Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Henri Buchwalter

Parties bornées d'un espace topologique complètement régulier

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, nº 2 (1969-1970), exp. nº 14, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_2_A5_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
9e année, 1969/70, n° 14, 15 p.

19 mars 1970

PARTIES BORNÉES D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE COMPLÈTEMENT RÉGULIER

par Henri BUCHWALTER

Rappel. - Tous les espaces topologiques T sont supposés séparés et complètement réguliers. On désigne par $C(T)$ l'algèbre (non topologisée) de toutes les fonctions réelles continues sur T, et par $C^{\infty}(T)$ sa sous-algèbre de Banach (avec la norme uniforme) des fonctions bornées.

Les théories de la compactification de Stone-Čech, de la replétion de HEWITT [4] et de la replétion compactologique, ou c-replétion [2], sont supposées connues. On note par βT le compactifié de Stone-Čech de T (espace des caractères de $C^{\infty}(T)$), par υT le replété de T (espace des caractères de $C(T)$), et par θT le c-replété de T (espace des caractères de $C(T)$ dits compactologiques, c'est-à-dire dont les restrictions aux parties H de $C(T)$, qui sont équicontinues et simplement bornées, sont continues pour la topologie de la convergence simple sur T).

Par ailleurs, les espaces βT, υT, θT sont munis de structures uniformes canoniques les rendant complets. On désignera, par abus de notation, par β, υ, θ les structures uniformes sur T induites respectivement par βT, υT, θT. Les structures uniformes β et υ sont respectivement définies par les algèbres $C^{\infty}(T)$ et $C(T)$, tandis que la structure uniforme θ s'identifie à la structure uniforme universelle de T, ou encore à la structure uniforme de la convergence uniforme sur les parties H de $C(T)$ qui sont équicontinues et simplement bornées ([2] et [3]).

Introduction. - On reprend tout d'abord, pour l'approfondir, l'étude des parties bornées d'un espace topologique esquissée dans [2]. On montre ensuite que les méthodes utilisées par NACHBIN [5] et SHIROTA [7] pour obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'espace $C_c(T)$ soit tonnelé, s'adaptent très bien à la notion de bornés, et l'on obtient, grâce à l'introduction des μ-espaces, des généralisations de ces résultats.

1. Parties bornées d'un espace topologique T.

DÉFINITION 1. - Une partie A de T est dite bornée (dans T) lorsque toute fonction $f \in C(T)$ reste bornée sur A.

Par des vérifications évidentes, on a :

PROPOSITION 1.

(a) La famille des parties bornées de T est un recouvrement héréditaire, stable par réunion finie et par passage à l'adhérence.

(b) Pour que $A \subset T$ soit bornée, il suffit que toute suite de A soit bornée.

(c) Une fonction continue $g : T \to S$ transforme toute partie bornée de T en une partie bornée de S.

(d) Tout sous-espace pseudocompact de T (en particulier tout compact de T) est borné.

(e) Enfin, dire que T est lui-même borné, c'est dire que T est pseudocompact.

Les fonctions $f \in C(T)$ étant à la fois θ-uniformément continues et υ-uniformément continues, toute partie θ-précompacte (resp. υ-précompacte) de T est bien évidemment bornée. Mais ce point se précise par le théorème suivant.

THÉORÈME 1.

(a) Toute partie bornée de T est θ-précompacte (donc aussi υ-précompacte).

(b) Sur tout borné A de T, les structures uniformes θ et υ coïncident.

Démonstration. - Si $A \subset T$ est non θ-précompacte, il existe un écart continu d sur T, un $\alpha > 0$, et une suite de points $x_n \in A$ tels que $d(x_p, x_q) \geq \alpha$ pour $p \neq q$. La famille des ouverts $D_n = \{t ; d(x_n, t) < \alpha/4\}$ est disjointe et localement finie, ce qui permet (en égard à la complète régularité de T) de construire une suite $f_n \in C^\infty(T)$, telle que $0 \leq f_n \leq 1$, $f_n(x_n) = 1$, et $\operatorname{supp} f_n \subset D_n$. Alors la fonction $f = \sum nf_n$ est continue sur T, et non bornée sur A puisque $f(x_n) \geq n$, donc A n'est pas bornée dans T.

Pour prouver (b), considérons l'adhérence $\bar{A}^\theta$ de A (supposée bornée) dans θT ; elle est compacte, et $\bar{A}^\theta \subset \theta T \subseteq \upsilon T$. Donc, sur $\bar{A}^\theta$, les structures uniformes de θT et de υT coïncident, et $\bar{A}^\theta = \bar{A}^\upsilon$.

On peut déjà introduire la définition suivante.

DÉFINITION 2. - On dit que T est un μ-espace, lorsque tout borné de T est relativement compact.

Ce qui donne comme conséquence du théorème 1 :

COROLLAIRE 1. - Tout espace c-replet (en particulier tout espace paracompact) est un μ-espace.

2. L'algèbre $C_b(T)$ et le bidual T''.

On sait qu'une façon fréquente de topologiser l'algèbre $C(T)$ est de placer sur elle la topologie de la convergence compacte sur T : on obtient l'algèbre topolo-

gique habituellement notée $C_c(T)$.

Mais on peut aussi placer, sur $C(T)$, la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de T (dite convergence bornée sur T) : on obtient alors l'algèbre localement convexe $C_b(T)$ dont un système fondamental de semi-normes est donné par les $\|\cdot\|_A$: $f \to \|f\|_A = \sup_{t\in A} |f(t)|$ pour A borné quelconque de T. Concernant cette algèbre, des résultats intéressants ont déjà été obtenus par JOURLIN-BLANCHARD [1].

Désignons maintenant par T'' l'espace des <u>caractères continus</u> de $C_b(T)$. Il est facile de voir qu'un caractère quelconque $u \in \upsilon T$ de $C(T)$ est élément de T'' si, et seulement si, il existe un borné A de T tel que $|u(f)| \leq \|f\|_A$ pour toute $f \in C(T)$. Cela entraîne $u \in \bar{A}^{\upsilon} = \bar{A}^{\theta}$. D'où :

PROPOSITION 2. - $T'' = \bigcup_{A \text{ borné}} \bar{A}^{\upsilon} = \bigcup_{A \text{ borné}} \bar{A}^{\theta}$. <u>En particulier</u>, $T \subset T'' \subset \theta T$.

Il suit de là qu'il est facile de topologiser T'' en le considérant comme sous-espace topologique de θT (et aussi de υT). Les propriétés des espaces υT et θT impliquent alors que les algèbres $C(T'')$, $C(\theta T)$, $C(\upsilon T)$ et $C(T)$ sont algébriquement isomorphes ; nous les identifierons, ce qui signifie qu'à chaque fonction $f \in C(T)$ nous associerons automatiquement ses prolongées (uniques) f'', f^{θ} et f^{υ} aux espaces respectifs T'', θT, υT. Mais on obtient un peu plus, en remarquant encore que les parties équicontinues de $C(T)$, $C(T'')$ et $C(\theta T)$ sont les mêmes. De ces réflexions on tire les égalités (d'espaces uniformes) :

$$\upsilon(T'') = \upsilon T \quad \text{et} \quad \theta(T'') = \theta T .$$

La liaison avec la notion de μ-espace est directe.

PROPOSITION 3. - <u>Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

(a) T <u>est un</u> μ-<u>espace</u>,

(b) $T = T''$,

(c) $C_c(T) = C_b(T)$ (<u>égalité topologique</u>).

<u>Démonstration</u>. - Celle-ci est laissée au lecteur.

COROLLAIRE 2. - $C_c(\theta T) = C_b(\theta T)$ et $C_c(\upsilon T) = C_b(\upsilon T)$.

<u>Démonstration</u>. - θT et υT, étant c-replets, sont des μ-espaces.

<u>Remarque</u> 1. - On trouve dans l'ouvrage de GILLMAN-JERISON ([4], chap. 9 L) l'exemple d'un P-espace qui n'est pas c-replet. Puisque tout P-espace est un μ-espace (dans un P-espace, tout borné est fini), on a ainsi l'exemple d'un μ-espace qui

n'est pas c-replet. Ce qui assure que, dans le cas général, T'' est différent de θT .

Remarque 2. - Si T est pseudocompact, alors $C_b(T) = C^\infty(T)$, donc $T'' = \beta T = \theta T$ et T'' est compact. Dans ce cas, T'' est un μ-espace, et T ne l'est pas s'il n'est pas compact.

Remarque 3. - D'après le théorème 1, tout borné de T est relativement compact dans l'espace T'' , de sorte que l'algèbre $C_c(T'')$, algèbriquement égale à $C_b(T)$, a une topologie plus fine que celle de $C_b(T)$. On voit ainsi s'esquisser sur l'algèbre $C(T)$ une chaîne de topologies localement convexes :

$$C_b(\upsilon T) = C_c(\upsilon T) \to C_b(\theta T) = C_c(\theta T) \to C_b(T'') \to C_c(T'') \to C_b(T) \to C_c(T) ,$$

où les flèches représentent l'application identique de $C(T)$, cette application étant continue.

Remarque 4. - L'espace T'' n'est pas un espace complètement régulier quelconque. Par exemple, si T'' est pseudocompact, alors il est compact : en effet, T est pseudocompact aussi (car $C(T) = C(T'')$), donc $T'' = \beta T$. Mais il n'y a pas lieu de penser que T'' soit en général un μ-espace. Cette remarque soulève ainsi deux problèmes :

PROBLÈME 1. - Caractériser tous les espaces complètement réguliers qui sont des biduals.

PROBLÈME 2. - Trouver un espace T tel que T'' ne soit pas un μ-espace.

Remarque 5. - On aura sans doute reconnu dans la terminologie le langage de la théorie des espaces localement convexes. Les μ-espaces correspondent aux espaces de type (μ) (qui sont des espaces de Montel s'ils sont en plus tonnelés). L'algèbre $C_b(T)$ joue le rôle du dual fort E'_β d'un e. l. c. E , T'' le rôle du bidual E'' , et θT celui du complété $\hat{E}$.

3. L'espace μT .

Puisque $T'' \subset \theta T$ et $\theta(T'') = \theta T$, on a $(T'')'' \subset \theta T$, et l'on peut itérer. Mais il faut le faire de façon transfinie.

L'espace T_α . - Définissons, pour tout ordinal α , l'espace T_α selon :

$$T_0 = T \; ; \; T_1 = T'' \; ; \; T_2 = (T'')'' \; ; \; \dots ,$$

puis $T_\alpha = \begin{cases} (T_{\alpha-1})'' & \text{si } \alpha \text{ a un prédécesseur } \alpha - 1 , \\ \bigcup_{\xi<\alpha} T_\xi & \text{si } \alpha \text{ est un ordinal limite.} \end{cases}$

Les espaces T_α forment une chaîne croissante de sous-espaces topologiques de

θT tels que $\theta(T_\alpha) = \theta T$. Posons $\mu T = \bigcup_\alpha T_\alpha$; c'est encore un sous-espace de θT tel que $\theta(\mu T) = \theta T$. Mais il joue un rôle tout-à-fait spécial. En effet :

THÉORÈME 2.

(a) μT est un μ-espace.

(b) Il existe un plus petit ordinal α tel que $T_{\alpha+1} = T_\alpha$. Alors $\mu T = T_\alpha$; cet ordinal α est appelé ordre de T , et noté $\mathrm{ord}(T)$.

(c) Si X est un μ-sous-espace de θT contenant T , alors X contient μT . Autrement dit, μT est le plus petit μ-sous-espace de θT contenant T .

(d) Plus généralement, μT est solution du problème universel des applications continues de T dans des μ-espaces quelconques. On peut donc dire que μT est le μ-ifié de T .

Démonstration. - (a) est conséquence de (b). Prouvons (b) : désignons par $W(\alpha)$ l'ensemble bien ordonné des ordinaux $\xi < \alpha$. En bien ordonnant θT , on assure l'existence d'un ordinal γ tel que $\mathrm{card}(\theta T) < \mathrm{card}(W(\gamma))$; alors $T_{\gamma+1} = T_\gamma$ nécessairement : en effet, dans le cas contraire, on aurait $T_{\xi+1} \neq T_\xi$ pour tout $\xi \in W(\gamma)$, de sorte qu'on pourrait trouver une application injective de $W(\gamma)$ dans θT , ce qui est absurde. Il existe donc bien un plus petit ordinal $\alpha = \mathrm{ord}(T)$ tel que $T_{\alpha+1} = T_\alpha$; alors $T_\xi = T_\alpha$ pour tout $\xi \geqslant \alpha$, donc $\mu T = T_\alpha$.

Prouvons (c) : pour tout borné A de T , on a $A \subset X$, et A est borné dans X ; alors $\bar{A}^X$ est compact dans X , donc aussi dans θT , ce qui implique $\bar{A}^\theta = \bar{A}^X$, et prouve $T'' \subset X$; par induction transfinie, on en tire $\mu T \subset X$.

Prouvons (d) : si $g : T \to X$ est continue, et si X est un μ-espace, alors g se prolonge en $g^\theta : \theta T \to \theta X$. Mais pour tout borné A de T , $g(A)$ est borné dans X , et $g^\theta(\bar{A}^\theta) \subset \overline{g(A)}^\theta \subset X$, d'où $g^\theta(T'') \subset X$. Par induction transfinie, on obtient $g^\theta(\mu T) \subset X$, et par conséquent l'existence d'un prolongement continu g^μ , $g^\mu : \mu T \to X$ de g , d'ailleurs unique pour raison de densité.

Remarque. - De la même façon, on peut montrer que toute application continue $g : T \to S$ admet un prolongement continu unique $g^\mu : \mu T \to \mu S$. Elle admet aussi, pour chaque ordinal α , un prolongement continu $g^\alpha : T_\alpha \to S_\alpha$.

Notion de distinction.

DÉFINITION 3. - Une partie P d'un espace T est dite distinguée dans T (resp. c-distinguée dans T), lorsque tout borné de T (resp. tout compact de T) est contenu dans l'adhérence dans T d'un borné du sous-espace topologique P . Evidemment P est, dans ce cas, partout dense dans T .

Il serait intéressant de faire une étude générale de cette notion de distinction.

Ce qui va se rencontrer dans la suite étant principalement la distinction de T dans T'' , contentons-nous de signaler ce qui suit :

PROPOSITION 4. - Fixons un ordinal $\alpha \geq 1$, et soient les assertions :

(a) T est distingué dans T'' ,
(b) T est distingué dans T_α ,
(c) T est distingué dans μT ,
(d) $\mu T = T''$.

Alors (a) <==> (b) <==> (c) ==> (d) .

Démonstration. - Il est clair que (c) ==> (b) ==> (a). Montrons (a) ==> (d) : en effet, (a) implique que tout borné de T'' est relativement compact, donc T'' est un μ-espace, et $\mu T = T''$; mais alors (a) ==> (c) aussi, ce qui suffit.

Remarque. - Il ne semble pas que (d) ==> (a), mais ce point serait à élucider.

PROPOSITION 5.

(a) Pour que T soit distingué dans T'' , il faut et il suffit que $C_b(T) = C_b(T'')$,
(b) Pour que T soit c-distingué dans T'' , il faut et il suffit que $C_b(T) = C_c(T'')$.

Démonstration. - Celle-ci est laissée au lecteur.

4. L'espace $C_b'(T)$.

On sait que l'espace $C_c'(T)$, dual de $C_c(T)$, s'identifie à l'espace des mesures de Radon sur βT , dont le support est contenu dans T . Par exemple, si T est localement compact, $C_c'(T)$ est l'espace des mesures à support compact. Les éléments m de l'espace dual $C_b'(T)$ seront dans la suite (et sans doute provisoirement) appelés mesures sur T . Lorsque T est compact, on retrouve bien entendu la notion de mesure de Radon sur T . L'étude de l'espace $C_b'(T)$ peut s'esquisser à partir du lemme suivant :

LEMME 1. - $C^\infty(T)$ est dense dans $C_b(T)$.

Démonstration. - Soient $f \in C(T)$ et A un borné de T . Pour tout entier n , désignons par $f_n = \sup[-n , \inf(n , f)]$ la fonction f tronquée par $\pm n$. Alors $n \geq \|f\|_A$ implique évidemment $\|f - f_n\|_A = 0$, ce qui suffit.

Il suit de là que toute mesure m sur T définit, par restriction à $C^\infty(T)$, une mesure de Radon $\check{m}$ sur βT , l'application $m \to \check{m}$ étant injective. Il importe donc, en premier lieu, de savoir exactement quelles sont les mesures de Radon sur βT que l'on obtient ainsi. La question est résolue par l'intermédiaire de la

notion de support.

Pour toute mesure m sur T, définissons $S(m)$ par $S(m) = \operatorname{supp} \check{m}$; a priori, $S(m)$ est un compact de βT. Mais il existe un borné A de T et une constante $M \geqslant 0$, tels que $|m(f)| \leqslant M \|f\|_A$, d'où l'on tire facilement $S(m) \subset \bar{A}^{\beta}$. Or on sait que $\bar{A}^{\beta} = \bar{A}^{\theta} \subset T''$, de sorte que $S(m)$ est en réalité un compact de T''. Alors :

THÉORÈME 3. - <u>Les mesures</u> m <u>sur</u> T <u>correspondent bijectivement, par l'application</u> $m \to \check{m}$, <u>aux mesures de Radon sur</u> βT <u>dont le support est contenu dans l'adhérence dans</u> T'' (<u>ou dans</u> θT, <u>ou dans</u> βT) <u>d'un borné</u> A <u>de</u> T.

<u>Démonstration</u>. - Il suffit de prouver la suffisance de la condition. Soit n une mesure de Radon sur βT telle que $\operatorname{supp} n \subset \bar{A}^{\theta}$. Alors $f \in C^{\infty}(T)$, et $\|f\|_A = 0$ implique $f^{\beta} = 0$ sur $\bar{A}^{\beta} = \bar{A}^{\theta}$, donc aussi $f^{\beta} = 0$ sur $\operatorname{supp} n$, et par suite $n(f) = 0$. Par ailleurs, il existe une constante $M \geqslant 0$ telle que $|n(f)| \leqslant M \|f\|_T$. Alors, pour toute $f \in C^{\infty}(T)$, on a $|n(f)| \leqslant M \|f\|_A$: en effet, soit f telle que $\|f\|_A \leqslant 1$; la fonction f_1 (qui est f tronquée à ± 1) est égale à f sur A, donc $n(f) = n(f_1)$; mais $|n(f_1)| \leqslant M$, donc $|n(f)| \leqslant M$, ce qui implique facilement $|n(f)| \leqslant M \|f\|_A$ pour toute $f \in C^{\infty}(T)$. Construisons maintenant $m \in C_b'(T)$ telle que $\check{m} = n$, c'est-à-dire prolongeons n en une mesure m sur T. Pour toute $f \in C(T)$, soit G_f l'ensemble des $g \in C^{\infty}(T)$ telles que $\|f - g\|_A = 0$. Alors G_f n'est pas vide, et $n(g) = n(g')$ pour deux fonctions g et g' de G_f. Posons donc $m(f) = n(g)$ pour $g \in G_f$. Il est facile de vérifier que m est linéaire, prolonge n, et appartient à $C_b'(T)$ puisque $|m(f)| \leqslant M \|f\|_A$. Ainsi $n = \check{m}$, ce qui termine tout.

<u>Remarque</u>. - Les éléments $m \in C_c'(T)$ correspondent aux mesures sur βT dont le support est contenu dans T (ce fait se retrouve à partir de la démonstration précédente en prenant A compact). On peut donc dire, sans abus de langage, que les éléments de $C_c'(T)$ sont les mesures sur T à support compact.

COROLLAIRE 3. - <u>Si</u> T <u>est</u> c-<u>distingué dans</u> T'', <u>alors</u> $C_b'(T)$ <u>s'identifie exactement à l'espace des mesures de Radon sur</u> βT <u>dont le support est contenu dans</u> T''.

<u>Démonstration</u>. - C'est une conséquence immédiate du théorème 3, ou bien aussi de la remarque précédente, puisqu'alors $C_b(T) = C_c(T'')$.

Dans le cas général, la notion de support $S(m)$ d'une mesure m sur T répond à l'idée qu'on attend d'elle.

PROPOSITION 5. - <u>Soit</u> m <u>une mesure sur</u> T.

(a) <u>Pour toute</u> $f \in C(T)$, <u>telle que</u> $f'' = 0$ <u>sur</u> $S(m)$, <u>on</u> a $m(f) = 0$.

(b) Pour tout ouvert U de T, tel que $U \cap S(m) \neq \emptyset$, il existe une fonction $f \in C^{\infty}(T)$, telle que $\operatorname{supp} f \subset U$, et $m(f) = 1$.

Démonstration. - Prouvons (a) : Si $f \in C^{\infty}(T)$ et si $f'' = 0$ sur $S(m)$, alors $f^{\beta} = 0$ sur $\operatorname{supp} \check{m}$, et $m(f) = \check{m}(f) = 0$. Si $f \in C(T)$, et si $f'' = 0$ sur $S(m)$, alors $f''_n = 0$ sur $S(m)$ pour toute fonction tronquée f_n de f, donc $m(f_n) = 0$. Mais, dans ce cas, $m(f) = 0$ aussi, puisque $f = \lim f_n$ dans $C_b(T)$.

Prouvons (b) : Soit V un ouvert de βT, tel que $U = V \cap T$. Alors $V \cap S(m) \neq \emptyset$, donc il existe $f \in C^{\infty}(T)$, telle que $\operatorname{supp} f^{\beta} \subset V$, et $m(f) = 1$. On a donc $(\operatorname{supp} f^{\beta}) \cap T \subset V \cap T = U$. L'assertion (b) est alors conséquence du lemme classique.

LEMME 2. - Pour toute $f \in C^{\infty}(T)$, on a :

$$\operatorname{supp} f = (\operatorname{supp} f^{\beta}) \cap T \quad \text{et} \quad \operatorname{supp} f^{\beta} = \overline{(\operatorname{supp} f)}^{\beta} .$$

COROLLAIRE 4. - Pour tout ouvert U'' de T'', tel que $U'' \cap S(m) \neq \emptyset$, il existe une fonction $f \in C^{\infty}(T)$ telle que $\operatorname{supp} f'' \subset U''$, et $m(f) = 1$.

Démonstration. - La mesure $m \in C'_b(T)$ définit aussi une mesure m'' sur T'' et, évidemment, $\check{m}'' = \check{m}$, donc $S(m'') = S(m)$ (en particulier m'' est une mesure sur T'' à support compact, ce qui se retrouve encore en remarquant que l'application identique $C_c(T'') \to C_b(T)$ est continue). Il suffit alors de remplacer T par T'', et d'utiliser le fait que toute fonction de $C^{\infty}(T'')$ est le prolongement f'' à T'' d'une fonction $f \in C^{\infty}(T)$.

COROLLAIRE 5. -

(a) Soit m une mesure sur T à support compact. Alors $S(m)$ est, dans T, le plus petit fermé F, tel que $f = 0$ sur F implique $m(f) = 0$.

(b) Soit m une mesure sur T. Alors $S(m)$ est, dans T'', le plus petit fermé F'' tel que $f'' = 0$ sur F'' implique $m(f) = 0$.

Démonstration. - Démontrons seulement (b). Déjà $S(m)$ est un tel fermé d'après la proposition 5(a). Réciproquement, si F'' vérifie la condition, alors $S(m) \subset F''$ car, dans le cas contraire, on aurait $S(m) \cap U'' \neq \emptyset$, avec $U'' = T'' - F''$, d'où l'existence d'une fonction $f \in C^{\infty}(T)$ telle que $m(f) = 1$ et $\operatorname{supp} f'' \subset U''$; mais alors $f'' = 0$ sur F'', et $m(f) = 1$, ce qui est absurde.

DÉFINITION 3. - Soit H une partie de $C'_b(T)$. On appelle support de H le fermé $S(H)$ de T'', défini par

$$S(H) = \overline{\bigcup_{m \in H} S(m)} ,$$

où l'adhérence est évidemment prise dans T''.

On a de façon évidente :

COROLLAIRE 6. - Soit H une partie de $C'_b(T)$. Alors $S(H)$ est, dans T'' , le plus petit fermé F'' , tel que $f'' = 0$ sur F'' implique $m(f) = 0$ pour toute $m \in H$.

Enfin, en remarquant que l'espace $C'_c(T)$ est contenu dans $C'_b(T)$, on peut considérer toute partie H de $C'_c(T)$ comme une partie de $C'_b(T)$. Cela conduit au corollaire suivant.

COROLLAIRE 7. - Soit H une partie de $C'_c(T)$. Alors $S(H) \cap T$ est, dans T , le plus petit fermé F , tel que $f = 0$ sur F implique $m(f) = 0$ pour toute $m \in H$.

Démonstration. - Il suffit de voir que $S(H) \cap T$ est l'adhérence, dans T , de la réunion $\bigcup_{m \in H} S(m)$.

Il est clair que les deux espaces $C'_c(T)$ et $C'_b(T)$ sont en dualité séparante avec $C(T)$. Pour une partie $H \subset C'_c(T)$, dire qu'elle est faiblement bornée dans $C'_c(T)$ ou bien dans $C'_b(T)$ est évidemment dire la même chose. Nous dirons alors plus simplement qu'elle est faiblement bornée.

NACHBIN [5] a montré que si H est une partie faiblement bornée de $C'_c(T)$, alors $S(H) \cap T$ est un borné de T . En reprenant la même technique de démonstration, et grâce aux résultats sur les supports de mesures, on peut obtenir une légère amélioration de ce résultat, très utile pour la suite.

THÉORÈME 5.

(a) Soit H une partie faiblement bornée de $C'_b(T)$. Alors le support $S(H)$ de H est borné dans T'' .

(b) (NACHBIN) Soit H une partie faiblement bornée de $C'_c(T)$. Alors $S(H) \cap T$ est borné dans T .

Démonstration. - (b) est une conséquence évidente de (a), car la trace, sur T , d'un borné de T'' est évidemment bornée dans T . Montrons donc (a) et, pour cela, supposons que $S(H)$ n'est pas borné dans T'' , et prouvons que, dans ces conditions, H n'est pas faiblement bornée dans $C'_b(T)$. Soit $g \geq 0$, $g \in C_b(T)$, telle que $\|g''\|_{S(H)} = +\infty$. Posons $U''_n = \{t \; ; \; t \in T'' \text{ et } g''(t) > n\}$. On a là une suite d'ouverts de T'' telle que :

(α) La famille $(\overline{U''_n})$ est localement finie dans T'' ,

(β) Pour tout borné B de T'' , $n > \|g''\|_B \implies \overline{U''_n} \cap B = \emptyset$,

(γ) $U''_n \cap S(H) \neq \emptyset$, donc il existe $m_n \in H$ telle que $U''_n \cap S(m_n) \neq \emptyset$.

Construisons maintenant une suite d'entiers n_k en définissant successivement :

$$n_1 = 1 \qquad V''_1 = U''_{n_1} \; ; \qquad m'_1 = m_{n_1} \; ; \qquad B_1 = S(m'_1) \; .$$

$$n_2 = 1 + \max(n_1 \, , \, \|g''\|_{B_1}) \; ; \qquad V''_2 = U''_{n_2} \; ; \qquad m'_2 = m_{n_2} \; ; \qquad B_2 = B_1 \cup S(m'_2) \; .$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$n_{k+1} = 1 + \max(n_k \, , \, \|g''\|_{B_k}) \; ; \qquad V''_{k+1} = U''_{n_{k+1}} \; ; \qquad m'_{k+1} = m_{n_{k+1}} \; ; \qquad B_{k+1} = B_k \cup S(m'_{k+1})$$

On a alors :

(i) $V''_k = \{t \; ; \; t \in T'' \text{ et } g''(t) > n_k\} \subset V''_{k-1}$,

(ii) $m'_k \in H$ et $V''_k \cap S(m'_k) \neq \emptyset$,

(iii) $V''_k \cap S(m'_j) = \emptyset$ pour tout $j < k$.

Le corollaire 4 permet la construction d'une suite de fonctions $f_k \in C^\infty(T)$ telles que $\operatorname{supp} f''_k \subset U''_k$ et $m'_k(f_k) = 1$. Alors :

(iv) La famille $(\operatorname{supp} f''_k)$ est localement finie dans T'' , donc la famille $(\operatorname{supp} f_k)$ est localement finie dans T .

(v) Chaque borné B de T'' ne coupe qu'un nombre fini des $\operatorname{supp} f''_k$, donc chaque borné A de T ne coupe qu'un nombre fini des $\operatorname{supp} f_k$.

Ces propriétés entraînent que, pour toute suite (λ_k) de scalaires, la fonction $f = \sum \lambda_k f_k$ est continue sur T , la série donnant f étant de plus convergente dans $C_b(T)$. D'où l'égalité $m(f) = \sum \lambda_k m(f_k)$ pour toute mesure m sur T . Mais

$$(\operatorname{supp} f''_k \subset V''_k) \text{ implique } (\operatorname{supp} f''_k \cap S(m'_j) = \emptyset) \text{ pour tout } j < k \, ,$$

donc aussi $m'_j(f_k) = 0$. Ainsi $m'_j(f) = \lambda_j + \sum_{k<j} \lambda_k m'_j(f_k)$, puisque $m'_j(f_j) = 1$.

Cela étant, on va déterminer la fonction f en choisissant les scalaires λ_k de façon que $m'_j(f) = j$ pour tout j . Alors, il devient clair que la suite (m'_j) n'est pas faiblement bornée dans $C'_b(T)$, donc H n'est pas non plus faiblement bornée, ce qui termine la démonstration.

5. Les tonneaux des espaces $C_c(T)$ et $C_b(T)$.

Pour tout disque D de $C(T)$, désignons par D^b le polaire de D dans $C'_b(T)$, et par D^c son polaire dans $C'_c(T)$. Définissons le b-socle de D par $\Sigma_b(D) = S(D^b)$, et le c-socle de D par $\Sigma_c(D) = S(D^c) \cap T$. L'intérêt de cette notion est immédiat puisque l'on a :

PROPOSITION 6.

(a) Soit D un disque fermé de $C_b(T)$. Alors son b-socle $\Sigma_b(D)$ est le plus petit fermé F'' de T'' tel que $f'' = 0$ sur F'' implique $f \in D$.

(b) Soit D un disque fermé de $C_c(T)$. Alors son c-socle $\Sigma_c(D)$ est le plus

petit fermé F de T tel que $f = 0$ sur F implique $f \in D$.

Démonstration. - Démontrons seulement (a). Déjà $\Sigma_b(D)$ est un fermé de T'' , et $f'' = 0$ sur $\Sigma_b(D)$ implique $m(f) = 0$ pour toute $m \in D^b$; donc f est élément du bipolaire $(D^b)^0$, égal à D puisque D est un disque fermé de $C_b(T)$, donc aussi faiblement fermé. Réciproquement, si F'' est un fermé de T'' , tel que $f'' = 0$ sur F'' implique $f \in D$, alors $f'' = 0$ sur F'' implique, en réalité, $\lambda f \in D$ pour tout scalaire $\lambda > 0$, donc aussi $|m(\lambda f)| \leqslant 1$ pour toute $m \in D^b$, c'est-à-dire $m(f) = 0$ pour toute $m \in D^b$. Ainsi $\Sigma_b(D) \subset F''$, d'après le corollaire 6.

On va maintenant établir le résultat fondamental de l'exposé, à savoir qu'il existe des correspondances "presque" bijectives entre les tonneaux de $C_b(T)$ et les fermés bornés de T'' d'une part, et entre les tonneaux de $C_c(T)$ et les fermés bornés de T d'autre part.

Désignons une fois pour toutes par $\Delta = \Delta(T)$ la boule unité de l'algèbre $C^\infty(T)$. On a déjà :

PROPOSITION 7.

(a) Pour tout fermé borné B de T'' , l'ensemble $\Phi_b(B)$ des fonctions $f \in C(T)$, telles que $\|f''\|_B \leqslant 1$, est un tonneau de $C_b(T)$ contenant Δ .

(b) Pour tout fermé borné A de T , l'ensemble $\Phi_c(A)$ des fonctions $f \in C(T)$, telles que $\|f\|_A \leqslant 1$, est un tonneau de $C_c(T)$ contenant Δ .

Démonstration. - Démontrons seulement (a). Déjà $\Phi_b(B)$ contient Δ et, B étant borné dans T'' , c'est un disque absorbant de $C(T)$. Montrons pour terminer, qu'il est fermé dans $C_b(T)$. Si $f_i \to f$ dans $C_b(T)$, alors $f_i'' \to f''$ uniformément sur les parties $\overline{A}^\theta$ de T'' , où A est un borné quelconque de T . Cela implique que $f_i'' \to f''$ simplement sur T'' ; mais alors $f_i \in \Phi_b(B)$, pour tout i , implique bien $f \in \Phi_b(B)$.

Réciproquement, tout tonneau de $C_c(T)$ est évidemment un tonneau de $C_b(T)$; et tout tonneau D de $C_b(T)$ définit un tonneau $D \cap C^\infty(T)$ de $C^\infty(T)$. Mais $C^\infty(T)$ est un espace de Banach, donc est tonnelé, de sorte qu'il existe un scalaire $\lambda > 0$ tel que $D \supset \lambda\Delta$. Ainsi, tout tonneau de $C_c(T)$ ou de $C_b(T)$ est, à une homothétie près, un tonneau contenant Δ .

Par ailleurs, si D est un tonneau de $C_b(T)$ (resp. de $C_c(T)$), alors son polaire D^b (resp. son polaire D^c) est un disque faiblement borné de $C_b'(T)$ (resp. de $C_c'(T)$). Le théorème 5 assure donc que son b-socle $\Sigma_b(D)$ est un fermé borné de T'' (resp. son c-socle $\Sigma_c(D)$ est un fermé borné de T).

On voit donc apparaître les correspondances signalées entre les tonneaux de $C_b(T)$ (resp. $C_c(T)$) contenant Δ et les fermés bornés de T'' (resp. de T) :

$$B \to \Phi_b(B) \quad \text{et} \quad D \to \Sigma_b(D) \ ,$$
$$A \to \Phi_c(A) \quad \text{et} \quad D \to \Sigma_c(D) \ .$$

Le théorème fondamental va alors s'énoncer ainsi, en deux parties distinctes :

THÉORÈME 6.

(a) Tout fermé borné B de T'' est le b-socle du tonneau $\Phi_b(B)$:

$$B = \Sigma_b[\Phi_b(B)] \ .$$

(b) Pour tout tonneau D de $C_b(T)$ contenant Δ , la condition $\|f''\|_{\Sigma_b(D)} \leq 1$ implique $f \in D$; c'est-à-dire qu'un tel tonneau D contient le tonneau $\Phi_b[\Sigma_b(D)]$:

$$D \supset \Phi_b[\Sigma_b(D)] \ .$$

(c) Autrement dit, les tonneaux de $C_b(T)$ de la forme $\Phi_b(B)$, pour B fermé borné de T'' , sont les seuls pour lesquels on ait l'égalité $D = \Phi_b[\Sigma_b(D)]$, et ils forment une base de tonneaux de $C_b(T)$ en ce sens que tout tonneau de $C_b(T)$ contient l'un d'eux à une homothétie près.

Démonstration. - Démontrons (a) : si B est borné dans T'' , on a $B \subset \Sigma_b[\Phi_b(B)]$ car, dans le cas contraire, on pourrait trouver $u \in B$ et $f \in C(T)$ avec $f'' = 0$ sur $\Sigma_b[\Phi_b(B)]$ et $f''(u) = 2$; mais alors $f \in \Phi_b(B)$, d'après la proposition 6, donc aussi $|f''(u)| \leq 1$, ce qui est absurde. Si de plus B est fermé, alors $\Sigma_b[\Phi_b(B)] \subset B$, car B est un fermé de T'' tel que $f'' = 0$ sur B implique $f \in \Phi_b(B)$.

Démontrons (b) : Soit $f \in C(T)$ telle que $\|f''\|_{\Sigma_b(D)} = a < 1$; désignons par f_a la fonction f tronquée à $\pm a$. Puisque $f_a = \sup(-a , \inf(a , f))$, on a $(f_a)'' = (f'')_a$ et, par suite, $f'' = f''_a$ sur $\Sigma_b(D)$, d'où $f - f_a \in D$ d'après la proposition 6. On a même $f - f_a \in \lambda D$ pour tout $\lambda > 0$; en particulier, $f - f_a \in (1 - a)D$. Par suite, puisque $f_a \in a\Delta$, on obtient $f \in a\Delta + (1 - a)D \subset D$, grâce à l'hypothèse sur D . Si maintenant $\|f''\|_{\Sigma_b(D)} = 1$, alors, pour tout entier n , $(1 - \frac{1}{n})f \in D$ d'après ce qu'on vient de voir, d'où $f \in D$ puisque D est fermé. Enfin, (c) est évident, et n'est là que pour résumer la situation.

THÉORÈME 7.

(a) Tout fermé borné A de T est le c-socle du tonneau $\Phi_c(A)$:

$$A = \Sigma_c[\Phi_c(A)] \ .$$

(b) Pour tout tonneau D de $C_c(T)$ contenant Δ , la condition $\|f\|_{\Sigma_c(D)} \leq 1$ implique $f \in D$, c'est-à-dire qu'un tel tonneau D contient le tonneau $\Phi_c[\Sigma_c(D)]$:

$$D \supset \Phi_c[\Sigma_c(D)] \ .$$

(c) Autrement dit, les tonneaux de $C_c(T)$ de la forme $\Phi_c(A)$, pour A fermé borné de T, sont les seuls pour lesquels on ait l'égalité $D = \Phi_c[\Sigma_c(D)]$, et ils forment une base de tonneaux de $C_c(T)$, en ce sens que tout tonneau de $C_c(T)$ contient l'un d'eux à une homothétie près.

Démonstration. - Celle-ci est laissée au lecteur.

On obtient en particulier les généralisations annoncées des résultats de NACHBIN-SHIROTA en traduisant, sous une forme moins technique et plus frappante, les deux énoncés précédents. Cela donne :

THÉORÈME 8.

(a) Les tonneaux de $C_c(T)$ forment une base de voisinages de 0 de l'espace $C_b(T)$.

(b) Les tonneaux de $C_b(T)$ forment une base de voisinages de 0 de l'espace $C_b(T'')$.

D'où :

COROLLAIRE 8 (NACHBIN-SHIROTA). - Pour que l'espace $C_c(T)$ soit tonnelé, il faut et il suffit que T soit un μ-espace.

et :

COROLLAIRE 9. - Pour que l'espace $C_b(T)$ soit tonnelé, il faut et il suffit que T soit distingué dans T''.

Remarque 1. - Dans la double chaîne ordinale d'espaces

$$\begin{tikzcd}
C_b(\mu T) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & C_b(T_{\alpha+1}) \arrow[r] \arrow[d] & C_b(T_\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & C_b(T) \arrow[d] \\
C_c(\mu T) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C_c(T_{\alpha+1}) \arrow[r] \arrow[ur] & C_c(T_\alpha) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] \arrow[ur] & C_c(T)
\end{tikzcd}$$

décrivant des topologies localement convexes sur l'algèbre $C(T)$, remplacer chaque topologie $\mathcal{T}$ par celle $\mathcal{T}'$ engendrée par les tonneaux de $\mathcal{T}$, c'est remplacer chaque espace de la ligne supérieure par celui qui le précède à gauche, et chaque espace de la ligne inférieure par celui qui le domine immédiatement dans la ligne supérieure.

Remarque 2. - Dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
C_b(T'') \arrow[r, dashed] \arrow[d] & C_b(T) \arrow[d] \\
C_c(T'') \arrow[r, dashed] \arrow[ur] & C_c(T)
\end{tikzcd}$$

on voit bien maintenant que les voisinages de 0 de $C_b(T'')$ (resp. de $C_b(T)$)

correspondent aux tonneaux de $C_b(T)$ (resp. de $C_c(T)$) , mais il manque une interprétation convenable des voisinages de 0 de $C_c(T'')$.

Un voisinage de 0 de $C_c(T'')$, de la forme

$$V_{K''} = \{f \; ; \; \|f''\|_{K''} \leq 1\} = \varphi_b(K'') ,$$

où K'' est un compact de T'' , est évidemment un tonneau de $C_b(T)$, mais c'est probablement, si l'on ose dire, un tonneau plus qu'absorbant, c'est-à-dire,qu'il doit absorber certaines parties (mais lesquelles ?) de $C_b(T)$ plus vastes que les parties finies. Ce qui nous amène à poser le problème suivant.

PROBLÈME 3. - La conjecture suivante est-elle raisonnable :

Les tonneaux bornivores de $C_b(T)$ forment-ils une base de voisinages de 0 de l'espace $C_c(T'')$?

Une réponse positive donnerait comme condition nécessaire et suffisante pour que $C_b(T)$ soit infratonnelé, que T soit c-distingué dans T'' .

6. L'espace tonnelé $C_c(\mu T)$.

L'espace μT étant un μ-espace, on voit que $C_c(\mu T) = C_b(\mu T)$ est un e. l. c. tonnelé. Quel rôle joue-t-il exactement vis-à-vis de $C_b(T)$ et $C_c(T)$?

Le théorème de polarité entre les tonneaux de $C_b(T)$ et les fermés bornés de T'' , joint à la construction transfinie de l'espace μT , permettrait de retrouver la construction transfinie proposée par A. ROBERT [6] de l'espace tonnelé associé à l'espace $C_b(T)$ (et aussi à l'espace $C_c(T)$).

Pour ne pas compliquer inutilement l'exposé, utilisons la théorie des μ-espaces pour démontrer le résultat ci-après.

THÉORÈME 9. - L'espace tonnelé $C_c(\mu T) = C_b(\mu T)$ est la solution du problème co-universel des applications linéaires continues d'un e. l. c. tonnelé quelconque E dans l'espace $C_b(T)$ (ou dans l'espace $C_c(T)$).

Démonstration. - Il suffit, dans le plus défavorable des cas, de prouver que toute application linéaire continue $p : E \to C_c(T)$ est en réalité continue de E dans $C_c(\mu T)$, pourvu que E soit tonnelé. Par transposition, on tire de p une application continue $q : T \to E'_\sigma$, définie par $\langle x , q(t)\rangle = p_x(t)$. Or E , étant tonnelé, l'espace faible E'_σ est un e. l. c. de type (μ) (toute partie faiblement bornée de E' est équicontinue, donc relativement compacte dans E'_σ). Il suit de là que E'_σ est même, au point de vue topologique, un μ-espace : en effet, toute partie (topologiquement) bornée est évidemment vectoriellement bornée, donc

relativement compacte dans E'_σ . Mais alors, d'après le théorème 2(d), q admet un prolongement continu q^μ : $\mu T \to E'_\sigma$. Tirons de là que p est continue de E dans $C_c(\mu T)$. Soit K un compact de μT , et soit $V_K = \{f \; ; \; \|f^\mu\|_K \leq 1\}$. Soit H l'enveloppe disquée fermée dans E'_σ de la partie compacte $q^\mu(K)$. Puisque $q^\mu(K)$ est équicontinue, H est aussi équicontinue, et son polaire H^0 est un voisinage de 0 dans E . Or $p(H^0) \subset V_K$, ce qui termine tout.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLANCHARD (Nicole) et JOURLIN (M.). - La topologie de la convergence bornée sur les algèbres de fonctions continues, Publications du Département de mathématiques de la Faculté des Sciences de Lyon, t. 6, 1969, fasc. 2, p. 85-96.

[2] BUCHWALTER (Henri). - Topologies et compactologies, Publications du Département de mathématiques de la Faculté des Sciences de Lyon, t. 6, 1969, fasc. 2, p. 1-74.

[3] BUCHWALTER (H.) et PUPIER (R.). - Caractérisation topologique de la complétion universelle d'un espace complétement régulier, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, 1969, Série A, p. 1534-1536.

[4] GILLMAN (L.) and JERISON (M.). - Rings of continuous functions. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1960 (The University Series in higher Mathematics).

[5] NACHBIN (Leopoldo). - Topological vector spaces of continuous functions, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 40, 1954, p. 471-474.

[6] ROBERT (A.). - Quelques questions d'espaces vectoriels topologiques, Comment. Math. Helvet., t. 42, 1967, p. 314-342.

[7] SHIROTA (T.). - On locally convex vector spaces of continuous functions, Proc. Japan Acad., t. 30, 1954, p. 294-298.

(Texte reçu le 8 octobre 1970)

H. BUCHWALTER
Maître de Conférences
Département de mathématiques de la Faculté des Sciences de Lyon
69 - VILLEURBANNE