Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Christian Léger

Une propriété du convexe topologique vague des probabilités normales sur un espace topologique

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, nº 2 (1969-1970), exp. nº 15, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_2_A6_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
9e année, 1969/70, n° 15, 7 p.

9 avril 1970

UNE PROPRIÉTÉ DU CONVEXE TOPOLOGIQUE VAGUE DES PROBABILITÉS NORMALES SUR UN ESPACE TOPOLOGIQUE

par Christian LÉGER

Une Note [6] suffit pour faire support écrit à l'exposé du 9 avril. Ici nous démontrerons un résultat d'analyse, préalable essentiel du théorème 4 de ladite Note.

Introduction. - Soient X un espace topologique complètement régulier, $\check{X}$ le compactifié de Čech de X .

Appelons probabilité normale sur X , toute probabilité sur $\check{X}$ donnant à X une mesure extérieure valant 1 .

Soit TX le convexe topologique vague des probabilités normales sur X (i. e. les structures convexe et topologique de TX sont induites par celles du convexe compact vague classique des probabilités sur $\check{X}$) (1).

La fonction de Dirac interprète X comme sous-espace topologique de TX .

Nous allons démontrer (cf. théorème 15) la propriété suivante :

Toute fonction continue de X dans toute partie convexe bornée complète d'espace localement convexe séparé admet un unique prolongement affine continu sur TX (2).

Le langage qui précède est classique.

En fait, TX est (à un isomorphisme près) susceptible d'une autre définition (cf. définitions 4 et 5).

Nous choisissons cette dernière définition qui est plus intrinsèque (n'utilisant pas $\check{X}$) et est faite dans un langage plus pauvre (ignorant la notion de mesure extérieure).

Cette dernière définition de TX rend d'ailleurs superflue l'hypothèse de complète régularité de X .

---

(1) TX est nombreux : c'est un Radon (cf. [6]).

(2) Si X est localement compact, alors TX est le convexe topologique vague des probabilités sur X au sens de Bourbaki. La propriété en question est, dans ce cas, conséquence de la "propriété de la convergence vague" démontrée par BOURBAKI (cf. [2], chap. 4, § 5, n° 12, prop. 22).

NOTATIONS. - Soit X un espace topologique quelconque. Alors :

BX est l'algèbre normée ordonnée des fonctions numériques bornées continues sur X ;

$\underset{\sim}{c}$ est la fonction constante sur X partout égale à c, si $c \in \underset{\sim}{R}$;

$B \star X$ est l'espace vectoriel des formes linéaires sur (l'espace vectoriel sous-jacent à) BX ;

EX est la fonction de Dirac de X dans $B \star X$;

$\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties H de BX, telles que $H(X)$ est un borné de $\underset{\sim}{R}$, et H est équicontinu.

DÉFINITION 1. - Un convexe est un ensemble muni d'une opération barycentre, plongeable dans un espace vectoriel de façon à être un sous-convexe.

Un convexe topologique est "un convexe et un espace topologique" au-dessus du même ensemble, plongeable dans un espace vectoriel topologique localement convexe séparé (en abrégé, e. l. c. s.) de façon à être un sous-convexe et un sous-espace topologique.

DÉFINITION 2. - Si A est une partie de $B \star X$, alors :

- La topologie vague de A est la topologie induite sur A par la topologie faible de $B \star X$ relative à la dualité entre $B \star X$ et BX ;
- La $\mathfrak{S}$-topologie de A est la topologie de la convergence uniforme sur les éléments H de $\mathfrak{S}$.

Dans la suite, on manipule des parties A convexes et positives. Dans ce cas, A, muni de sa topologie vague (resp. de sa $\mathfrak{S}$-topologie), est un convexe topologique.

1. Les convexes topologiques KX et TX.

DÉFINITION 3. - KX est le convexe topologique dont :

- Les éléments sont les formes linéaires positives de masse 1 sur BX,
- La structure convexe est induite par celle de $B \star X$,
- La topologie est la topologie vague.

KX contient $EX(X)$. On note encore EX la fonction de Dirac de X dans KX.

En utilisant la terminologie de BOURBAKI (cf. [4], § 3, n° 1), le couple (KX, EX) est solution du problème universel pour les fonctions continues de X dans les convexes compacts.

Si X est complètement régulier, alors KX est canoniquement isomorphe au convexe compact vague des probabilités sur $\check{X}$.

DÉFINITION 4. - Une <u>probabilité normale sur</u> X est un élément m de KX , tel que, quel que soit F ordonné filtrant croissant de BX tel que, $\forall\, x \in X$, $\sup_{f\in F} f(x) = 1$, alors

$$\sup_{f\in F} m(f) = 1 \quad .$$

DÉFINITION 5. - TX est le sous-convexe topologique de KX , dont les éléments sont les probabilités normales sur X .

TX contient $EX(X)$. On note encore EX la fonction de Dirac de X dans TX .

TX a la topologie vague.

2. La double topologie de TX .

TX , qui a la topologie vague par définition, a aussi la $\mathfrak{S}$-topologie (cf. théorème 10).

De la démonstration de ce théorème, nous ne ferons que citer des énoncés intermédiaires, en indiquant leur dépendance logique.

NOTATION. - $\underset{\sim}{I}$ est le sous-convexe topologique $[0 , 1]$ de $\underset{\sim}{R}$.

LEMME-DÉFINITION 6. - <u>Soient</u> g <u>une fonction continue de</u> X <u>dans</u> $\underset{\sim}{I}$, $\varepsilon > 0$, $H \in \mathfrak{S}$.

<u>Par définition</u>, g ε-contracte H , <u>si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées</u> :

(a) <u>L'ensemble</u> $g.H$ <u>des produits</u> $g.f$, f <u>parcourant</u> H , <u>est recouvrable par un nombre fini de parties de</u> BX <u>de diamètre inférieur ou égal à</u> ε (<u>pour la norme uniforme de</u> BX) ;

(b) <u>Il existe</u> n <u>entier</u>, $f_1 , \dots , f_n$ <u>appartenant à</u> BX , <u>tels que</u>

$$\forall\, f \in H \ , \quad \exists\, i \ , \quad 1 \leqslant i \leqslant n \ , \qquad \underset{\sim}{0} \leqslant f - f_i \quad \underline{\text{et}} \quad g.(f - f_i) \leqslant \underset{\sim}{\varepsilon} \quad .$$

<u>Exemple</u>. - Si g est à support compact, alors, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, H \in \mathfrak{S}$, g ε-contracte H .

LEMME 7. - <u>Soient</u> g <u>et</u> g' <u>des fonctions continues de</u> X <u>dans</u> $\underset{\sim}{I}$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$, $H \in \mathfrak{S}$, $H' \in \mathfrak{S}$. <u>Alors</u> :

(a) Si $\varepsilon' \geqslant \varepsilon$, et $H' \subset H$, alors g ε-contracte H $\Longrightarrow$ g ε'-contracte H' ;
(b) Si g et g' ε-contractent H , alors $\max(g , g')$ ε-contracte H .

Le lemme 7 (a) [resp. le lemme 7 (b)] se déduit de la définition 6 (a) [resp. la définition 6 (b)].

LEMME 8. - Soit m une probabilité normale sur X . Soient $\varepsilon > 0$, $H \in \mathfrak{S}$. Alors :

Il existe g fonction continue de X dans $\underset{\sim}{I}$, ε-contractant H , telle que $m(g) > 1 - \varepsilon$.

On le démontre d'abord dans le cas particulier où m est une probabilité de Dirac sur X .

Dans le cas général, où m est une probabilité normale sur X , alors :

- $F = \{g$; g fonction continue de X dans $\underset{\sim}{I}$, g ε-contractant $H\}$ est un ordonné filtrant croissant de BX , d'après le lemme 7 (b), et
- $\forall\, x \in X$, $\sup_{g \in F} g(x) = 1$, d'après le cas particulier déjà démontré.

On conclut grâce à la définition 4.

LEMME 9. - Soit m une probabilité normale sur X . Alors :

Les voisinages de m sont les mêmes dans KX , muni de la topologie vague, et dans KX , muni de la $\mathfrak{S}$-topologie.

D'une part, la $\mathfrak{S}$-topologie est plus fine que la topologie vague (cf. définition 2).

D'autre part, on démontre que " tout $\mathfrak{S}$-voisinage de m contient un voisinage vague de m ", en utilisant le lemme 8 et la définition 6 (a).

THÉORÈME 10. - Le convexe topologique TX a la topologie vague et a la $\mathfrak{S}$-topologie.

C'est une conséquence immédiate de la définition 5 et du lemme 9.

3. Le convexe topologique QX .

DÉFINITION 11. - QX est le convexe topologique dont :

- Les éléments sont les éléments m de KX tels que, pour tout $H \in \mathfrak{S}$, la restriction de m à H est continue pour la topologie sur H de la convergence simple sur X ;

- La structure convexe est induite par celle de $B \star X$;
- La topologie est la σ-topologie.

QX contient EX(X) . On note encore EX la fonction de Dirac de X dans QX .

THÉORÈME 12 (Caractérisation de QX). - QX est une partie convexe bornée complète d'e. l. c. s., et EX est une fonction continue de X dans QX .

Quelle que soit Y , partie convexe bornée complète d'e. l. c. s., quelle que soit U , fonction continue de X dans Y , il existe un unique V , fonction affine continue de QX dans Y , tel que $U = V \circ EX$.

Commentaire. - La démonstration utilise essentiellement le théorème de Banach (cf. [3], chap. 4, § 2, n° 5).

Le couple (QX , EX) est solution du problème universel, pour les fonctions continues de X dans les parties convexes bornées complètes d'e. l. c. s.

H. BUCHWALTER a décrit (cf. [5], théorème 4.8.1) la solution du problème universel, pour les fonctions continues de X dans les e. l. c. s. complets.

Ces deux problèmes universels sont voisins. Les deux solutions sont voisines. Nous renvoyons, en guise de démonstration du théorème 12, à la démonstration voisine faite par H. BUCHWALTER.

4. Une propriété du convexe topologique vague TX des probabilités normales sur X .

LEMME 13. - Tout élément de TX est élément de QX .

L'ensemble A des barycentres finis de probabilités de Dirac sur X est partout dense dans KX (c'est classique), donc aussi dans TX (sous-convexe topologique de KX ; cf. définition 5).

Les éléments de A sont éléments de QX , et A est partout dense dans TX qui a la σ-topologie (cf. théorème 10).

Le lemme résulte alors de la définition 11.

LEMME 14. - On a le plongement de convexes topologiques $TX \xrightarrow{\subset} QX$, où la flèche provient de l'inclusion des convexes sous-jacents (cf. lemme 13).

En effet, QX a la σ-topologie (cf. définition 11), et TX a la σ-topologie (cf. théorème 10).

THÉORÈME 15. – *Quelle que soit* Y , *partie convexe bornée complète d'e. l. c. s., quelle que soit* U , *fonction continue de* X *dans* Y , *il existe un unique* V , *fonction affine continue de* TX *dans* Y , *tel que* $U = V \circ EX$.

C'est une conséquence immédiate du lemme 14 et du théorème 12.

5. *Cas particuliers en* X .

Pour terminer, nous énonçons des cas d'égalité des trois convexes topologiques KX , TX , QX .

En général, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & QX \arrow[dr] & \\ TX \arrow[ur, "\subset"] \arrow[rr, "\subset"] & & KX \end{tikzcd} ,$$

où les flèches proviennent de l'inclusion des convexes sous-jacents, où les $\xrightarrow{\subset}$ sont des plongements de convexes topologiques, où $\longrightarrow$ est une injection affine continue.

Nous ne savons pas si, en général, la flèche $QX \longrightarrow KX$ est un plongement de convexes topologiques (i. e. si QX a la topologie vague). C'est bien dommage.

Supposons désormais X complètement régulier.

PROPOSITION 16. – *Les assertions suivantes sont équivalentes* :

- $QX = KX$;
- QX et KX *ont le même ensemble sous-jacent* ;
- X *est précompact pour la structure uniforme universelle* ;
- X *est weierstrassien* (cf. [1], § 1, exercice 22).

PROPOSITION 17. – *Si* $TX = QX$, *alors* X *est complet pour la structure uniforme universelle*.

Si X *est paracompact, alors* $TX = QX$.

PROPOSITION 18. – $TX = KX$ *si, et seulement si,* X *est compact*.

Il est facile ici de donner un exemple de convexe topologique Y tel que :

Il existe deux plongements (au sens des convexes topologiques) de Y dans deux e. l. c. s. qui n'induisent pas sur Y la même structure uniforme.

Soient X un espace paracompact non compact, $Y = TX = QX$ (cf. proposition 17). $Y = QX$ est une partie complète d'e. l. c. s. (cf. théorème 12).

$Y = TX$ n'est pas complet dans le dual faible de BX , sinon il serait fermé dans KX , donc égal à KX , donc X serait compact (cf. proposition 18).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale, Chap. 9. 2e édition. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1045 ; Bourbaki, 8).

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Intégration, Chap. 1-4. 2e édition. - Paris, Hermann, 1965 (Act. scient. et ind., 1175 ; Bourbaki, 13).

[3] BOURBAKI (Nicolas). - Espaces vectoriels topologiques, Chap. 3-4. - Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind., 1229 ; Bourbaki, 18).

[4] BOURBAKI (Nicolas). - Théorie des ensembles, Chap. 4. 2e édition. - Paris, Hermann, 1966 (Act. scient. et ind., 1258 ; Bourbaki, 22).

[5] BUCHWALTER (Henri). - Topologies et compactologies, Publ. Dép. Math. Lyon, t. 6, 1969, fascicule 2, p. 1-74.

[6] LÉGER (Christian) et SOURY (Pierre). - Le convexe topologique des probabilités sur un espace topologique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 516-519.

(Texte reçu le 23 avril 1970)

Christian LÉGER
Ass. Fac. Sc. Paris
11 rue Emile Zola
94 - KREMLIN-BICÊTRE