Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Patrick Magnier

Semi-algèbres fermées semi-réticulées inférieurement des espaces $C(X)$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 13 (1973-1974), exp. n° 21, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1973-1974__13__A14_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
13e année, 1973/74, n° 21, 3 p.

9 mai 1974

SEMI-ALGÈBRES FERMÉES SEMI-RÉTICULÉES INFÉRIEUREMENT DES ESPACES $\mathcal{C}(X)$

par Patrick MAGNIER

Le but de cet exposé est d'obtenir une classification des semi-algèbres fermées semi-réticulées inférieurement (s. r. i.) des espaces $\mathcal{C}(X)$, valable à la fois pour "l'équation" de ces semi-algèbres et pour leurs propriétés de stabilité par certaines fonctions de $\mathcal{C}(\underset{\sim}{R}^n)$.

1. Notations et définitions.

X désignera un espace localement compact, et $\mathcal{C}(X)$ l'espace des fonctions continues réelles sur X, muni de la topologie de la convergence compacte.

Une partie A de $\mathcal{C}(X)$ est dite stable par $\varphi \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{R}^n)$ si, pour toute suite $(f_1, \dots, f_n) \in A^n$, la fonction $\varphi \circ (f_1, \dots, f_n)$ appartient à A.

Une semi-algèbre de $\mathcal{C}(X)$ est un cône convexe, stable par produit, et une partie est dite s. r. i. si elle est stable par $\inf(s, t)$.

Dans tout ce qui suit, N désigne un fermé de X, et $M = (M_\ell)_{\ell \in L}$ une famille de fermés de X. Nous désignerons par $A(N, M)$ l'algèbre fermée de $\mathcal{C}(X)$, constituée par les fonctions nulles sur N, et constante sur chacun des M_ℓ.

En outre, on désignera par $F = (\sigma_i, x_i)_{i \in I}$ et $G = (\tau_j)_{j \in J}$ deux familles où les σ_i et les τ_j sont des mesures de Radon sur X, positives et à support compact, et les x_i des points de X tels que pour tout i on ait : $\sigma_i(\{x_i\}) = 0$.

2. Détermination des semi-algèbres fermées s. r. i.

L'ensemble $A(N, M)$ est une algèbre fermée de $\mathcal{C}(X)$ et, réciproquement, toute algèbre fermée $A \subset \mathcal{C}(X)$ est (d'après STONE-WEIERSTRASS) de ce type (i. e. il existe N et M tels que $A = A(N, M)$).

De même, l'ensemble C défini par :

$$C = \left\{ f \in A(N, M) \; ; \; \begin{array}{l} \forall\, i \in I : \sigma_i(f) \leq f(x_i) \\ \forall\, j \in J : \tau_j(f) \leq 0 \end{array} \right\}$$

est un cône convexe fermé s. r. i., et réciproquement [cf. G. CHOQUET-J. DENY [1]], tout cône convexe fermé s. r. i. de $\mathcal{C}(X)$ est de ce type.

Soit W le cône défini par

(1) $W = \{f \in A(N,M) \; ; \; \forall\, i \in I, \sigma_i(f) \leq f(x_i)$ et $0 \leq f(x) \leq f(x_i), \forall\, x \in \mathrm{Supp}(\sigma_i)\}$,

alors W est une semi-algèbre fermée s. r. i. de $\mathcal{C}(X)$, et réciproquement :

PROPOSITION 1. - Soit W une semi-algèbre fermée s. r. i. de $\mathcal{C}(X)$. Alors il existe un triplet (N , M , F) tel que (1) soit vérifiée. En outre, on peut trouver un triplet vérifiant (1) et tel que :

1° N soit le "noyau" de W ; N et les M_ℓ sont deux à deux disjoints,

2° $\forall\, i \in I$, $x_i \notin N$ et $\sigma_i(N) = 0$.

Exemple 1 : L'ensemble S des fonctions de $\mathcal{C}(\underset{\sim}{R})$, nulles en zéro, et "sous-homogènes" sur $\underset{\sim}{R}_+$ (i. e. : $\forall\, x \geq 0$, $\forall\, \lambda \in [0 , 1]$, on a $0 \leq f(\lambda x) \leq \lambda f(x)$).

PROPOSITION 2. - Soit φ un élément de S vérifiant en outre :

1° φ est non linéaire sur $\underset{\sim}{R}_+$,

2° $\varphi(x) > 0$ pour tout $x \in \underset{\sim}{R} \setminus \{0\}$,

3° $\varphi(x) + x = 0$ admet une racine unique sur $]-\infty , 0[$,

et soit W un cône convexe fermé s. r. i. de $\mathcal{C}(X)$ stable par φ . Alors W est une semi-algèbre et vérifie (1).

En particulier, tout cône convexe fermé s. r. i., stable par $|x|^\alpha$ (si $\alpha > 1$), est une semi-algèbre.

Exemple 2 : Les fonctions sous-homogènes sur $\underset{\sim}{R}^n_+$, c'est-à-dire l'ensemble S_n des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{R}^n)$, nulles en zéro, positives sur $\underset{\sim}{R}^n_+$ et telles que, pour tout $t \in \underset{\sim}{R}^n_+$, il existe une forme linéaire positive ℓ_t vérifiant :

$$[\ell_t(t) = \varphi(t)] \quad \text{et} \quad [(0 \leq s \leq t) \Rightarrow (\varphi(s) \leq \ell_t(s))] .$$

PROPOSITION 3. - Toute semi-algèbre fermée s. r. i. de $\mathcal{C}(X)$ est stable par tout élément de S_n . Inversement, toute partie fermée de $\mathcal{C}(X)$ stable par tout élément de S_n (pour un entier $n \geq 2$), est une semi-algèbre s. r. i. de $\mathcal{C}(X)$.

PROPOSITION 4. - La plus petite semi-algèbre fermée s. r. i. de $\mathcal{C}(\underset{\sim}{R}^n)$, contenant les projections, est S_n .

3. Semi-algèbres réticulées.

Si dans (1), les mesures σ_i sont toutes du type $a_i \delta_{y_i}$ avec $a_i = 0$ ou $a_i \geq 1$, alors W est réticulé, et l'on a :

$$W = \{f \in A(N , M) ; \forall\, i \in I , \ 0 \leq f(y_i) \leq \alpha_i f(x_i)\} , \tag{2}$$

où les α_i appartiennent à $]0 , 1]$. Inversement, on a le résultat suivant.:

PROPOSITION 5. - Toute semi-algèbre réticulée de $\mathcal{C}(X)$ vérifie (2). En outre, on peut s'arranger pour que N soit le noyau de W , que N et les M_ℓ soient deux à deux disjoints, et que les x_i et les y_i n'appartiennent pas à N .

Exemple 3 : Les fonctions "semi-convexes" sur $\underset{\sim}{R}^n_+$, c'est-à-dire l'ensemble S'_n

des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{R}^n)$, nulles en zéro, et telles que, pour tout $t \in \underset{\sim}{R}^n_+$ et tout λ de $(0 , 1)$, on ait :

$$(0 \leqslant s \leqslant \lambda t) \Rightarrow (\varphi(s) \leqslant \varphi(t)) .$$

On a alors l'analogue des propositions 3 et 4 en remplaçant s. r. i. par "réticulée", et S_n par S'_n .

Remarquons que l'on a $S_1 = S'_1 = S$.

4. Semi-algèbres de "type 1" .

Si, dans (2), tous les α_i sont égaux à 1 , on retrouve (pour des cônes positifs, et si X est compact) la caractérisation des semi-algèbres de type 1 (i. e. stable par $t/(1 + t)$), introduite par F. BONSALL. Nous étendrons cette terminologie à toute partie de $\mathcal{C}(X)$ vérifiant (2), où tous les α_i sont égaux à 1 .

PROPOSITION 6. - Une semi-algèbre fermée de $\mathcal{C}(X)$ est de type 1 si, et seulement si, elle est s. r. i. et stable par $\inf(t , 1)$.

Exemple 4 : L'ensemble U_n des fonctions de $\mathcal{C}(\underset{\sim}{R}^n)$, nulles en zéro, et croissantes sur $\underset{\sim}{R}^n_+$.

On a, à nouveau, des propositions analogues aux propositions 3 et 4.

Remarque. - Toute semi-algèbre fermée s. r. i., contenant les constantes positives, est de type 1 .

5. Partie "positives sur un fermé" d'algèbres fermées.

PROPOSITION 7. - Soit W une semi-algèbre fermée s. r. i. de $\mathcal{C}(X)$, stable par une fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{R})$, non identiquement nulle sur $\underset{\sim}{R}_+$, tendant vers 0 à l'infini ou nulle en un point $t_0 > 0$. Alors, si N est le noyau de W , il existe une famille de fermés $M = (M_\ell)_{\ell \in L}$ et un fermé H de X , tels que :

$$W = \{f \in A(N , M) ; \ \forall x \in H , \ f(x) \geqslant 0\} .$$

Le cône W apparaît alors comme la partie "positive sur H " de l'algèbre fermée $A(N , M)$.

L'exemple fondamental est ici l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}(\underset{\sim}{R}^n)$, nulles en zéro, et positives sur $\underset{\sim}{R}^n_+$, et l'on a à nouveau l'analogue des propositions 3 et 4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (G.) et DENY (J.). - Ensembles semi-réticulés et ensembles réticulés de fonctions continues, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 36, 1957, p. 179-189.

Patrick MAGNIER
Université de Limoges
UER des Sciences, Mathématiques
Domaine de la Borie
123 rue Albert Thomas
87100 LIMOGES

(Texte reçu le 12 juin 1974)