même la compacité de M_k . Il résulte de (b), (c) et (d) que la distance de Hausdorff de L_k à L_{k+1} (resp. M_k à M_{k+1}) est majorée par 2^{-k-1} , donc que la suite (L_k) (resp. (M_k)) est une suite de Cauchy dans l'espace complet des compacts de P (resp. Q). On en déduit que $L = \overline{\bigcup_k L_k}$ est compact dans P et $M = \overline{\bigcup_k M_k}$ compact dans Q . La restriction à $L \times M$ de f est séparément continue ; donc, en vertu du lemme 1, il existe $a \in L$, et V voisinage de a tels que

$$\forall x \in V \cap L, \forall z \in M, |f(x, z) - f(a, z)| < \frac{\varepsilon}{12}$$

donc

$$\forall x \in V \cap L, \forall x' \in V \cap L, \forall z \in M, |f(x, z) - f(x', z)| < \frac{\varepsilon}{6} .$$

On en conclut qu'il existe $s \in S$, $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $x_s \in V \cap L$; $x_{s,n} \in V \cap L$ donc

$$|f(x_s ; z_{s,n}) - f(x_{s,n} ; z_{s,n})| < \frac{\varepsilon}{6}$$

contrairement à la condition (e).

Cette contradiction prouve que $\pi_1(D_\varepsilon)$ est maigre, donc aussi que $\pi_1(D)$ est maigre, ce qu'on voulait démontrer.

COROLLAIRE 3. - Soient P et Q deux espaces polonais, et f une application continue séparément de $P \times Q$ dans un espace métrique séparable E . Alors il existe un point $a \in P$ tel que f soit continue en tout point de $\{a\} \times Q$.

Puisque E se plonge dans $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, on est ramené au cas où $E = [0, 1]^{\mathbb{N}}$. Si p_n est la n -ième projection de E sur $[0, 1]$, il existe, d'après le théorème 2, un ensemble maigre X_n tel que $p_n \circ f$ soit continue en tout point de $(P \setminus X_n) \times Q$. Puisque $\bigcup_n X_n$ est maigre, il existe $a \in P \setminus \bigcup_n X_n$, et f est continue en tout point de $\{a\} \times Q$.